

И. О. Хачатрян

О параметрическом представлении и о некоторых экстремальных свойствах целых функций многих переменных

В работе М. М. Джрбашяна [1] были изучены некоторые специальные классы целых функций многих переменных, имеющих различные порядки и типы роста по отдельным переменным. В частности, было построено преобразование Бореля и интегральное представление для целых функций многих переменных.

В § 1 настоящей статьи на основании этих результатов приводится обобщение известной теоремы Палей и Винера для целых функций многих переменных, в случае, когда порядок роста по всем переменным равен единице, а типы роста, вообще говоря, могут быть различными.

В § 2 на основе обобщенной теоремы Палей и Винера приводятся оценки для целых функций многих переменных в пространстве L_2 .

Ради простоты запись изложение ведется для целых функций двух переменных.

§ 1. Обобщение теоремы Палей и Винера для целых функций двух переменных

Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{n!m!} z_1^n z_2^m \quad (1.1)$$

целая функция двух переменных z_1 и z_2 .

Обозначим

$$M_f(r_1, r_2) = \max_{|z_1|=r_1, |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|.$$

Класс целых функций, удовлетворяющих условиям:

1°. Существует постоянная $c = c(f)$ такая, что

$$M_f(r_1, r_2) < c(f) e^{\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2}, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0; \quad (1.2)$$

$$2^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty, \quad (1.3)$$

обозначим через W_{σ_1, σ_2} .

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Класс W_{σ_1, σ_2} совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z_1, z_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 z_1 + iu_2 z_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (1.4)$$

где

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 < +\infty. \quad (1.5)$$

Доказательство. Докажем, что всякая функция вида (1.4), где $\varphi(u_1, u_2)$ удовлетворяет условию (1.5), принадлежит к классу W_{σ_1, σ_2} .

По теореме Планшереля для кратных интегралов Фурье из (1.4) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = (2\pi)^2 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 < +\infty,$$

т. е. условие (1.3) удовлетворяется.

С другой стороны, если $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2$), то

$$f(z_1, z_2) = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} e^{-u_1 y_1 - u_2 y_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2,$$

и, в силу неравенства Шварца и условия (1.5):

$$|f(z_1, z_2)| \leq \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{-2u_1 y_1 - 2u_2 y_2} du_1 du_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq c e^{\sigma_1 |y_1| + \sigma_2 |y_2|} \leq c e^{\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2},$$

т. е. условие (1.2) также выполняется.

Пусть теперь $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}$. Тогда из (1.1) будем иметь

$$\left| \frac{a_{nm}}{n! m!} \right| \leq \frac{M_f(r_1, r_2)}{r_1^n r_2^m}. \quad (1.6)$$

Из условия (1.2) теоремы и из (1.6) следует

$$|a_{nm}| \leq \frac{c_f e^{\sigma_1 r_1} n!}{r_1^n} \frac{e^{\sigma_2 r_2} m!}{r_2^m}$$

для всевозможных $r_1 > 0, r_2 > 0$.

Выбрав теперь

$$r_1 = \frac{n}{\sigma_1}, \quad r_2 = \frac{m}{\sigma_2},$$

будем иметь

$$|a_{nm}| \leq c_1 \left(\frac{\sigma_1 e}{n} \right)^n \left(\frac{\sigma_2 e}{m} \right)^m.$$

откуда

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{\sigma_1 e} \right)^n \left(\frac{m}{\sigma_2 e} \right)^m} < 1. \quad (1.7)$$

Из (1.7) по формуле Стирлинга получим:

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \sigma_1^{-n} \sigma_2^{-m}} \leq 1. \quad (1.7')$$

Из (1.7') вытекает, что функция

$$g(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} \quad (1.8)$$

голоморфна в области $|z_1| > \sigma_1$, $|z_2| > \sigma_2$.

Доказано [1], что если обозначим через Δ_{θ_k} ($k=1, 2$) полуплоскость, не содержащую точку $z_k=0$, границей которой является касательная к окружности $|z_k| = \sigma_k$ ($k=1, 2$) в точке $\sigma_k e^{i\theta_k}$ ($k=1, 2$), то

$$g(z_1, z_2) = e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1 z_1 e^{-i\theta_1} - t_2 z_2 e^{-i\theta_2}} dt_1 dt_2 \quad (1.9)$$

при $z_k \in \Delta_{\theta_k}$ ($k=1, 2$).

В формуле (1.8) положим $\theta_1 = \theta_2 = 0$; тогда будем иметь

$$g(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(+)}^{(+)}(z_1, z_2) \quad (1.10_1)$$

при $x_k > \sigma_k$ ($k=1, 2$).

Пусть теперь $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, тогда

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) &= - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, -t_2) e^{-t_1 z_1 + t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(+)}^{(-)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (1.10_2)$$

при $x_1 > \sigma_1$, $x_2 < -\sigma_2$.

Положив $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 g(z_1, z_2) &= - \int_0^\infty \int_0^\infty f(-t_1, t_2) e^{t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\
 &= - \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(-)}^{(+)}(z_1, z_2) \quad (1.10_3)
 \end{aligned}$$

при $x_1 < -\sigma_1$, $x_2 > \sigma_2$.

Положив, наконец, $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, получим

$$\begin{aligned}
 g(z_1, z_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(-t_1, -t_2) e^{t_1 z_1 + t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(-)}^{(-)}(z_1, z_2) \quad (1.10_4)
 \end{aligned}$$

при $x_k < -\sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Учитывая, что по условию $f(x_1, x_2) \in L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$ и применяя неравенство Шварца к интегралам (1.10₁)–(1.10₄), убеждаемся, что они сходятся равномерно, соответственно, при $x_1 \geq \varepsilon > 0$, $x_2 \geq \varepsilon$; $x_1 \geq \varepsilon$, $x_2 \leq -\varepsilon$; $x_1 \leq -\varepsilon$, $x_2 \geq \varepsilon$; $x_1 \leq -\varepsilon$, $x_2 \leq -\varepsilon$, т. е. преобразование Бореля дает аналитическое продолжение функции $g(z_1, z_2)$, определенной с помощью ряда (1.8) лишь при $|z_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Итак, $g(z_1, z_2)$ регулярна (и следовательно, однозначна) во всей плоскости z_k ($k = 1, 2$), разрезанной вдоль отрезка мнимой оси от точки $-i\sigma_k$ до точки $i\sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Отсюда вытекает, что при $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$) существуют и равны $g(iy_1, iy_2)$ пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) = g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + 0, iy_2 + 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) = g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + 0, iy_2 - 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(-)}^{(+)}(iy_1 - \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) = g_{(-)}^{(+)}(iy_1 - 0, iy_2 + 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(-)}^{(-)}(iy_1 - \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) = g_{(-)}^{(-)}(iy_1 - 0, iy_2 - 0).$$

Но из представления (1.10₁) видно, что $g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon)$ является, с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$, трансформацией Фурье функции

$$f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon) = \begin{cases} f(x_1, x_2) e^{-\varepsilon x_1 - \varepsilon x_2}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{для остальных значений } x_1 \text{ и } x_2, \end{cases}$$

которая принадлежит к классу $L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$; при этом, как легко видеть, выражение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon) - f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; 0)|^2 dx_1 dx_2 = \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 (1 - e^{-\varepsilon x_1 - \varepsilon x_2})^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, используя равенство Парсеваля для кратных интегралов Фурье, будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) - \varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) \right|^2 dy_1 dy_2 = 0, \quad (1.11_1)$$

где

$$\varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \text{l. i. m.}_{a, b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2. \quad (1.12_2)$$

Но по доказанному выше для $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$), функция $g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon)$ имеет обычный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому из (1.9) следует, что для почти всех $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$)

$$\varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + 0, iy_2 + 0) = \frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2). \quad (1.13_1)$$

Функция $g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon)$ есть, с точностью до множителя $-\frac{1}{2\pi}$, трансформация Фурье функции

$$f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2; \varepsilon) = \begin{cases} f(x_1, x_2) e^{-x_1 + \varepsilon + x_2 \varepsilon}, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ 0 & \text{для остальных значений } x_1 \text{ и } x_2. \end{cases}$$

Поэтому, как и выше, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) - \varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) \right|^2 dy_1 dy_2 = 0, \quad (1.11_2)$$

где

$$\varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \text{l. i. m.}_{a, b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_{-b}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2, \quad (1.12_2)$$

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) &= -\frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(-)}(iy_1+0, iy_2-0) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2), \text{ при } |y_k| > \sigma_k \quad (k=1, 2).\end{aligned}\quad (1.13_2)$$

Аналогично устанавливается, что если

$$\varphi_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_0^b f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 \quad (1.12_3)$$

и

$$\varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_{-b}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2, \quad (1.12_4)$$

то при $|y_k| > \sigma_k$ ($k=1, 2$) будем иметь

$$\varphi_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2); \quad (1.13_3)$$

$$\varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2). \quad (1.13_4)$$

Из (1.12₁)—(1.12₄) и (1.13₁)—(1.13₄) следует, что трансформация Фурье $F(y_1, y_2)$ функции $f(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}F(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b, c, d \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \int_{-c}^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a, c \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_{-c}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{a, d \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_0^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{b, c \rightarrow \infty} \int_0^b \int_{-c}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{b, d \rightarrow \infty} \int_0^b \int_0^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) + \varphi_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) + \varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) + \varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = 0,\end{aligned}$$

почти для всех $|y_k| > \sigma_k$ ($k=1, 2$).

Из (1.14) следует, что при $-\infty < x_k < +\infty$ ($k = 1, 2$)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_1}^{x_1} \int_{-x_2}^{x_2} e^{iy_1 x_1 + iy_2 x_2} F(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Но тогда очевидно, что это представление сохранится и для всех z_1 и z_2 , т. е.

$$f(z_1, z_2) = \int_{-z_1}^{z_1} \int_{-z_2}^{z_2} e^{iy_1 z_1 + iy_2 z_2} \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

где $\varphi(y_1, y_2)$ удовлетворяет условию (1.5).

Теорема доказана.

§ 2. Оценки для целых функций двух переменных в пространстве L_2

Пусть $F(x)$ — произвольная функция, заданная на действительной оси. Для всякого $h > 0$ обозначим

$$\Delta_h(F) = \Delta_h(F; x) = F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (2.1)$$

$$\Delta_h^{(k)}(F) = \Delta_h(\Delta_h^{(k-1)}(F; x); x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1')$$

Для функций двух переменных обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(F) &= \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(F; x_1, x_2) = \\ &= \Delta_{h_2}^{(q)}\{\Delta_{h_1}^{(p)}(F; x_1); x_2\} = \Delta_{h_1}^{(p)}\{\Delta_{h_2}^{(q)}(F; x_2); x_1\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В дальнейшем нам необходимы следующие простейшие леммы:

Лемма 1. Если $0 < \beta < \frac{2\pi}{\sigma}$, то

$$\frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{\sin \frac{\sigma\beta}{2}} > \frac{u}{\sigma} \quad \text{при } 0 \leq u \leq \sigma. \quad (2.3)$$

Доказательство. Составим функцию

$$\varphi(u) = \frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{u} \quad 0 \leq u \leq \sigma, \quad 0 < \beta < \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Имеем

$$\varphi'(u) = \frac{\cos \frac{u\beta}{2}}{u^2} \left[\frac{u\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \right].$$

Если $0 \leq u \leq \frac{\pi}{\beta}$, то $0 \leq \frac{u\beta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\cos \frac{u\beta}{2} \geq 0$, $\operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \geq \frac{u\beta}{2}$, т. е. $\varphi'(u) \leq 0$.

Если $\frac{\pi}{\beta} \leq u \leq \sigma$, то $\frac{\pi}{2} \leq \frac{u\beta}{2} < \pi$, и, следовательно, $\cos \frac{u\beta}{2} \leq 0$, $\operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \leq 0$, т. е. опять $\varphi'(u) \leq 0$. Значит функция $\varphi(u)$ убывает на отрезке $[0, \sigma]$, откуда и следует утверждение (2.3) леммы 1.

Из (2.3) следует, что

$$\frac{\sin^2 \frac{u\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\sigma\beta}{2}} \geq \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{при} \quad -\sigma \leq u \leq \sigma \quad (2.3')$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(e^{ix_1 + ix_2}; x_1, x_2) = \\ = e^{ix_1 + ix_2} (2i)^{p+q} \sin^p \frac{h_1}{2} \sin^q \frac{h_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. По определениям (2.1), (2.1') и (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(e^{ix_1 + ix_2}; x_1, x_2) = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \{ \Delta_{h_2}^{(q)}(e^{ix_1 + ix_2}, x_2); x_1 \} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \{ \Delta_{h_2}^{(q-1)}[\Delta_{h_2}(e^{ix_1 + ix_2}, x_2); x_2]; x_1 \} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} \left[e^{ix_1 + ix_2 + i \frac{h_2}{2}} - e^{ix_1 + ix_2 - i \frac{h_2}{2}}; x_2 \right]; x_1 \right\} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} \left[e^{ix_1 + ix_2} \left(e^{i \frac{h_2}{2}} - e^{-i \frac{h_2}{2}} \right); x_2 \right]; x_1 \right\} = \\ = 2i \sin \frac{h_2}{2} \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)}[e^{ix_1 + ix_2}, x_2]; x_1 \right\}. \end{aligned}$$

Применяя этот процесс $p+q$ раз, получим требуемое равенство. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция из класса W_{σ_1, σ_2} . Тогда справедливы оценки:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2; \quad (2.5)$$

б) если $0 < \beta_k < \frac{2\pi}{\sigma_k}$ ($k=1, 2$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ \leq \frac{\sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q}}{2^{2(p+q)} \sin^{2p} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2; \quad (2.6)$$

в) если $0 < \beta_k \leq \frac{\pi}{\sigma_k}$ ($k = 1, 2$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ \leq 2^{2(p+q)} \sin^{2p} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2. \quad (2.7)$$

Доказательство. Так как по условию $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}$, то имеет место представление (1.4), откуда имеем

$$f(x_1, x_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (2.8)$$

при $-\infty < x_k < +\infty$ ($k = 1, 2$).

Из (2.8), с одной стороны, имеем:

$$\frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} (iu_1)^p (iu_2)^q \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (2.9)$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2) = \\ = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2}; x_1, x_2) \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} (2i)^{p+q} \sin^p \frac{u_1 \beta_1}{2} \sin^q \frac{u_2 \beta_2}{2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (2.10)$$

Из (2.8), (2.9) и (2.10) равенство Парсеваля дает

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2; \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} u_1^{2p} u_2^{2q} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 \quad (2.12)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\beta, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \\ & = 2^{2(p+q)} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \sin^{2p} \frac{u_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{u_2 \beta_2}{2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ & \leq \sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2. \end{aligned} \quad (2.12')$$

Неравенство (2.5) следует из (2.12') и (2.11).

Сравнивая (2.11) с (2.12) и имея в виду лемму 1, убеждаемся в справедливости неравенства (2.6).

Неравенство (2.6) вытекает из (2.10) и (2.12), если учесть, что при $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{\sigma}$ $\sin^2 \frac{\sigma \beta}{2} \geq \sin^2 \frac{u \beta}{2}$ ($-\sigma \leq u \leq \sigma$).

Заметим, что неравенство (2.5) можно доказать и опираясь на неравенства (2.6) и (2.7).

Аналогично определяя класс $W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ целых функций $f(z_1, \dots, z_n)$ n комплексных переменных и конечные разности

$$\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — целая функция из класса $W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$. Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq \\ & \leq \sigma_1^{2p_1} \sigma_2^{2p_2} \dots \sigma_n^{2p_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_1^{2p_1} \sigma_2^{2p_2} \dots \sigma_n^{2p_n}}{2^{2(p_1+p_2+\dots+p_n)} \sin^{2p_1} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2p_2} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2} \dots \sin^{2p_n} \frac{\sigma_n \beta_n}{2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.15)$$

при $0 \leq \beta_k < \frac{2\pi}{\sigma_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$

и

$$в') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 dx_2, \dots, dx_n \leq \\ \leq 2^{2(p_1+p_2+\dots+p_n)} \sin^{2p_1} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \dots \sin^{2p_n} \frac{\sigma_n \beta_n}{2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \quad (2.16)$$

при $0 \leq \beta_k \leq \frac{\pi}{\sigma_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$

Доказательства этих неравенств аналогичны доказательствам неравенств (2.5), (2.6) и (2.7), поэтому мы их опускаем.

Частный случай, когда $n = 1$, $p_1 = m$, дает следующую теорему:

Теорема 3'. Пусть $f(z)$ — целая функция из класса W_σ . Тогда справедливы неравенства:

$$а') \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx \leq \sigma^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx; \quad (2.17)$$

$$б') \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx \leq \frac{\sigma^{2m}}{2^{2m} \sin^{2m} \frac{\sigma \beta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_\beta^{(m)}(f; x)|^2 dx \quad (2.18)$$

при $0 \leq \beta < \frac{2\pi}{\sigma};$

и

$$в') \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_\beta^{(m)}(f; x)|^2 dx \leq 2^{2m} \sin^{2m} \frac{\sigma \beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (2.19)$$

при $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{\sigma}.$

Отметим, что аналогичные неинтегральные неравенства для тригонометрических сумм были получены С. Б. Стечкиным [2], из которых, с помощью предельного перехода, С. Н. Бернштейном [3] были получены такие же неравенства для целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 28 V 1956

Ի. Հ. Խաչատրյան

ՇԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՄՖՈՂՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ
ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԵՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ՀԱՏՎՈՒՅՑՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մ. Մ. Զրբաշյանի աշխատանքում [1] ուսումնասիրված էին ըստ առանձին փոփոխականների աճման տարրեր կարգ ու տիպ ունեցող շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների հատուկ դասեր: Մասնավորաբար, կատարված է Բորելի ձևափոխություն և ինտեգրալ ներկայացում այդ դասերի ֆունկցիաների համար:

Ներկա աշխատանքի § 1-ում այդ արդյունքների հիման վրա բերվում է Պալեյի և Վիների հայտնի թեորեմի ընդհանրացումը շատ փոփոխականներից կախված այն ամբողջ ֆունկցիաների համար, որոնց աճման կարգը ըստ բոլոր փոփոխականների հավասար է մեկի, իսկ տիպերը, ընդհանրապես առանց, կարող են տարրեր լինել:

§ 2-ում Պալեյի և Վիների ընդհանրացված թեորեմի հիման վրա բերվում են շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների մի քանի գնահատականներ L_2 տարածության մեջ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Զրբաշյան М. М. К теории некоторых классов целых функций многих переменных. Известия АН Армянской ССР, т. VIII, серия ФМЕТ наук, № 4, 1955.
2. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна. ДАН СССР, т. 60, № 9, 1948.
3. Бернштейн С. Н. Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени. ДАН СССР, т. 60, № 9, 1948.