

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. С. Саркисян

Изгиб призматического стержня двутаврового поперечного сечения

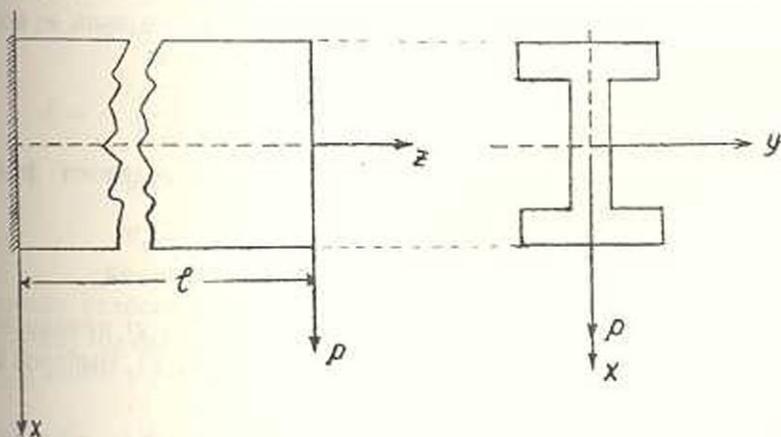
В работе приводится точное решение задачи Сен-Венана об изгибе призматического стержня двутаврового поперечного сечения.

При решении задачи использован метод введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1], с помощью которого решение дифференциального уравнения с частными производными задачи сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а постоянные интегрирования определяются из решения вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют напряжения в зависимости от геометрических параметров сечения. В конце работы приводится значение касательных напряжений для конкретного отношения геометрических параметров, и результаты сравниваются с результатами, полученными из формулы Журавского, для касательных напряжений, известных из курса сопротивления материалов.

§ 1. Постановка задачи

В работе рассматривается изгиб заделанного одним концом призматического стержня под действием силы P , приложенной к свободному концу стержня вдоль вертикальной оси симметрии поперечного сечения (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что из шести составляющих напряжений отличны от нуля только Z_x , X_z и Y_z , причем напряжение Z_x принимается равным

$$Z_x = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad (1.1)$$

где l — длина призматического стержня, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси y . При таких предположениях, как известно, функция напряжений $F(x, y)$ удовлетворяет в области поперечного сечения дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} y - \frac{P}{2I} f'(y), \quad (1.2)$$

и условию на контуре сечения

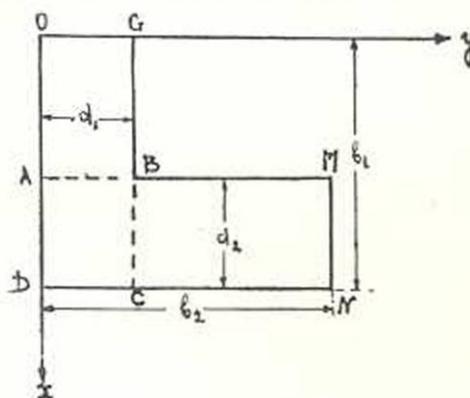
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds}, \quad (1.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $f(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению из условий на контуре, ds — элемент дуги контура.

Напряжения $X_z(x, y)$ и $Y_z(x, y)$ определяются соотношениями:

$$X_z(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)], \quad Y_z(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Ввиду симметричности области поперечного сечения, достаточно найти функцию $F(x, y)$ только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).



Фиг. 2.

Для распространения решения на всю область поперечного сечения на основании мембранной аналогии [4] требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция напряжений обратилась в нуль:

$$F(x, 0) = 0, \quad (1.5)$$

а вдоль горизонтальной оси симметрии обратилась в нуль ее нормальная производная:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)'_{x=0} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6) полностью определяют функцию напряжений $F(x, y)$ для рассматриваемой задачи.

§ 2. Введение вспомогательных функций

Полагаем, что в области ODCG функция $F(x, y)$ принимает значение $F_1(x, y)$, а в области ABMGND значение $F_2(x, y)$. Выберем здесь:

$$f(y) = b_1^2; \quad (2.1)$$

тогда из уравнений (1.3), (1.5) и (1.6) для функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ получим следующие граничные условия:

$$F_1(x, 0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_{x=0} = F_1(b_1, y) = 0,$$

$$F_1(x, d_1) = \begin{cases} -\frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2), & (0 \leq x \leq b_1 - d_2) \\ F_2(x, d_1) & (b_1 - d_2 \leq x \leq b_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$F_2(x, 0) = F_2(b_1, y) = F_2(x, b_2) = 0,$$

$$F_2[(b_1 - d_2), y] = \begin{cases} -\frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2), & (d_1 \leq y \leq b_2) \\ F_1[(b_1 - d_2), y] & (0 \leq y \leq d_1). \end{cases} \quad (2.3)$$

Ищем решения в виде:

$$F_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y), \quad (i = 1, 2), \quad (2.4)$$

где вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) существуют только в области ABCD и удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

и дополнительным условиям

$$\Phi_1[(b_1 - d_2), y] = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=b_1-d_2} = 0,$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_1} = 0, \quad (2.6)$$

а функции $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) существуют: $\Psi_1(x, y)$ — в области ODCG, $\Psi_2(x, y)$ — в области AMND и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} y. \quad (2.7)$$

Согласно (2.2) и (2.3), функции $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ подчинены следующим условиям:

$$\Psi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \Psi_1(b_1, y) + \Phi_1(b_1, y) = 0,$$

$$\Psi_1(x, d_1) = -\frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2), \quad (2.8)$$

$$\Psi_2(x, 0) = \Psi_2(x, b_2) = \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0,$$

$$\Psi_2[(b_1 - d_2), y] = -\frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2). \quad (2.9)$$

Граничные условия для определения функций $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ неоднородны; однако, следуя Г. А. Гринбергу [5], функции $\Psi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) ищем в виде рядов:

$$\Psi_i(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad (2.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x). \quad (2.11)$$

Тогда для функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) получим условия:

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_1[(b_1 - d_2), y] = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=b_1-d_2} = 0. \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, d_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_1) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) + \frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \\ \Phi_2(b_1, y) &= \Phi_2(x, d_2) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\Phi[(b_1 - d_2), y] = \sum_{k=1}^{\infty} i_k [(b_1 - d_2)] \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2).$$

Здесь также полагаем, что

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad (2.14)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x). \quad (2.15)$$

§ 3. Решение уравнений задачи

Из (2.10) имеем:

$$i_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_1} y dy. \quad (3.1)$$

Умножив уравнение (2.7) на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1}$ и интегрируя его по y от нуля до d_1 , для функции $\Psi_1(x, y)$ получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{d_1} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{P}{1} \frac{v}{1+v} y \right) \frac{2}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy &= i_k'(x) + \\ + \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy - \frac{2P}{1} \frac{v}{1+v} \frac{1}{d_1} \int_0^{d_1} y \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выполнив интегрирование и используя условия (2.8) и значения (3.1), получим:

$$\begin{aligned} i_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 i_k(x) &= \\ = (-1)^{k+1} \frac{P}{1} \frac{k\pi}{d_1^2} \left\{ [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) + 2 \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^2 \frac{v}{1+v} d_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогичным образом используя (2.5) — (2.15), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & v_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 v_k(y) = \\
 & = (-1)^{k+1} \frac{k\pi}{d_2^2} \frac{P}{l} \left\{ [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](y - b_2) + 2 \left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^2 \frac{\nu}{1 + \nu} y \right\} + \\
 & \quad + \frac{2}{k\pi} \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} y, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi_k^*(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \varphi_k(x) = \\
 & = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_1) \sin \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x) + \frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](d_1 - b_2) \right\}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & w_k^*(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 w_k(y) = \\
 & = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} f_p[(b_1 - d_2)] \sin \frac{p\pi}{d_1} y + \frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](y - b_2) \right\}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Общие решения уравнений (3.3) — (3.6) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & i_k(x) = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + \\
 & + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} \left\{ [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](d_1 - b_2) + 2 \left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2 \frac{\nu}{1 + \nu} d_1 \right\}, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v_k(y) = C_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} + D_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + \\
 & + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} \left\{ [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](y - b_2) + 2 \left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^2 \frac{\nu}{1 + \nu} y \right\} - \\
 & \quad - \frac{2d_2^2}{k^3\pi^3} \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} y, \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi_k(x) = M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{2kd_2^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1)}{(kd_2)^2 + (pd_1)^2} \sin \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x) + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2](d_1 - b_2), \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

$$w_k(y) = L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + (-1)^{k+1} \frac{2kd_1^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2 - (kd_2)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1-d_2)^2](y-b_2). \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных A_k , B_k , C_k , D_k , M_k , N_k , L_k и F_k согласно (2.8), (2.9), (2.12) и (2.13) получим следующие условия:

$$f'_k(0) = f_k(b_1) + \varphi_k(b_1) = 0 \quad (3.11)$$

$$v_k(b_2) = v_k(0) + w_k(0) = 0 \quad (3.12)$$

$$\varphi'_k[(b_1-d_2)] = \varphi_k[(b_1-d_2)] = 0 \quad (3.13)$$

$$w'_k(d_1) = w_k(d_1) = 0 \quad (3.14)$$

§ 4. Определение постоянных интегрирования

Исключая из значений (3.9), (3.10) неизвестные коэффициенты, посредством условий (3.13) и (3.14), получим:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(x) = & (-1)^{k+1} \frac{2kd_1^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1)}{(kd_2)^2 + (pd_1)^2} \sin \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x) + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p v_p(d_1)}{(kd_2)^2 + (pd_1)^2} + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1-d_2)^2] (d_1 - b_2) [1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2)], \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_k(y) = & (-1)^{k+1} \frac{2kd_1^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p[(b_2-d_2)]}{(pd_2)^2 + (kd_1)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \\
 & + (-1)^k \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - d_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2 + (kd_1)^2} + \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1-d_2)^2] \left[(y-b_2) - (d_1-b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y-d_1) \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{d_2}{(k\pi)^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y-d_1) \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1-d_2)^2]. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям (3.11) и (3.12) из (3.7), (3.8), (4.1) и (4.2), получим:

$$A_k = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
 B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} + (-1)^{k+1} \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p v_p(d_1)}{(k d_2)^2 + (p d_1)^2} + \\
 + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} + \\
 + (-1)^k \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} = 0
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
 C_k \operatorname{sh} \frac{k\pi b_2}{d_2} + D_k \operatorname{ch} \frac{k\pi b_2}{d_2} + (-1)^k \left(\frac{d_2}{k\pi} \right)^3 \frac{b_2}{d_2} \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} - \\
 - \left(\frac{d_2}{k\pi} \right)^3 \frac{b_2}{d_2} \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 D_k + (-1)^{k+1} \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p f_p[(b_1 - d_2)]}{(p d_2)^2 + (k d_1)^2} + \\
 + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
 + (-1)^{k+1} \frac{d_2}{(k\pi)^2} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Исключив из этих соотношений коэффициент C_k , мы получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 B_k = (-1)^k \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p v_p(d_1)}{(k d_2)^2 + (p d_1)^2} + \\
 + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b_2}{d_1} + \\
 + (-1)^{k+1} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \operatorname{sch} \frac{k\pi b_2}{d_1} \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu},
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 D_k = (-1)^k \frac{2d_1 d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p f_p[(b_1 - d_2)]}{(p d_2)^2 + (k d_1)^2} + \\
 + (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \\
 + (-1)^k \frac{d_2}{(k\pi)^2} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2},
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $f_k[(b_1 - d_2)]$ и $v_k(d_1)$ имеют значения:

$$f_k[(b_1 - d_2)] = B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) +$$

$$+ (-1)^k \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1+\nu}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} v_k(d_1) = & D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} + (-1)^k \frac{l}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) + \\ & + (-1)^{k+1} \left(\frac{d_2}{k\pi} \right)^3 \frac{2P}{l} \left[\frac{b_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \right] \left[1 + (-1)^{k+1} \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Введем обозначения:

$$B_k = (-1)^k \frac{2}{k\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} S_k, \quad (4.11)$$

$$D_k = (-1)^k \frac{2}{k\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} R_k. \quad (4.12)$$

Тогда, принимая во внимание (4.9) и (4.10), совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (4.7) и (4.8) приведем к виду:

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{kp} + \gamma_k \quad (4.13)$$

$$R_k = \sum_{p=1}^{\infty} S_p c_{kp} + \beta_k, \quad (4.14)$$

где введены обозначения:

$$a_{kp} = \frac{2k}{\pi} \frac{d_1 d_2}{(k d_2)^2 + (p d_1)^2} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi b_2}{d_2}, \quad (4.15)$$

$$c_{kp} = \frac{2k}{\pi} \frac{d_1 d_2}{(p d_2)^2 + (k d_1)^2} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k = & \frac{4P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{k}{\pi^3} \frac{d_1^3 b_2}{d_1} \sum_{p=1.3}^{\infty} \frac{1}{p^2 \{ (k d_2)^2 + (p d_1)^2 \}} \left[\frac{d_1}{b_2} - \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \right] - \\ & - \frac{P}{2l} \frac{d_1}{k\pi d_2} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) - \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^3}{(k\pi)^2} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\beta_k = \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{k}{\pi^3} \frac{d_1^3}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 \{ (p d_2)^2 + (k d_1)^2 \}} + \frac{P}{2l} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] \frac{b_2 d_2}{k\pi d_1} \quad (4.18)$$

(4.13) и (4.14) могут быть написаны в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_j + B_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.19)$$

Для этого нужно положить

$$\begin{aligned} S_k &= Z_{2k-1}, \quad R_k = Z_{2k}, \\ A_{2n-1, 2m-1} &= 0, \quad A_{2n-1, 2m} = a_{kp}, \quad B_{2n-1} = \gamma_k, \\ A_{2n, 2m} &= 0, \quad A_{2n, 2m-1} = c_{kp}, \quad B_{2n} = \beta_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Заметим еще, что для всякого p имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \text{sh} \frac{p\pi}{d_2} (b_2 - d_1) \text{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \text{csh} \frac{p\pi b_2}{d_2} &= \text{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \left[\text{ch} \frac{p\pi d_1}{d_2} - \text{cth} \frac{p\pi b_2}{d_2} \text{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \right] \leq \\ &\leq \text{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \text{ch} \frac{p\pi d_1}{d_2} - \text{sh}^2 \frac{p\pi d_1}{d_2} = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sh} \frac{2p\pi d_1}{d_2} - \text{ch} \frac{2p\pi d_1}{d_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \exp \left(-\frac{2p\pi d_1}{d_2} \right) \right] \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \text{ch} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \text{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \text{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1} &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[-\frac{2p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \right] \right) \leq \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[-\frac{2\pi d_2}{d_1} (\mu - 1) \right] \right), \quad (4.23)$$

где μ — в случае двутаврового сечения — конечное число и удовлетворяет условию $b_1/d_2 = \mu > 1$.

Для случая $\nu = 2n - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leq \frac{k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_1 d_2}{(k d_2)^2 + (p d_1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{cth} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \frac{d_1}{k\pi d_2} \right] \leq \frac{1}{2}; \end{aligned} \quad (4.24)$$

для случая $\nu = 2n$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| \leq \frac{\gamma k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_1 d_2}{(p d_2)^2 + (k d_1)^2} = \\ &= \frac{\gamma}{2} \left[\text{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_1} \right] \leq \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

При этом использованы неравенства (4.24), (4.25) и

$$\operatorname{ch}x - \frac{1}{x} \leq 1 \text{ при } (0 \leq x \leq \infty). \quad (4.26)$$

Из неравенств (4.24) и (4.25) следует, что, в случае двутаврового сечения, для любых чисел ν сумма коэффициентов A_{vj} системы (4.19) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| \leq \frac{\gamma}{2} = 1 - \theta, \quad (4.27)$$

т. е. бесконечная система (4.19) оказывается вполне регулярной. Пользуясь теорией вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений [6], неизвестные Z , определим с любой точностью.

§ 5. Определение функций напряжений

Подставив значения функций $f_k(x)$, $v_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $w_k(y)$, выраженных через коэффициенты B_k и D_k в (2.4), получим функцию напряжений: Для области ABCD:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) + \varphi_k(x)] \sin \frac{k\pi y}{d_1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ B_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \right] + \right. \\ &+ (-1)^{k+1} \frac{d_1^3}{(k\pi)^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - 1 \right] + \\ &+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \left. \right\} + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_1) \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \sin \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x). \quad (5.1) \end{aligned}$$

Для области OABC:

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{P}{2I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (b_2 - d_1) \frac{y}{d_1} + \\ &+ \frac{P}{2I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^3}{3} \left(\frac{y^3}{d_1^3} - \frac{y}{d_1} \right). \quad (5.2) \end{aligned}$$

Для области ABCD:

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [v_k(y) + w_k(y)] \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) \left\{ D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{I} [L_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \right\} + \\
 &\quad + \frac{d_2^2}{\pi^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \right] + \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{I}_p [(b_1 - d_2)] \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - x) \operatorname{csh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \sin \frac{p\pi y}{d_1}. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Для области BCNM:

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) + \\
 &\quad + \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \right] \cdot \frac{d_2^2}{\pi^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} - \\
 &\quad - \frac{P}{2I} [b_1 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2) (b_1 - x) \frac{1}{d_2}. \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

При этом использованы значения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 + a^2} \sin kx = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}, \quad (0 \leq x < \pi) \quad (5.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \frac{x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi) \quad (5.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin kx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12} \quad (0 \leq x \leq \pi). \quad (5.7)$$

В частном случае, когда $d_1 = b_2 = b$, $b_1 = d_2 = a$, из (5.1) и (5.2) получим:

$$F(x, y) = \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^3}{\pi^3} \left[\frac{\pi^3}{12} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} \right]. \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) есть функция напряжений при изгибе призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, которая приводится в курсах теории упругости [7].

§ 6. Определение напряжений X_z и Y_z

Согласно (1.4) и (2.1) компоненты касательного напряжения определяются соотношениями:

$$X_z = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} (x^2 - b_1^2), \quad Y_z = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Пользуясь выражениями (5.1) — (5.4) функции напряжений, для X_z и Y_z получим следующие значения.

Для области OABG:

$$X_z = -\frac{P}{2J} (x^2 - b_1^2) + \frac{P}{2I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (b_2 - d_1) \frac{1}{d_1} + \frac{P}{2I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(y^2 - \frac{d_1^2}{3} \right) + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1}, \quad (6.2)$$

$$Y_z = -\frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1}. \quad (6.3)$$

Для области ABCD:

$$\begin{aligned} X_z = & -\frac{P}{2I} (x^2 - b_1^2) + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k B_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \right] \right\} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{d_1^3}{k^2 \pi^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - 1 \right] + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{1}{\pi} \frac{P}{I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \left\} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} p \nu_p(d_1) \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \sin \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x), \right. \quad (6.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z = & -\frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k B_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \right] + \right. \\
 & + (-1)^{k+1} \frac{d_1^2}{k^2 \pi^3} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1 + d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} + \\
 & \left. + (-1)^{k+1} \frac{1}{\pi} \frac{P}{1} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - b_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \right\} + \\
 & + \frac{\pi}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} p v_p(d_1) \cos \frac{p\pi}{d_2} (b_1 - x) \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi d_1}{d_2}. \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Для области BCNM:

$$\begin{aligned}
 X_z = & -\frac{P}{2I} (x^2 - b_1^2) - \frac{\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) - \\
 & - \frac{1}{\pi} \frac{P}{1} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (x - b_1) \frac{1}{d_2} + \frac{d_2^2}{\pi^3} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) - \\
 & - \frac{d_1 b_2}{\pi^2} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2}, \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z = & \frac{\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (d_1 - x) + \\
 & + \frac{d_2}{\pi^2} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{k\pi}{d_2} (b_1 - x) [y - b_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_2}{d_2}] - \\
 & - \frac{P}{2I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2) \frac{1}{d_2}. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

В области ABCD касательные напряжения определяются как формулами (6.4) и (6.5), так и формулой (5.3). Входящие в формулы (6.2)–(6.7) величины B_k , D_k и $v_k(d_1)$ определены соотношениями (4.10)–(4.12).

Все эти величины выражаются через коэффициенты S_k и R_k , последние же определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений (4.19). Формулами (6.2)–(6.7) определяются касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

В качестве примера рассмотрим толстостенные двутавровые балки, для которых отношения геометрических параметров сечения имеют следующие значения:

$$d_2/d_1 = 1,5, \quad b_1/d_1 = 4,5 \quad \text{и} \quad b_2/d_2 = 6,75. \quad (6.8)$$

Такие отношения геометрических параметров имеет двуглавая балка, составленная из четырех равнобоких угольников по ОСТ 16 [8]. Тогда для бесконечной системы уравнений (4.19) получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ij}| \leq \frac{\gamma}{2} = 1 - \theta, \text{ где } \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{2\pi d_2}{d_1} (\mu - 1) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6\pi}. \quad (6.9)$$

Вторым слагаемым правой части $\frac{1}{2} e^{-6\pi}$, ввиду малости, можно пренебречь.

$$\text{Тогда:} \quad \gamma = 1, \quad \theta = \frac{1}{2}. \quad (6.10)$$

Свободный член В. системы (4.19) удовлетворяет неравенству

$$B_i \leq \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,3183 \frac{\nu}{1+\nu} + 36,2575 \right). \quad (6.11)$$

Обозначим значения неизвестных Z_i с избытком через \bar{Z}_i , а значения с недостатком через \tilde{Z}_i .

Пользуясь теорией вполне регулярных систем [6] и применяя лимитанты, получим для Z_i следующие оценки:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,2074 \frac{\nu}{1+\nu} + 22,7969 \right) \leq \\ &\leq Z_1 \leq \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,2354 \frac{\nu}{1+\nu} + 24,9200 \right) = \bar{Z}_1, \\ \tilde{Z}_2 &= \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,0838 \frac{\nu}{1+\nu} + 40,4223 \right) \leq \\ &\leq Z_2 \leq \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,0913 \frac{\nu}{1+\nu} + 41,1124 \right) = \bar{Z}_2, \\ \tilde{Z}_3 &= \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,1445 \frac{\nu}{1+\nu} + 13,3060 \right) \leq \\ &\leq Z_3 \leq \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,1880 \frac{\nu}{1+\nu} + 18,2812 \right) = \bar{Z}_3, \\ \tilde{Z}_4 &= \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,0947 \frac{\nu}{1+\nu} + 22,9705 \right) \leq \\ &\leq Z_4 \leq \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,1042 \frac{\nu}{1+\nu} + 23,8926 \right) = \bar{Z}_4, \\ \tilde{Z}_5 &= \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0,1064 \frac{\nu}{1+\nu} + 9,6828 \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq Z_6 &\leq \frac{P}{2I} d_1^2 d_2 \left(0,1597 \frac{\nu}{1+\nu} + 15,6831 \right) + \bar{Z}_5, \\ \bar{Z}_6 &= \frac{P}{2I} d_1^2 d_2 \left(0,0854 \frac{\nu}{1+\nu} + 16,5214 \right) \leq \\ &\leq Z_6 \leq \frac{P}{2I} d_1^2 d_2 \left(0,0950 \frac{\nu}{1+\nu} + 17,4781 \right) + \bar{Z}_6, \\ 0 \leq Z_v &\leq \bar{Z}_v \leq \frac{P}{2I} d_1^2 d_2 \left(0,1663 \frac{\nu}{1+\nu} + 18,9448 \right), \\ &(\nu = 7, 8, 9 \dots). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Напряжения в долях $\frac{P}{2I} d_1 d_2$			$\nu = 0,16$	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,35$
в точке $x=0,$ $y=0$	$X_z(0, 0)$	с избытком с недостатком	81,9019 81,9049	81,8911 81,8911	81,8780 81,8780
	$Y_z(0, 0)$		0	0	0
	$X_z(0)$		81,9375	81,9375	81,9375
в точке $x=0,$ $y=d_1$	$X_z(0, d_1)$	с избытком с недостатком	82,008 82,006	82,083 82,0281	82,0546 82,0554
	$Y_z(0, d_1)$		0	0	0
	$X_z(0)$		81,9375	81,9375	81,9375
в точке $x=b_1-d_2,$ $y=0$	$X_z[(b_1-d_2), 0]$	с избытком с недостатком	63,0403 62,4161	63,0188 62,3452	62,9984 62,4750
	$Y_z[(b_1-d_2), 0]$		0	0	0
	$X_z^*(b_1-d_2)$	при $b(x) = 2b_2$ при $b(x) = 2d_1$	75,9375 7,4993	75,9375 7,4993	75,9375 7,4993
в точке $x=b_1,$ $y=d_1$	$X_z(b_1, d_1)$		0	0	0
	$Y_z(b_1, d_1)$	с избытком с недостатком	27,0402 22,0236	27,0884 22,0645	27,1344 22,1035
	$X_z(b_1)$		0	0	0
в точке $x=b_1-d_2,$ $y=b_2$	$X_z[(b_1-d_2), b_2]$		0	0	0
	$Y_z[(b_1-d_2), b_2]$		0	0	0
	$X_z^*(b_1-d_2)$	при $b(x) = 2b_2$ при $b(x) = 2d_1$	75,9375 7,4993	75,9375 7,4993	75,9375 7,4993

Принимая во внимание (4.20), (4.11), (4.12) и (6.12), определим значения коэффициентов B_k и D_k с избытком и с недостатком. Подставляя в (6.1) — (6.7) значения коэффициентов B_k и D_k с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений X_z и Y_z .

Некоторые значения напряжений X_z и Y_z приведены выше в таблице. В этой же таблице для сравнения приведены значения касательных напряжений $X_z^*(x)$, вычисленных по формуле Журавского (8)

$$X_z^*(x) = \frac{PS(s)}{lb(x)}, \quad (6.13)$$

где $S(x)$ — статический момент относительно оси y части площади сечения балки между уровнем x и краем балки, $b(x)$ — ширина сечения балки на уровне x .

Из таблицы и из формул (6.2) — (6.7) видно: 1) что касательное напряжение свое наибольшее значение получает на горизонтальной оси симметрии поперечного сечения, именно в точках пересечения этой оси со стенками двутавра; 2) как показывают проделанные вычисления согласно (6.2), (6.4) и (6.6), формула Журавского (6.13) дает хорошие результаты, близкие к точному, только для точек стенки двутавра, а для точек полки они достаточно отличаются от истинного значения; 3) на вертикальной оси симметрии и на боковых сторонах полки двутавра горизонтальный компонент касательного напряжения $\{Y_z\}$ равен нулю; 4) влияние коэффициента Пуассона ν на значение касательных напряжений небольшое и для практических целей им можно пренебречь.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 23 IX 1955

Մ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿՏԱՎՐԱՅԻՆ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՋՈՂԻ ԾՈՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է պրիզմատիկ ձողի վերաբերյալ Սեն-Վենանի խնդրի ճշգրիտ լուծումը երկատվրային հատվածք ունեցող ձողի համար: Խնդրի լուծման բնթացքում օգտագործված է Ն. Ս. Հարությանյանի օժանդակ ֆունկցիաների մտնման եղանակը, որի միջոցով մասնակի ամանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերված է հաստատուն գործակիցներով գծային շարք կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինտեգրման հաստատունների որոշումը՝ լիովին սեղույթը գծային անվերջ հավասարումների սխեմի լուծման:

Շոշափող լարումների որոշման համար ստացված են հատվածքի երկրաչափական պարամետրները պարունակող բանաձևեր: Մասնավոր դեպքում ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակում և համեմատվում են նյութերի դիմադրությունը ստացվող արդյունքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948.
2. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
3. Абрамян Б. Л. Изгиб призматического стержня с крестообразным поперечным сечением. Известия АН Армянской ССР, т. IV, № 5, 1951.
4. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, ГТТИ, 1934.
5. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
6. Кантарович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
7. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
8. Бедяев Н. М. Сопротивление материалов. Гостехиздат, 1951.