ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

К теории однолистных функций

1. Пусть E ограниченная замкнутая совокупность с односвязным дополнением E_∞.

Отобразим конформно E_∞ на $|w|>1$, функцией

$$w=\varphi(z), \quad \varphi(\infty)=\infty, \quad \varphi'(\infty)>0.$$

Обратная относительно $w=\varphi(z)$ функция

$$z=\psi(w)=\tau w+a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots,$$

где τ — емкость или постоянная Робена совокупности E.

$$G(x, y)=\lg|\varphi(z)|$$

есть функция Грина области E_∞.

В дальнейшем нам нужны будут два неравенства искажения при отображении $w=\varphi(z)$ (Г. Фабер [1]), которые, ради удобства, приводим сейчас.

I. В любой точке w, $|w|>1$,

$$|\psi'(w)|\leqslant\frac{\tau|w|^2}{|w|^2-1}. \tag{1}$$

II. Если Γ_ρ и $\Gamma_{\rho'}$, соответственно, две линии уровня функции Грина

$$G(x, y)=\lg\rho, \quad G(x, y)=\lg\rho', \quad \rho'>\rho,$$

а $K(\rho, \rho')$ — расстояние между ними, то

$$K(\rho, \rho')\geqslant\tau(\rho'-\rho)\left(1-\frac{1}{\rho\rho'}\right). \tag{2}$$

2. Возьмем произвольную спрямляемую замкнутую кривую L, охватывающую совокупность E.

Пусть

$$|z|\leqslant d+d_0$$

есть круг минимального радиуса, покрывающий L, а

$$|z|\leqslant d$$

некоторый концентрический с ним круг, покрывающий E.

Доказываем следующие две теоремы*.

Теорема 1. Линия уровня

$$G(z) = \text{пост.} = \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{3}$$

лежит внутри L, *а также внутри любой линии уровня*

$$G(z) = G(z_1),$$

проходящей через произвольную точку z_1 *кривой* L.

В равенстве (3) s — *дуговая координата точек на* L, $\rho(s)$ — *расстояние переменной на* L *точки до* E.

Коэффициент-единицу при интеграле, вообще говоря, нельзя заменить числом меньше $\frac{\pi}{4}$.

Теорема 2. Если z_1 и z_2 *произвольные точки на* L, *то*

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| \geqslant c \cdot l \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \tag{4}$$

где l — *нижняя грань длин дуг, соединяющих* z_1 с z_2 *внутри* E_∞,

$$c = \frac{1}{4\pi + 2d_0} \cdot \lg \frac{d+d_0}{d}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1.

Пусть $|z| < d$ какой-либо круг, покрывающий E.

Оценим в какой-либо точке $A(z_1) \in E_\infty$, $|z_1| < d + d_0$ функцию Грина $G(x, y)$.

Для этого соединим внутри E_∞ точку A с произвольной точкой $B(z_2)$, $|z_2| = d + d_0$, $d_0 > 0$, спрямляемой дугой L_1. Пусть s — дуговое расстояние переменной на L_1 точки $z(s)$ от z_1, а $\rho(s)$ — расстояние $z(s)$ от E.

Считая начало координат временно расположенным в точке $z(s)$, представим гармоническую функцию $\lg|\varphi(z)|$ в круге $|z| < \rho(s)$ интегралом Пуассона

$$\lg|\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \lg|\varphi(z')| \frac{\rho^2(s) - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z|\cos(\theta - \theta') + |z|^2} d\theta',$$

где $$\theta' = \arg z', \quad \theta = \arg z, \quad |z'| = \rho(s).$$

Или

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} G(z') \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z|\cos(\theta - \theta') + |z|^2} d\theta'.$$

* Основной результат выражается неравенством (4). Равенство (3) имеет вспомогательный характер и доказано ранее [2].

Применим это равенство в точке $z(s+ds)$, бесконечно близкой к $z=0$.

Считая $|z|\sim ds$, получим

$$\frac{\partial G(z(s))}{\partial s}=\frac{2}{\rho(s)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}G(z')\cos(\theta-\theta')\,d\theta',$$

и так как $G(z)>0$, то

$$\left|\frac{\partial G}{\partial s}\right|\leqslant\frac{2}{\rho(s)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}G(z')\,d\theta'=2\,\frac{G(z(s))}{\rho(s)}.$$

Обозначив ради краткости

$$G(z(s))=G$$

получим:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial s}\right|\leqslant 2\frac{G}{\rho(s)}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial \lg G}{\partial s}\right|\leqslant\frac{2}{\rho(s)},$$

$$G(z_2)\,e^{-2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}\leqslant G(z_1)\leqslant G(z_2)\cdot e^{2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{6}$$

Но так как $G(z)$ гармонична в E_∞ и в точке $z=\infty$ обращается в ∞ как функция $\lg|z|$, и таким же свойством обладает функция

$$\lg\frac{|z|}{d},$$

то из принципа максимума следует

$$G(z_2)>\lg\frac{d+d_0}{d}.$$

Таким образом, окончательно

$$G(z_1)>\lg\frac{d+d_0}{d}\cdot e^{-2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{7}$$

Пусть теперь L произвольная замкнутая, спрямляемая кривая Жордана, охватывающая E и проходящая через точку z_1. Обозначим

$$d_0=\max|z|-d,\quad z\in L,$$

и пусть z_2 точка на L, для которой $|z_2|=d+d_0$.

Точки z_1 и z_2 разбивают L на две дуги L_1 и L_2.

Согласно (7)

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-2\int\limits_{L_1} \frac{ds}{\rho(s)}},$$

точно так же

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} e^{-2\int\limits_{L_0} \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Из этих двух неравенств вытекает также

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}, \tag{8}$$

где интеграл распространен по всей замкнутой кривой L.

Из оценки (8) следует, что линия уровня

$$G(z) = \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}$$

лежит внутри L, а также всевозможных линий уровней

$$G(z) = G(z_1),$$

проходящих через любые точки z_1, кривой L_1.

Это и есть первая часть утверждения теоремы 1.

Что в неравенстве (3) в общем случае нельзя заменить коэффициент-единицу, при интеграле, числом меньше $\frac{\pi}{4}$, доказано в статье ([2], замечание на стр. 19).

Из (8) следует

$$|\varphi(z)| \geqslant \exp\left\{ \lg \frac{d+d_0}{d} \exp\left[-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)} \right] \right\}$$

для любых $z \in L$.

Если обозначить через z и w точки, связанные соотношением $w = \varphi(z)$, то из предыдущего неравенства, в силу

$$e^x - 1 \geqslant x, \text{ при } x \geqslant 0,$$

следует:

$$|w| - 1 \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{9}$$

Этим неравенством оценивается снизу расстояние образа точки z — точки w, от окружности $|w| = 1$. Здесь L произвольная замкнутая, спрямляемая кривая, проходящая через точку z и охватывающая E. Значения d и d_0 уже указаны.

Доказательство теоремы 2. Пусть теперь z_1 и z_2 произвольные точки на L.

Оценим снизу $|w_2-w_1|$, где

$$w_1=\varphi(z_1),\quad w_2=\varphi(z_2).$$

Согласно (9), точки w_1 и w_2 лежат в области

$$|w|>1+\lg\frac{d+d_0}{d}\,e^{-\int\limits_L\frac{ds}{\rho(s)}}.$$

В этой области, согласно (1),

$$|\psi'(w)|\leqslant\frac{\tau|w|^2}{2(|w|-1)}<\frac{\tau|w|^2\cdot e^{\int\limits_L\frac{ds}{\rho(s)}}}{2\lg\frac{d+d_0}{d}}. \tag{10}$$

С другой стороны, принимая в (2) $\rho=1$ и $\rho'=|w|$, получим

$$k(1,|w|)\geqslant\frac{\tau(|w|^2-1)}{|w|},$$

и так как образы точек w_1 и w_2 лежат на кривой L, то, очевидно,

$$k(1,|w|)\leqslant d_0.$$

Поэтому на дуге $\overset{*}{L}$, представляющей отображение L на w-плоскости,

$$\frac{\tau(|w|^2-1)}{|w|}<d_0.$$

Отсюда

$$|w|<\frac{1}{2}\left\{2+\frac{d_0}{\tau}+\sqrt{\left(2+\frac{d_0}{\tau}\right)^2-4}\right\}$$

или проще

$$|w|<2+\frac{d_0}{\tau}. \tag{11}$$

Итак, $\overset{*}{L}$ лежит в кольце

$$1+\lg\frac{d+d_0}{d}\cdot e^{-\int\limits_L\frac{ds}{\rho(s)}}<|w|<2+\frac{d_0}{\tau}. \tag{12}$$

Обозначим кратчайшее расстояние между w_1 и w_2 в кольце (12) через $\delta(w_1;\,w_2)$.

Из геометрических соображений

$$|w_2-w_1|\geqslant\frac{1}{4}\,\delta(w_1;\,w_2). \tag{13}$$

Проведем в кольце (12) кратчайшую дугу, соединяющую w_1 с w_2. Обозначим ее через β^*.

Образ дуги β^* на z-плоскости будет некоторая дуга β, соединяющая z_1 с z_2.

Тогда

$$\delta(w_1;\ w_2) = \int\limits_{\beta} |\varphi'(z)| \cdot |dz|. \tag{14}$$

Но из (10)—(11) следует, что на β^*

$$|\psi'(w)| < \frac{\tau|w|^2}{2(|w|-1)} < \frac{\tau\left(2+\frac{d_0}{\tau}\right)}{2\lg\frac{d+d_0}{d}} \cdot e^{\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}},$$

т. е. на β

$$|\varphi'(z)| \geqslant \frac{2\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0} \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Поэтому

$$\delta(w_1; w_2) \geqslant \frac{2\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0} \cdot l \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}},$$

где l — нижняя грань расстояний между z_1 и z_2 в области E_∞.

Наконец,

$$|w_2-w_1| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0} \cdot l \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Это и есть неравенство (4).

Теорема 1 содержит, в частности, оценку $G(z)$, вытекающую из известного неравенства М. А. Лаврентьева [3] в теории однолистных функций. Это можно доказать, проведя через z_1 и z_2 специальным образом подобранную кривую L (ср. [2], стр. 5—7).

Оценку функции Грина типа (3) можно получить и в пространстве трех и более измерений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 18 V 1956

Ա. Լ. Շահինյան

ՄԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք E-ն z հարթության մի փակ և սահմանափակ բազմություն է միակապ լրացումով (E_∞)։ *Արտապատկերենք* E_∞*-ը* $|w| > 1$ *տիրույթի վրա*

$$w=\varphi(z), \qquad \varphi(\infty)=\infty, \qquad \varphi'(\infty)>0$$

ֆունկցիայի միջոցով։

Ներկա հոդվածում գնահատվում է վարից $|w_2-w_1|$ տարբերությունը, որտեղ

$$w_1=\varphi(z_1), \qquad w_2=\varphi(z_2)$$

ֆիքս z_1, z_2 կետերի համար և E-ի մասին որոշ տվյալների առկայության պայմաններում։

Դիցուք $|z|\leqslant d$-ն E-ն ծածկող մի շրջան է, L-ը E-ն շրջապատող որևէ ուղղելի գիծ, իսկ

$$|z|\leqslant d+d_0$$

L-ը ընդգրկող նվազագույն շրջանը։

Այդ դեպքում L-ի վրա գտնվող որևէ z_1 և z_2 կետերին համապատասխանող w_1 և w_2 կետերի համար տեղի ունի 4-րդ անհավասարությունը։ Այդ արտահայտության մեջ τ-ն E բազմության Ռոբենի հաստատունն է, l-ը, z_1 և z_2 կետերը միացնող և E_∞-ի մեջ գտնվող աղեղների երկարությունների ստորին կոպարը, իսկ $\rho(s)$-ը L-ի վրա փոփոխական կետի հեռավորությունը E-ից։

Առաջին թեորեմը պարունակում է, մասնավորապես, Մ. Ա. Լավրենտևի հայտնի գնահատականից G(z)-ի մասին բխող գնահատականը։ Այդ բանն ապացուցվում է ընտրելով z_1 և z_2 կետերով անցնող համապատասխան L կորը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faber G.* Über Potentialtheorie und Konforme Abbildung (Stzbr. d. Bayer Ak. d. Wiss 1920, Jahrgang, München, 1921).
2. *Шагинян А. Л.* О скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. VIII, 1955.
3. *Лаврентьев М. А.* О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях. ДАН СССР, 4, 1936, стр. 207—210.