

М. М. Манукян

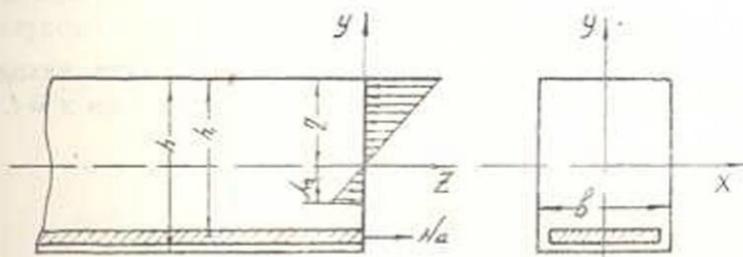
## Деформация и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и, частично, растянутой зон бетона

В настоящей работе исследуются деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и, частично, растянутой зон бетона, пользуясь линейной теорией ползучести бетона, развитой в работе [1].

При решении этой задачи пришлось предварительно разработать способ для определения положения нейтральной оси данной балки в зависимости от ее упруго-ползучих характеристик и времени  $t$ .

Результаты, полученные теоретическим путем, сравниваются с опытными данными ЦНИПС [2].

§ 1. *Постановка задачи.* Рассмотрим изгибаемую железобетонную балку с одиночной арматурой (фиг. 1). Допустим, что балка



Фиг. 1.

имеет одну плоскость симметрии, и все внешние силы действуют в этой плоскости. Положим, далее, что сжатая зона бетона работает полностью, а растянутая зона — частично, ввиду образования в ней трещин. Обозначим расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры через  $h_1$ , высоту сечения  $h$ , ширину  $b$ , расстояние нейтральной оси от сжатого края балки  $a$ .

Направим координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  по главным осям инерции поперечного сечения, а ось  $Oz$  — вдоль балки.

При изучении напряженного состояния в изгибаемой железобе-

тонной балке будем принимать, что сечения после деформации остаются плоскими.

Эта задача в случае, когда растянутая зона работает полностью, решена Н. Х. Арутюняном [1].

§ 2. *Начальное упругое состояние.* При решении данной задачи примем гипотезу плоских сечений. Тогда деформация бетона  $\varepsilon_0$  и соответствующее напряжение  $\sigma_0$  по направлению оси  $oz$  будет вычисляться формулами:

$$\varepsilon_0 = A(z)y, \quad (2.1)$$

$$\sigma_0 = E_0 A(z)y, \quad (2.2)$$

где  $A(z)$  — неизвестная кривизна балки,

$E_0$  — модуль деформации бетона,

$y$  — координата точки.

Из условия совместности деформации арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем:

$$\varepsilon_0|_{y=-(h_1-\eta_0)} = \varepsilon_a, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon_a$  — деформация арматуры,

$\eta_0$  — пока неизвестная высота сжатой зоны бетона.

Из соотношений (2.1), (2.3) и замечаем, что

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a}, \quad (2.4)$$

получим

$$\sigma_a = -E_a A(z)(h_1 - \eta_0), \quad (2.5)$$

где  $E_a$  — модуль деформации арматуры.

Напишем уравнения равновесия элемента балки, находящегося между произвольным сечением  $z$  и торцевым сечением  $z = l$ .

Имеем

$$\int_{-\lambda\eta_0}^{\eta_0} \sigma_0 b dy + N_a = 0; \quad (2.6)$$

$$\int_{-\lambda\eta_0}^{\eta_0} \sigma_0 b y dy - N_a (h_1 - \eta_0) = M_z, \quad (2.7)$$

где  $N_a$  — усилие в арматуре,

$$N_a = F_a \sigma_a = -F_a E_a A(z)(h_1 - \eta_0), \quad (2.8)$$

$F_a$  — площадь поперечного сечения арматуры,

$M_z$  — изгибающий момент в рассматриваемом сечении,

$\lambda$  — постоянное число, причем  $0 \leq \lambda < 1$ .

Подставляя значения  $\sigma_0$  и  $N_a$  из (2.2) и (2.8) в (2.6), после интегрирования приведем его к виду:

$$(1 - \lambda^2)\zeta_0^2 + 2\mu m \zeta_0 - 2\mu m = 0, \quad (2.9)$$

где  $\zeta_0 = \frac{\eta_0}{h_1}$  — отношение сжатой высоты сечения данной балки в начальный момент времени к полезной высоте сечения.

$m = \frac{E_a}{E_b}$  — модульное отношение,

$\mu = \frac{F_a}{bh_1}$  — коэффициент армирования.

Решение уравнения (2.9) будет:

$$\zeta_0 = \frac{\mu m}{1 - \lambda^2} \left[ \sqrt{1 + 2 \frac{1 - \lambda^2}{\mu m}} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

Здесь перед квадратным корнем взят знак плюс, исходя из физических соображений.

При  $\lambda = 0$  выражение (2.10) примет вид:

$$\zeta_0 = \mu m \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{\mu m}} - 1 \right]. \quad (2.11)$$

Подставляя значения  $\sigma_0$  и  $N_0$  из (2.2) и (2.8) в уравнение (2.7), после интегрирования получим

$$A(z) = \frac{M_z}{E_b F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.12)$$

где  $F_0$  — площадь поперечного сечения бетона.

Пользуясь выражениями (2.2), (2.5) и (2.12), находим

$$\sigma_0 = \frac{M_z y}{F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_a = - \frac{M_z m (1 - \zeta_0)}{F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1}. \quad (2.14)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно (2.12) будет иметь вид

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} = \frac{M_z}{E_b F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.15)$$

где  $w_0$  — прогиб балки.

§ 3. Напряжения и деформации в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести бетона при постоянном модуле мгновенной деформации. В предыдущем параграфе мы определили упруго-мгновенное напряженное состояние в железобетонной балке.

В настоящем параграфе приводится решение этой же задачи с учетом ползучести бетона.

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона  $E_0(t)$  изменяется во времени незначительно, и практически его можно считать постоянным, т. е.  $E_0 = \text{const}$ .

Между полной продольной деформацией бетона  $\varepsilon_0(t)$  и напряжением  $\sigma_0(t)$  с учетом ползучести бетона, как известно, существует следующая зависимость [1]:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E_0} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.1)$$

где  $C(t, \tau)$  — мера ползучести бетона.

Пользуясь гипотезой плоских сечений, напишем

$$\varepsilon_0(t) = A(z, t)y, \quad (3.2)$$

где  $A(z, t)$  — кривизна балки в данный момент времени  $t$ .

Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что выражение  $\sigma_0(t)$  можно представить в следующей форме:

$$\sigma_0(t) = E_0 B(z, t)y, \quad (3.3)$$

где  $B(z, t)$  — неизвестная функция. Очевидно, что функции  $A(z, t)$  и  $B(z, t)$  связаны следующей интегральной зависимостью:

$$A(z, t) = B(z, t) - E_0 \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.4)$$

При решении поставленной задачи удобно пользоваться функцией  $B(z, t)$ .

Тогда (3.1) примет вид:

$$\varepsilon_0(t) = B(z, t)y - E_0 y \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.5)$$

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем:

$$\varepsilon_0(t)|_{y=-(h_1-\tau)} = \varepsilon_a(t),$$

Пользуясь этим соотношением и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a},$$

приведем выражение (3.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(t) = & - E_a B(z, t)(h_1 - \tau) + \\ & + E_a E_0 (h_1 - \tau) \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для определения усилий в арматуре  $N_a$  получим

$$N_a(t) = -F_a E_a B(z, t)(h_1 - \eta) + F_a E_a E_0 (h_1 - \eta) \int_{\eta}^1 B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.7)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению двух функций  $B(z, t)$  и  $\eta(t)$ . Для их определения воспользуемся уравнениями равновесия, которые в данном случае будут:

$$\int_{-\lambda \eta}^{\eta} \sigma_0(t) b dy + N_a(t) = 0, \quad (3.8)$$

$$\int_{-\lambda \eta}^{\eta} \sigma_0(t) b y dy - N_a(t)(h_1 - \eta) = M_x. \quad (3.9)$$

$\lambda$  — постоянное число, причем  $0 \leq \lambda < 1$ .

Следует отметить, что приведенное здесь решение строго отвечает физической постановке задачи при  $\lambda = 0$ , а следовательно достаточно хорошо будет описывать картину напряженного состояния в балке при малых  $\lambda$ .

Подставляя значения  $\sigma_0(t)$  и  $N_a(t)$  из (3.2) и (3.7) в уравнения (3.8) и (3.9), после интегрирования и некоторых преобразований находим

$$B(z, t) = \frac{M_x}{E_0 F_0 \left[ (1 + \lambda^3) \frac{\zeta^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta) \frac{\zeta^3}{2} \right] h_1^2}, \quad (3.10)$$

$$\int_{\eta}^1 B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^2)\zeta^2}{2\mu m(1 - \zeta)} \right] B(z, t), \quad (3.11)$$

где  $\zeta = \frac{\eta}{h_1}$  есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени  $t$  к полезной высоте сечения.

Таким образом, определение искомых функций  $B(z, t)$  и  $\zeta(t)$  свелось к совместному решению двух интегральных уравнений (3.10) и (3.11).

Заметим, что если исключить из уравнения (3.11) посредством (3.10) функцию  $B(z, t)$ , то получим для определения  $\zeta(t)$  нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, решение которого связано с практически непреодолимой трудностью. Поэтому сперва рассмотрим интегральное уравнение (3.11) и применим к нему метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [3].

Придавая в (3.11) верхнему пределу  $t$  последовательно возрастающие конкретные значения  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , получим:

$$\int_{\zeta_1}^{t_1} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[ 1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2}{2\mu m(1-\zeta_1)} \right] B(z, t_1), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{t_2} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0} \left[ 1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_2^2}{2\mu m(1-\zeta_2)} \right] B(z, t_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{t_3} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_3, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_3} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_3, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ & \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[ 1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu m(1-\zeta_k)} \right] B(z, t_k), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $\zeta_i = \zeta(t_i) = \frac{\eta(t_i)}{h_1}$  есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени  $t_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) к полезной высоте сечения.

Если интегрировать уравнение (3.12) по частям и иметь в виду, что  $C(t_1, t_1) = 0$ , то получим:

$$\begin{aligned} & B(z, \tau_1) C(t_1, \tau_1) + \int_{\zeta_1}^{t_1} C(t_1, \tau) \frac{\partial B(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = - \frac{1}{E_0} \left[ 1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2}{2\mu m(1-\zeta_1)} \right] B(z, t_1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применяя к интегралу в левой части полученного выражения теорему о среднем, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & B(z, t_1) \left[ \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1)}{2\mu m E_0(1-\zeta_1)} - C(t_1, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1} = \\ & = B(z, \tau_1) \left[ C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогичным образом для моментов времени  $t = t_2$  и  $t = t_k$  из уравнений (3.13) и (3.14) находим

$$\begin{aligned} & B(z, t_2) \left[ \frac{(1-\lambda^2)\zeta_2^2 - 2\mu m(1-\zeta_2)}{2\mu m E_0(1-\zeta_2)} - C(t_2, \xi) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ & = B(z, \tau_1) \left[ C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1} + \end{aligned}$$

$$+ B(z, t_1) \left[ C(t_1, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} - C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} \right], \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} B(z, t_k) \left[ \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 - 2\mu m(1 - \zeta_k)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_k)} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[ C(t_k, \tau_1) - C(t_k, \xi) \Big|_{\tau_1}^{t_k} \right] + \\ + B(z, t_1) \left[ C(t_k, \xi) \Big|_{\tau_1}^{t_1} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_1}^{t_k} \right] + \\ \dots + B(z, t_{k-1}) \left[ C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Символом  $C(t_m, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$  здесь обозначено среднее значение функции  $C(t_m, \tau)$  в интервале изменения переменной  $\tau$ , равной  $(t_i - t_{i-1})$ .

Формулы (3.16), (3.17) и (3.18) в общем виде являются точным решением интегрального уравнения (3.11). Для определения численных значений искомых величин необходимо применить приближенный метод определения средних величин  $C(t_k, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$ . В практических расчетах эту величину с достаточной точностью можно определить с помощью следующего равенства:

$$C(t_k, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = C \left( t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \right). \quad (3.19)$$

Подставляя это выражение в (3.16), (3.17) и (3.18), получим решение интегрального уравнения (3.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} B(z, t_1) \left[ \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1 - \zeta_1)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_1)} - C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[ C(t_1, \tau_1) - C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} B(z, t_2) \left[ \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_2^2 - 2\mu m(1 - \zeta_2)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_2)} - C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[ C(t_2, \tau_1) - C \left( t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ + B(z, t_1) \left[ C \left( t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 B(z, t_k) & \left[ \frac{(1-\lambda^2)\zeta_k^2 - 2\mu m(1-\zeta_k)}{2\mu m E_0(1-\zeta_k)} - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right] = \\
 & = B(z, \tau_1) \left[ C(t_k, \tau_1) - C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] + \\
 & + B(z, t_1) \left[ C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] + \\
 & \dots + B(z, t_{k-1}) \left[ C\left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}\right) - \right. \\
 & \quad \left. - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким образом, для определения  $B(z, t_1)$  и  $\zeta_1$  получаем систему двух уравнений

$$B(z, t_1) = \frac{M_x}{E_0 F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right] h \bar{r}}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 B(z, t_1) & \left[ \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1)}{2\mu m E_0(1-\zeta_1)} - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] = \\
 & = B(z, \tau_1) \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $B(z, \tau_1) = A(z)$  и определяется формулой (2.12).

Подставляя значение  $B(z, t_1)$  из (3.23) в (3.24), получим одно уравнение, из которого можно определить  $\zeta_1$ . Это уравнение будет:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1) \left[ 1 + E_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]}{2\mu m E_0(1-\zeta_1) \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right]} = \\
 & = \frac{C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}{f(\zeta_0)},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$f(\zeta_0) = (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^2}{3} + \mu m(1 - \zeta_0)^2, \tag{3.26}$$

$\zeta_0$  — определяется формулой (2.10).

Уравнению (3.25) можно дать следующий вид:

$$a_1 \zeta_1^4 + b_1 \zeta_1^3 + c_1 \zeta_1^2 + d_1 \zeta_1 + e_1 = 0, \tag{3.27}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1}{h_1}, \quad \zeta_0 = \frac{\eta_0}{h_1}. \tag{3.28}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \mu m E_0 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda - 1) \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right], \\ b_1 &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda) (2 - 2\lambda - \lambda^2) \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right], \\ c_1 &= 3(1 - \lambda^2) \left\{ f(\zeta_0) - \mu m E_0 \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\}, \\ d_1 &= -e_1 = 6\mu m f(\zeta_0) \left[ 1 + E_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Решая уравнение (3.27), определяем то значение  $\zeta_1$ , которое имеет в данном случае физический смысл. Нетрудно видеть, пользуясь теоремой Штурма, что это уравнение имеет только один корень, который для данной задачи имеет физический смысл. Подставляя значение  $\zeta_1 = \frac{\eta_1}{h_1}$  в выражение (3.23), определяем  $B(z, t_1)$ .

Если в уравнении (3.10) заменить  $t$  через  $t_1$ , то из полученного уравнения и из (3.19) получим

$$a_2 \zeta_2^4 + b_2 \zeta_2^3 + c_2 \zeta_2^2 + d_2 \zeta_2 + e_2 = 0, \quad (3.30)$$

где

$$\zeta_2 = \frac{\eta_2}{h_1}. \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \mu m E_0 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda - 1) A_2, \\ b_2 &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda) (2 - 2\lambda - \lambda^2) A_2, \\ c_2 &= 3(1 - \lambda^2) [f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) - \mu m E_0 A_2], \\ d_2 &= -e_2 = 6\mu m f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \left[ 1 + E_0 C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\varphi(\zeta_1) = (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1}{2}, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \varphi(\zeta_1) \left[ C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \left[ C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь значение  $\zeta_1$  определяется из (3.27).

Решая (3.30), определим значение  $\zeta_2$ . После этого определяем значение  $B(z, t_2)$ .

Аналогично из уравнений (3.11) и (3.23) получим:

$$a_k \zeta_k^4 + b_k \zeta_k^3 + c_k \zeta_k^2 + d_k \zeta_k + e_k = 0. \quad (3.35)$$

где

$$\bar{z}_k = \frac{\eta_k}{h_1} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \mu m E_0 (1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1) A_k, \\ b_k &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2) A_k, \\ c_k &= 3(1 - \lambda^2) \{ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) - \mu m E_0 A_k \}, \\ d_k &= -e_k = 6\mu m f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \\ &\quad \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[ 1 + E_0 C \left( t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[ C(t_k, \tau_1) - C \left( t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[ C \left( t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left( t_k, \frac{t_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_3) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[ C \left( t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) - \right. \\ &\left. - C \left( t_k, \frac{t_2 + t_3}{2} \right) \right] + \dots + f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-2}) \times \\ &\times \left[ C \left( t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left( t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Решая уравнение (3.35), определим значение  $\bar{z}_k$ , после чего из соотношения (3.10), для определения значения  $V(z, t_k)$ , можем получить формулу:

$$V(z, t_k) = \frac{M_x}{F_0 E_0 \left[ (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right] h_1^2} \quad (3.39)$$

Придавая индексу  $k$  значения  $0, 1, 2, \dots, n$ , получим общее выражение функции  $V(z, t)$  при  $t = \tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$ , причем  $t_0 = \tau_1$ .

Пользуясь соотношениями (3.2) и (3.39), для напряжения  $\sigma_0(t)$  окончательно получим

$$\sigma_0(t_k) = \frac{M_x \gamma}{F_0 \left[ (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right] h_1^2}, \quad (3.40)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $t_0 = \tau_1$ , а  $\zeta_k$  определяется из уравнения (3.35).

Аналогичным образом из соотношений (3.6), (3.11) и (3.39), для определения напряжения в арматуре  $\sigma_a(t)$ , находим

$$\varepsilon_a(t_k) = - \frac{M_z(1 - \lambda^2 \zeta_k^2)}{2\mu F_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} h_1, \quad (3.41)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $t_0 = \tau_1$ .

Легко видеть, что если в выражениях (3.39), (3.40) и (3.41) подставить  $t = \tau_1$ , то они совпадут с выражениями (2.12), (2.13) и (2.14), которые имеют место при упругой задаче.

Пользуясь выражениями (3.5), (3.11) и (3.39) для определения полной продольной деформации бетона  $\varepsilon_b(t)$ , получим

$$\varepsilon_b(t_k) = \frac{\sigma_b(t_k)}{E_0} \cdot \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu(1 - \zeta_k)}, \quad (3.42)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $t_0 = \tau_1$ .

Для деформации арматуры  $\varepsilon_a(t)$  имеем:

$$\varepsilon_a(t_k) = \frac{\sigma_a(t_k)}{E_a}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.43)$$

Известно, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_b(\tau_1) &= \frac{d^2 w_0}{dz^2} y, \\ \varepsilon_b(t_k) &= \frac{d^2 w_k}{dz^2} y, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

где  $w_0 = w(\tau_1)$  — прогиб балки в момент времени  $\tau_1$ ,

$w_k = w(t_k)$  — прогиб балки в момент времени  $t_k$ .

Из (3.44) легко получить

$$\frac{d^2 w_k}{dz^2} = \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu(1 - \zeta_0)^2 \right]}{2\mu(1 - \zeta_k) \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} \frac{d^2 w_0}{dz^2} \quad (3.45)$$

Интегрируя это уравнение и принимая для простоты такое закрепление опор балки, чтобы постоянные интегрирования равнялись нулю, получим:

$$\frac{w(t_k)}{w(\tau_1)} = \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu(1 - \zeta_0)^2 \right]}{2\mu(1 - \zeta_k) \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} \quad (3.46)$$

Полученные результаты иллюстрируются табл. 1. Механизм ползучести бетона примем в следующем виде [1]:

$$C(t, \tau) = \left( \frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) \left[ 1 - e^{-0,026(t-\tau)} \right] 10^{-5}$$

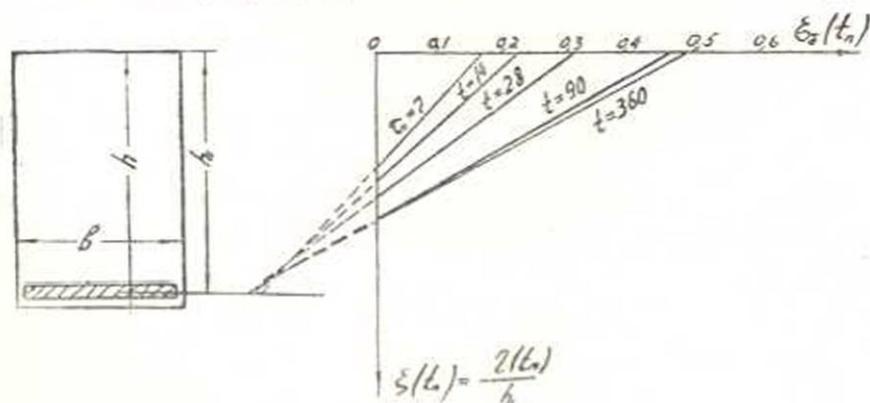
причем  $\mu = 0,0165$ ;  $E_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ;  $E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $\tau_1 = 7$  дней, а  $\lambda = 0$ .

Таблица 1

t	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\zeta$	0,490226	0,548796	0,621306	0,701151	0,712789
$\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$	1	0,817014	0,656870	0,539848	0,520042
$\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$	1	1,023835	1,055120	1,063223	1,097427
$\frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)}$	1	1,156800	1,420321	1,947630	1,883662
$\frac{\varepsilon_n(t)}{\varepsilon_n(\tau_1)}$	1	1,023835	1,055120	1,093223	1,097427
$\frac{W(t)}{W(\tau_1)}$	1	1,156800	1,420321	1,883662	1,947630

Для нахождения искоемых функций  $\zeta$ ,  $\varepsilon_0(t)$ ,  $\varepsilon_a(t)$ ,  $\varepsilon_b(t)$ ,  $\varepsilon_n(t)$  и  $w(t)$  разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов  $\tau_1 = 7$ ,  $t_1 = 14$ ,  $t_2 = 28$ ,  $t_3 = 90$ ,  $t_4 = 360$  дням.

Ниже приводится график для иллюстрации результатов, помещенных в таблице (фиг. 2).



Фиг. 2.

Сравнивая эти результаты с опытными данными, полученными Я. М. Немировским в ЦНИПСе, видим, что они достаточно близки. Например, для  $\zeta$  Немировским получены значения, находящиеся между 0,48 и 0,73, а при наших расчетах — от 0,49 до 0,71. Близкие картины получаются для напряжений, а также для деформации.

§ 4. Напряжения и деформации в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона. Рассмотрим общий случай, когда модуль мгновенной деформации бетона зависит от времени, т. е.

$$E_s = E_0(t). \quad (4.1)$$

В этом случае связь между полной продольной деформацией бетона  $\varepsilon_0(t)$  и напряжением  $\sigma_0(t)$  с учетом ползучести бетона будет иметь вид:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E_0(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (4.2)$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений и соотношением (4.2), будем искать  $\sigma_0(t)$  в следующей форме:

$$\sigma_0(t) = E_0(t) B(z, t) y = D(z, t) y, \quad (4.3)$$

где  $D(z, t)$  — неизвестная функция.

Подставляя значение  $\sigma_0(t)$  из (4.3) в (4.2), получим:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{D(z, t)}{E_0(t)} y - y \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (4.4)$$

Условие совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона дает

$$\varepsilon_0(t) \Big|_{y = -(h_1 - \eta)} = \varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s}. \quad (4.5)$$

Внося это выражение в (4.4), получим

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & -m(t) D(z, t) (h_1 - \eta) + \\ & + E_s (h_1 - \eta) \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $m(t) = \frac{E_s}{E_0(t)}$  — модульное отношение.

Усилие в арматуре будет

$$\begin{aligned} N_s(t) = & -F_s m(t) D(z, t) (h_1 - \eta) + \\ & + F_s E_s (h_1 - \eta) \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставляя значения  $\varepsilon_0(t)$  и  $N_s(t)$  из (4.3) и (4.7) в (3.8) и (3.9), после интегрирования найдем

$$D(z, t) = \frac{M_z}{E_0 \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta) \frac{\zeta^2}{2} \right] h_1^2} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t)} \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_1^2}{2\mu m(t)(1 - \zeta_1)} \right] D(z, t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\zeta(t) = \frac{\eta(t)}{h_1}$  — это отношение высоты сжатой зоны сечения балки к полезной высоте сечения в момент времени  $t$ .

Если к интегральному уравнению (4.9) применить метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, то его можно переписать для каждого значения  $t_k$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_1} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_1, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_1)} \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_1^2}{2\mu m(t_1)(1 - \zeta_1)} \right] D(z, t_1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_2} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_2, \tau) \right] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_2, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_2)} \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_2^2}{2\mu m(t_2)(1 - \zeta_2)} \right] D(z, t_2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau + \\ & + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_k)} \left[ 1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_k^2}{2\mu m(t_k)(1 - \zeta_k)} \right] D(z, t_k). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если интегрировать уравнение (4.11) по частям, применить к полученному интегралу теорему о среднем и пользоваться приближенным равенством (3.19), то, аналогично § 3, получим

$$\frac{(1 - \lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(t_1)(1 - \zeta_1)[1 + E_0(t_1)\beta_1(t_1)]}{2\mu m(t_1)E_0(t_1)(1 - \zeta_1) \left[ (1 + \lambda^2)\frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1)\frac{\zeta_1^2}{2} \right]} = \frac{\alpha_1(t_1)}{f_1(\zeta_0)}, \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t_1) &= C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}, \\ \beta_1(t_1) &= C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \left[ \frac{1}{E_0(t_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right], \\ f_1(\zeta_0) &= \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_1)} \left[ (1 + \lambda^2)\frac{\zeta_0^2}{3} + \mu m(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Этому уравнению можно дать следующий вид:

$$a_1 \zeta_1^4 + b_1 \zeta_1^3 + c_1 \zeta_1^2 + d_1 \zeta_1 + e_1 = 0, \quad (4.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \mu m(t_1)E_0(t_1)(1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1)\alpha_1(t_1), \\ b_1 &= 2\mu m(t_1)E_0(t_1)(1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2)\alpha_1(t_1), \\ c_1 &= 3(1 - \lambda^2)[f_1(\zeta_0) - \mu m(t_1)E_0(t_1)\alpha_1(t_1)], \\ d_1 &= -e_1 = 6\mu m(t_1)f_1(\zeta_0)[1 + E_0(t_1)\beta_1(t_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Решая уравнение (4.15), определяем значение  $\zeta_1$ . Подставляя значение  $\zeta_1$  в выражении (4.8), определим  $D(z, t_1)$ .

Если в уравнении (4.8) заменить  $t$  через  $t_1$ , то из полученного уравнения и из (4.11) получим:

$$a_2 \zeta_2^4 + b_2 \zeta_2^3 + c_2 \zeta_2^2 + d_2 \zeta_2 + e_2 = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \mu m(t_2)E_0(t_2)(1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1)\alpha_2(t_2), \\ b_2 &= 2\mu m(t_2)E_0(t_2)(1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2)\alpha_2(t_2), \\ c_2 &= 3(1 - \lambda^2)[f_2(\zeta_0)\varphi_2(\zeta_1) - \mu m(t_2)E_0(t_2)\alpha_2(t_2)], \\ d_2 &= -e_2 = 6\mu m(t_2)f_2(\zeta_0)\varphi_2(\zeta_1)[1 + E_0(t_2)\beta_2(t_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 & z_2(t_2) = \varphi_2(\zeta_1) \left[ C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right] + f_2(\zeta_0) \left[ C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right], \quad (4.19) \\
 & \varphi_2(t_2) = C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \left[ \frac{1}{E_0(t_2)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right], \\
 & f_2(\zeta_0) = \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_2)} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2 \right], \\
 & \varphi_2(\zeta_1) = \frac{E_0(t_1)}{E_0(t_2)} \left[ (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично из уравнений (4,8) и (4,12), получим

$$a_k \zeta_k^4 + b_k \zeta_k^3 + c_k \zeta_k^2 + d_k \zeta_k + e_k = 0, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_k &= \mu m(t_k) E_0(t_k) (1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1) z_k(t_k), \\
 b_k &= 2\mu m(t_k) E_0(t_k) (1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2) \alpha_k(t_k), \\
 c_k &= 3(1 - \lambda^2) [f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-1}) - \mu m(t_k) E_0(t_k) z_k(t_k)], \\
 d_k &= -l_k = 6\mu m(t_k) f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-1}) [1 + E_0(t_k) \beta_k(t_k)].
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
 z_k(t_k) &= \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-1}) \left[ C(t_k, \tau_1) - C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right] + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_2) \varphi_k(\zeta_3) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-1}) \times \\
 & \quad \times \left[ C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right] + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_3) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-2}) \times \\
 & \quad \times \left[ C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_2 + t_3}{2}\right)} \right] - \cdots + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \cdots \varphi_k(\zeta_{k-2}) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[ C \left( t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left( t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right] + \left[ \frac{1}{E_0 \left( \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right)} - \frac{1}{E_0 \left( \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right)} \right]. \quad (4.22)$$

$$\varphi_k(t_k) = C \left( t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) - \left[ \frac{1}{E_0(t_k)} - \frac{1}{E_0 \left( \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right)} \right],$$

$$f_k(\zeta_0) = \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_k)} f(\zeta_0),$$

$$\varphi_k(\zeta_1) = \frac{E_0(t_1)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_1),$$

$$\varphi_k(\zeta_2) = \frac{E_0(t_2)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_2),$$

$$\varphi_k(\zeta_3) = \frac{E_0(t_3)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_3),$$

.....

$$\varphi_k(\zeta_{k-1}) = \frac{E_0(t_{k-1})}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_{k-1}).$$

(4.23)

$f(\zeta_0), \varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2), \dots, \varphi(\zeta_{k-1})$  определяются формулами параграфа 3, т. е.

$$\begin{aligned} f(\zeta_0) &= (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu n(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2, \\ \varphi(\zeta_1) &= (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Решая уравнение (4.20), определим значение  $\zeta_k$ , после чего из соотношения (4.8) и (4.3) получим:

$$V(z, t_k) = \frac{M_z}{F_0 E_0(t_k) \left[ (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k}{2} \right] h^2}. \quad (4.25)$$

Придавая индексу  $k$  значения  $0, 1, 2, \dots, n$ , получим общее выражение функции  $V(z, t_k)$  при  $t = \tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$ , причем  $t_0 = \tau_1$ .

Пользуясь соотношениями (4.3) и (4.25), для напряжения  $\sigma_0(t)$  найдем

$$\sigma_0(t_k) = \frac{M_z y}{F_0 \left[ (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k}{2} \right] h^2}, \quad (4.26)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $t_0 = \tau_1$ , а  $\zeta_k$  определяется из уравнения (4.20).

Аналогичным образом из (4.6), (4.9) и (4.23) находим:

$$\varepsilon_a(t_k) = - \frac{M_2(1-\lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu F_0 \left[ (1+\lambda^2)\frac{\zeta_k^3}{3} + (1-\lambda^2)(1-\zeta_k)\frac{\zeta_k^2}{2} \right]} h_1, \quad (4.27)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $t_0 = \tau_1$ .

Пользуясь выражениями (4.4), (4.9) и (4.25), для определения полной продольной деформации бетона  $\varepsilon_0(t)$  получим

$$\varepsilon_0(t_k) = \frac{\sigma_0(t_k)}{E_0(t_k)} \frac{(1-\lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu n(t_k)(1-\zeta_k)}, \quad (4.28)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $t_0 = \tau_1$ .

Для деформации арматуры  $\varepsilon_a(t)$  имеем:

$$\varepsilon_a(t_k) = \frac{\sigma_a(t_k)}{E_a}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.29)$$

Из формул (4.26)–(4.29) следует, что при переменном модуле мгновенной деформации бетона выражения напряжений и деформаций бетона и арматуры будут иметь такой же вид, как и при постоянном модуле мгновенной деформации бетона, причем, конечно, их числовые значения будут разные.

Аналогичным образом, как это сделано в параграфе 3, получим выражение прогибов балки.

Полученные результаты иллюстрируются табл. 2.

Таблица 2

$t$	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\zeta$	1	0,573417	0,647457	0,736254	0,742156
$\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$	1	0,866441	0,806775	0,773486	0,771469
$\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$	1	1,154155	1,239502	1,292847	1,296225
$\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$	1	1,416645	2,034918	3,372155	3,495728
$\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$	1	1,154155	1,239502	1,292847	1,296225

Характеристику меры ползучести бетона  $C(t, \tau)$  примем такую же, как и в предыдущем примере, а модуль мгновенной деформации бетона примем в следующем виде:

$$E_0(t) = 2(1 - e^{-0.172t})10^5.$$

Для нахождения искомым функций  $\zeta_k$ ,  $\sigma_0(t)$ ,  $\sigma_a(t)$ ,  $\varepsilon_0(t)$ ,  $\varepsilon_a(t)$  опять разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов  $\tau_1 = 7$ ,  $t_1 = 14$ ,  $t_2 = 28$ ,  $t_3 = 90$ ,  $t_4 = 360$  дням.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы при выполнении этой работы.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 30 V 1956

Մ. Մ. Մանուկյան

ԾՌՎՈՂ ԵՐԿԱԹՎԵՏՈՆ ՆԵԾԱՆԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ  
ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ԲԵՏՈՆԻ ՍԵՂՄՎԱԾ ՈՒ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԶԳՎԱԾ  
ԳՈՏԻՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում գծային սողքի տեսության հիման վրա, ստույնաթիվում են ծավաղ երկաթաբետոն նեծանի լարումները և դեֆորմացիան, երբ բետոնի սեղմված գոտին աշխատում է լրիվ, իսկ ձգման գոտին՝ մասնակիորեն: Այս խնդրի լուծումը, երբ ձգման գոտին աշխատում է լրիվ, արված է Ն. Պ. Հարությունյանի կողմից:

Առաջադրված խնդիրը լուծելու համար նախապես մշակված է նեծանի չեզոք առանցքը գտնելու մեթոդ՝ կախված նեծանի տառնչական-սողքային բնութագրից և ժամանակից:

Հոդվածում ցույց է արվում, որ նեծանի չեզոք առանցքի, լարումների և դեֆորմացիայի գտնելը բերվում է (3.10) և (3.11) ինտեգրալ հավասարումների միասեղ լուծմանը: Այս խնդրի լուծման համար օգտագործված է Ն. Մ. Կոխլովի և Ն. Ն. Բոգոլյուբովի մեթոդը:

Կազմված են համապատասխան սղյուսակներ: Տեսականորեն ստացված արդյունքները համեմատված են նեխրավակու փորձնական արդյունքի հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
2. Немировский Я. М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов при кратковременном и длительном нагружении. Бетон и железобетон, № 5, 1955.
3. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 6, 1954.