ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 5, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ФИЗИКА

М. Л. Тер-Микаелян

О методе прицельных параметров

§ 1. Введение

Задачи квантовой электродинамики, решаемые стандартными методами теории возмущений, нередко требуют утомительных вычислений. Благодаря этому широкое распространение получил простой приближенный метод расчета, предложенный Ферми [1] и детально развитый Вильямсом [2]. В настоящей статье мы расематриваем применение этого метода к вопросам тормозного излучения. Этому вопросу посвящена известная работа Вейцзекера [3], от которой наши расчеты отличаются в следующих пунктах:

1) из последней следует, что логарифмическая неточность поперечника излучения на кулоновом центре является следствием как математических приближений (упрощенное представление спектра кулонова поля), так и произвольности в выборе параметра обрезания. Мы показываем, что если пользоваться точным спектром кулонового поля, то можно подобрать такой параметр обрезания, чтобы результат совпадал с точной формулой;

2) использование найденного параметра обрезания для вычисления поперечника излучения в поле атома приводит, естественно, к точной квантовомеханической формуле;

3) рассмотрен вопрос об излучении мягких квантов. Мы приводим простой вывод поперечника излучения мягких квантов, который охватывает также инфракрасную область частот, т. е. ту область частот, где несправедливы как расчеты, основанные на теории возмущений, так и расчеты Вейцзекера;

4) в ряде работ требуется знание распределения излученных фотонов по углам. Интегрирование формулы Бете — Гайтлера по углам вылета электрона требует кропотливых расчетов. Очень просто, однако, получить практически точную формулу в рамках метода прицельных параметров;

5) мы приводим простой вывод формулы для поперечника рождения пары, а также для углового распределения рожденных частиц.

§ 2. Излучение релятивистского электрона на кулоновом центре

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося вдоль оси x с начальной скоростью $\vec{v}$. Потенциал ядра в точке нахождения электрона равен

$$\varphi = \frac{Ze}{r} \tag{1}$$

Разложим φ в тройной интеграл Фурье

$$\varphi = \frac{A_4}{i} = \int \varphi_k \, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad \text{где } d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$$

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi Ze}{k^2} \tag{2}$$

Перейдем в систему координат покоящегося электрона. Преобразование совершается с помощью матрицы Лоренца.

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & -\dfrac{iv}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{iv}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}$$

Все величины в новой системе координат будем обозначать штрихованными символами. После преобразования потенциалы даются следующими выражениями:

$$A_x' = \frac{Zev}{2\pi^2 c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \int \frac{e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$\varphi' = \frac{Ze}{2\pi^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \int \frac{e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k} \tag{3}$$

Используя (3), найдем электрическое и магнитное поля

$$E_x' = -\frac{iZe}{2\pi^2} \int \frac{e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} k_1 d\vec{k}$$

$$E'_y = -\frac{iZe}{2\pi^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int \frac{k_2}{k^2} e^{i(k_2 y + k_3 z)} e^{\frac{ik_1(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$E'_z = -\frac{iZe}{2\pi^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int \frac{k_3}{k^2} e^{i(k_2 y + k_3 z)} e^{\frac{ik_1(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$H'_x = 0$$

$$H'_y = \frac{v}{c} E'_z$$

$$H'_z = \frac{v}{c} E'_y$$

Из последних выражений непосредственно следует, что при $v \to c$ можно пренебречь компонентой электрического поля вдоль движения по сравнению с E'_y и E'_z, а также считать, что $H'_y = E'_z$ и $H'_z = E'_y$. Тогда электромагнитное поле быстро движущегося ядра приобретает свойства электромагнитной волны, и (3) можно рассматривать как разложение по плоским волнам с частотой $\frac{k_1 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Найдем поток энергии через единицу поверхности в точке нахождения электрона за все время пролета ядра:

$$S = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{|E_y|^2 + |E_z|^2\right\}dt = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{|E_{y\omega}|^2 + |E_{z\omega}|^2\right\}d\omega \tag{4}$$

Чтобы привести наши расчеты в соответствие с квантовой электродинамикой, необходимо вместо одного электрона рассматривать целый пучек электронов, движущихся на различных прицельных расстояниях от ядра. Фактически это сводится к интегрированию выражения (4) по всем возможным значениям y и z. Мы должны заметить, что при значениях параметра удара

$$\rho = \sqrt{z^2 + y^2} \sim \frac{h}{mc} = \lambda^*$$

уже нельзя пренебрегать чисто квантовыми эффектами, в частности нельзя выбрать систему координат, где электрон покоится, а ядро движется на расстоянии $\rho \sim \lambda$, поскольку из-за соотношения неопределенности неопределенность импульса электрона будет порядка mc.

---

* h обозначает постоянную Планка, деленную на 2π; λ — соответствующая комптоновская длина волны электрона.

Мы, однако проинтегрируем выражение (4) по всем возможным прицельным параметрам, но будем считать, что окончательный результат, если его рассматривать как функцию k_2 и k_3, является правильным только в интервале значений $|k_2|$ и $|k_3|$ от нуля до значений порядка $\frac{mc}{h}$. Физически это означает, что классический метод расчета дает правильный результат только при излучении таких квантов, при которых ядру передается импульс в направлении, перпендикулярном первоначальному движению электрона, меньший или порядка mc.

Интегрируя выражение (4), мы получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S dydz = \frac{Z^2e^2}{2\pi^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2^2+k_3^2}{k^4}d\vec{k} = \frac{Z^2e^2}{\pi^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2dk_3\int_0^{\infty}\frac{k_2^2+k_3^2}{k^4}dk_1$$

Если мы разделим поток энергии в интервале k_1, $k_1+\Delta k_1$ на энергию псевдокванта, равную $\frac{hk_1v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, то получим полное число псевдоквантов в интервале k_1, k_1+dk_1

$$n_{k_1}dk_1 = \frac{Z^2e^2}{hc}\frac{1}{\pi^2}\int\int\frac{k_2^2+k_3^2}{k_1k_4}dk_2dk_3dk_1 \tag{5}$$

Поток псевдоквантов с различными значениями круговой частоты $\nu_k = \frac{ck_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ *независимо* друг от друга рассеивается на электроне (это является следствием применимости теории возмущений, см. также § 4). Ясно, что рассеянные псевдокванты в системе покоя электрона есть не что иное, как тормозные кванты в системе покоящегося ядра. Поперечник тормозного излучения мы получим, если умножим число псевдоквантов с частотой от ν_k до $\nu_k+\Delta\nu_k$ на поперечник рассеяния (формулу Клейна — Нишина) и преобразуем все величины в полученной таким образом формуле к лабораторной системе. Поперечник рассеяния на свободном электроне равен (мы отвлекаемся здесь и в дальнейшем от вопросов поляризации)

$$d\Phi = \frac{r_0^2d\Omega}{2}\frac{\nu_k'^2}{\nu_k^2}\left(\frac{\nu_k}{\nu_k'}+\frac{\nu_k'}{\nu_k}-\sin^2\theta'\right) \tag{6}$$

где ν_k и ν_k' частота падающего и рассеянного под углом θ' псевдокванта. Частоты связаны соотношением Комптона

$$\frac{h}{mc^2}\nu_k = \frac{\nu_k'}{\frac{mc^2}{h} - \nu_k'(1-\cos\theta')} \tag{7}$$

Для перехода в лабораторную систему координат необходимо воспользоваться преобразованием Лоренца, тогда

$$\nu = \frac{\nu_k'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

где ν есть круговая частота излученного кванта. В нашем распоряжении имеется четыре переменные ν_k, ν_k', ν, θ' с двумя соотношениями (7) и (8). Поскольку полный поперечник тормозного излучения может зависеть только от частоты излученного кванта ν, то мы выразим ν_k' и θ' согласно (7) и (8) через ν и ν_k и проинтегрируем полученную формулу по частотам кулонового поля ν_k. Соотношения (7) и (8) накладывают ограничение на интервал значений ν_k, которые создают кванты с частотой ν. Вводя обозначение $\varepsilon = \frac{h\nu}{E_0}$, где E_0 — начальная энергия электрона, мы получим, учитывая соотношения (7) и (8),

$$\cos\theta' = \frac{1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\nu_k}\frac{mc^2}{h}}{\frac{v}{c} - \varepsilon} \tag{9}$$

условие $\cos\theta' \geqslant -1$ приводит к соотношению*

$$k_1 > k_{1\,min} = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}\frac{mc}{2h}\left(\frac{mc^2}{E_0}\right) \tag{9^1}$$

условие $\cos\theta \leqslant 1$ дает

$$k_1 \leqslant k_{1\,max} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{mc}{h} \tag{9^2}$$

Формула Клейна—Нишины в переменных ε, $\nu_k = \frac{ck_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ принимает следующий вид:

$$d\Phi = \pi r_0^2\left[\frac{1}{1-\varepsilon} + 1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon mc\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\varepsilon)hk_1} + \right.$$

* Мы рассматриваем излучение квантов, удовлетворяющих условию $\varepsilon \lesssim \frac{v}{c}$.

$$+\varepsilon\left(\frac{mc\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\hbar k_1(1-\varepsilon)}\right)^2\Bigg]\frac{mc\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\hbar k_1}d\varepsilon \tag{10}$$

Учитывая (5. 9, 10). мы получим поперечник тормозного излучения

$$d\sigma(\varepsilon)=\int\limits_{k_1 min}^{k_1 max} n_{k_1}d\Phi dk_1=\frac{Z^2r_0^2}{137}\frac{d\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\pi\lambda}\int dk_2\int dk_3\int\limits_{k_1 min}^{k_1 max}dk_1\frac{k_2^2+k_3^2}{(k_1^2+k_2^2+k_3^2)^2k_1^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1-\varepsilon}+1-\varepsilon-\frac{2\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1(1-\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^2k_1^2(1-\varepsilon)^2}\right\} \tag{11}$$

Введем новую переменную $k_2^2+k_3^2=k^2$, тогда результат интегрирования есть

$$2\pi\int\limits_0^{\frac{a}{\lambda}}dk\int\limits_{k_1 min}^{k_1 max}\frac{k^3dk_1}{(k_1^2+k^2)^2k_1^2}\left\{\frac{1}{1-\varepsilon}+(1-\varepsilon)-\frac{2\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1(1-\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^2k_1^2(1-\varepsilon)^2}\right\}=$$

$$=4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\left(\varepsilon^2+\frac{4}{3}(1-\varepsilon)\right)\log\frac{2a(1-\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\left(\varepsilon^2+\frac{4}{3}(1-\varepsilon)\right)-\frac{1-\varepsilon}{9}\right\} \tag{11^1}$$

Если мы теперь положим

$$\log a=1+\frac{1-\varepsilon}{9}\frac{1}{\varepsilon^2+\frac{4}{3}(1-\varepsilon)} \tag{12}$$

то формула (11) перепишется

$$d\sigma(\varepsilon)=4\frac{r_0^2Z^2}{137}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\left\{\left(\varepsilon^2+\frac{4}{3}(1-\varepsilon)\right)\left(\log\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{13}$$

что совпадает с точной квантовомеханической формулой (при условии $E_0\gg mc^2$).

§ 3. Излучение в поле атома

Попытаемся теперь использовать предыдущие рассуждения для получения поперечника тормозного излучения в поле атома. Рассмотрим прежде всего излучение на ядре, точнее ту часть излучения на атоме, при которой волновые функции электронов не изменяются. В этом случае влияние атомных электронов на излучение сводится к экранирующему действию кулонового поля ядра. Экранировку очень просто ввести в предыдущие расчеты, заменив потенциал (1) на $\varphi = \frac{Ze}{r} e^{-\frac{r}{R}}$ где $R = R_0 Z^{-\frac{1}{3}}$, а R_0 — боровский радиус. Полное число квантов в интервале k_1, $k_1 + \Delta k_1$ примет вместо (5) вид

$$n_{k_1} = \frac{Z^2 e^2}{hc} \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_0^{\frac{mc}{h}}\int \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1 \left(k^2 + \frac{1}{R_2} \right)^2} dk_2 dk_3 dk_1. \tag{14}$$

Дальнейшие расчеты соответствуют предыдущему параграфу. Используя для a приведенное выше значение, мы, очевидно, должны прийти к точным формулам. Это следует из того, что обрезание происходит на расстояниях порядка λ, в то время как экранировка действует на расстояниях порядка $137\lambda Z^{-\frac{1}{3}}$. В частности, в случае полной экранировки, когда $k_{1\min} R = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \frac{137 Z^{-\frac{1}{3}}}{2} \frac{mc^2}{E_0} \ll 1$ (15)

мы приходим к формуле

$$d\sigma(\varepsilon) = 4 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3}(1-\varepsilon) \right) \left(\log 137 Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\varepsilon}{9} \right\} \tag{16}$$

Аналогичную формулу можно получить и квантовомеханическим путем [4], используя для экранирующего действия электронов не модель Томаса — Ферми, а простой экспоненциальный множитель (это сводится к замене в квантовомеханических формулах величины $\log 183 Z^{-\frac{1}{3}}$ на $\left(\log 137 Z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right)$.

Следует отметить, что учет второго слагаемого параметра обрезания (12) приводит в формулах (13) и (16) к исчезновению или появлению члена $\frac{1-\varepsilon}{9}$, который составляет всего несколько процентов от основного. С другой стороны, учет упрощенной экспоненциальной экранировки приводит к погрешности порядка 6%. Последнюю погрешность можно избежать, если подобрать радиус экранировки [4], который дает лучшее приближение к модели Томаса — Ферми. Это сводится к тому, что вместо $\frac{R}{\lambda} = 137 Z^{-\frac{1}{3}}$ необходимо принять, что $\frac{R}{\lambda} = 108 Z^{-\frac{1}{3}}$.

Во избежание недоразумений мы отметим, что при интегрировании формулы (11^1) по k_1 мы приняли, что основной вклад в интеграл вносит область вблизи нижнего предела. Справедливость этого допущения легко усмотреть из структуры интеграла (11^1), а также структуры аналогичного выражения для экранированного поля. Наши соотношения останутся правильными, если $k_{1\min} \ll k_{1\max}$.

Последнее неравенство всегда имеет место, так как согласно (9^1) и (9^2) оно сводится к условию $4(1-\varepsilon) \gg \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$, что всегда выполняется при $E_0 \gg \frac{mc^2}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)}}$.

В дальнейшем мы будем пренебрегать вторым слагаемым в параметре обрезания, а также пользоваться упрощенной экранировкой.

Помимо излучения на ядре, необходимо учитывать также излучение на атомных электронах. Вопрос этот до сих пор, ввиду его сложности, не рассмотрен методами квантовой электродинамики. Однако из качественного рассмотрения с помощью метода прицельных параметров можно видеть, что все отличие от случая излучения на ядре сводится (помимо того, что следует положить $Z = 1$) к тому, что логарифм в формулах (16) и (13) должен быть несколько изменен. Это следует, во-первых, из того факта, что близкие параметры удара (порядка λ), дающие логарифмический вклад в поперечник излучения, требуют учета отдачи первоначально покоившегося электрона (этот эффект рассчитан Г. М. Гарибяном [5]), во-вторых, при больших параметрах удара необходимо учитывать связь электрона с атомом. Последняя не полностью эквивалентна соответствующему эффекту экранировки для ядра, поскольку, как это хорошо известно (например, из теории ионизационных потерь), атомные электроны могут поглощать энергию, а значит проводить к рассеянию и излучению, и при пролетах частицы на расстояниях, значительно превышающих атомные. Полуколичественная оценка показывает, однако, что и этот второй эффект приводит лишь к незначительному изменению формул (16) и (13).

Ввиду отсутствия точных расчетов, можно с хорошей точностью учесть излучение на атомных электронах тем, что в формулах (16) и (13) заменить Z^2 на $Z(Z+1)$.

§ 4. Излучение мягких квантов

Рассмотрим инфракрасную катастрофу в рамках метода прицельных параметров. Формулы (16) и (13) становятся неприменимыми при $\frac{e^2}{\hbar c}\ln\frac{E_0}{\hbar\omega} \sim 1$ [5]. При выполнении последнего условия вероятность излучения становится сравнимой с вероятностью упругого рассеяния. Это указывает на неприменимость теории возмущений. Метод, использованный при выводе формул (16) и (13), также неприменим, поскольку и он предполагает справедливость теории возмущений. Это предположение необходимо в методе прицельных параметров, поскольку мы пользуемся формулой теории возмущений — формулой Клейна — Нишины. (При выводе ее необходимо предложить малость взаимодействия). Правда, формулу для рассеяния мягких квантов можно вывести и не предполагая применимости теории возмущений (формула Томсона), однако и этот последний вывод становится несправедливым для очень мягких квантов, поскольку он пренебрегает действием магнитного поля. Точная формула рассеяния квантов произвольной частоты на электроне нам неизвестна, однако если бы мы и имели нужную формулу, все равно метод прицельных параметров был бы неприменим. Дело в том, что этот метод, помимо всего прочего, предполагает независимость действия отдельных компонентов спектра кулонового поля ядра. Легко, однако, заметить, что если нужно учитывать действие магнитного поля на поведение электрона (или неприменима теория возмущений), то тогда различные компоненты кулонового поля быстро движущегося ядра не могут считаться независимыми.

Благодаря этим обстоятельствам, для правильного вывода поперечника тормозного излучения инфракрасных квантов, нам необходимо несколько изменить метод расчета. Как мы увидим ниже, оказывается возможным очень простым способом получить поперечник излучения мягких квантов (который, очевидно, будет включать в себя и инфракрасную часть). Для вывода мы учтем тот факт, что при рассеянии (излучении) мягких квантов влиянием отдачи на движение электрона можно пренебречь. Тогда движение электрона определяется, всецело, равномерно и прямолинейно движущимся полем ядра. Если ядро пролетает на прицельном расстоянии ρ, то первоначально покоившийся электрон приобретает скорость в направлении, перпендикулярном направлению движения ядра, равную

$$\vec{v}_1 = \frac{2Ze^2}{mc\rho} \tag{17}$$

Отметим, что при $\rho \simeq \rho_{\min} \sim \lambda$ электрон остается нерелятивистским, что значительно упрощает все расчеты. Вычислим интенсивность излучения с частотой ν' при заданном движении электрона.

Фурье-компонента напряженности магнитного поля равна

$$\vec{H}'_{\nu'} = \frac{1}{2\pi}\int \vec{H}' e^{i\nu' t} dt$$

если $\nu' t \ll 1$ (18)

тогда $\vec{H}'_{\nu'} = \frac{1}{2\pi}\int \vec{H}' dt$; причем эффективны промежутки времени порядка времени столкновения $t_{эф} \approx \frac{\rho}{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Поскольку $\vec{H}' = -\frac{1}{c}[\dot{\vec{A}}'\vec{n}]$, где

$\vec{n}$ — направление излучения, а векторный потенциал дается формулой

$$\vec{A}' = \frac{e\vec{v}_1}{cR_0} \tag{19}$$

то

$$\vec{H}'_{\nu'} = \frac{1}{2\pi c}[\vec{A}\vec{n}] = \frac{e}{2\pi c^2 R_0}[\vec{v}_1\vec{n}] \tag{20}$$

Полное количество излученной энергии в интервале частот ν'; $\nu'+d\nu'$ в телесный угол dO' есть:

$$dE'_{\vec{n}\nu'} = cR_0^2|H'_{\nu}|^2 dO' d\nu'$$

или, используя (20)

$$dE'_{\vec{n}\nu'} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{Z^2e^2}{\pi\rho^2 c}(1+\cos^2\theta')\sin\theta' d\theta' d\nu' \tag{21}$$

где θ' есть угол между направлением движения и направлением излучения. При выводе (20) мы попутно усреднили поперечник по всем возможным отклонениям электрона в плоскости, перпендикулярной движению ядра $\left(\text{т. е. заменили } \overline{\sin^2(n v_1)} = \frac{1+\cos^2\theta'}{2}\right)$.

Для получения окончательной формулы необходимо перейти в лабораторную систему координат. Формулу (21) легко преобразовать к новой системе координат, учитывая, что dE'_{ν} преобразуется, как четвертая компонента импульса, и принимая во внимание также формулу (8). Мы получим после преобразования (при $v \approx c$)

$$dE_{\nu} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{Z^2e^2}{\pi\rho^2 c} d\nu(1+\cos^2\theta')\sin\theta' d\theta' \tag{22}$$

интегрируя по всем θ', приходим к формуле

$$dE_{\nu} = \frac{8}{3} Z^2 r_0^2 \frac{e^2}{\pi\rho^2 c} d\nu \tag{23}$$

Из условия (18) и (8) мы получим, что

$$\rho \ll \rho_{max} = \frac{2c}{\nu\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Умножим формулу (22) на $2\pi\rho d\rho$ и проинтегрируем по ρ от $\rho_{min} \approx \approx \frac{h}{mc}$ до ρ_{max}. Тогда мы получим с логарифмической точностью ($k \sim 1$)

$$dE_{\nu} = \frac{16}{3}\frac{Z^2 r_0^2 e^2}{c} \log k \frac{2c}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\nu\lambda} d\nu \tag{24}$$

При полной экранировке, т. е. когда

$$\rho_{max} \gg R_0 Z^{-\frac{1}{3}}$$

мы имеем
$$dE_\nu = \frac{16}{3}\frac{Z^2 r_0^2 e^2}{c}\log k 137 Z^{-\frac{1}{3}} d\nu \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) применимы при излучении квантов, удовлетворяющих условию (18), которое в лабораторной системе можно переписать $\nu < \frac{2c}{\bar{\rho}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$, где $\bar{\rho}$ некоторый средний параметр удара, заключенный между ρ_{min} и ρ_{max}.

§ 5. Угловое распределение фотонов

В предыдущих параграфах мы интересовались полным поперечником тормозного излучения. Перейдем теперь к угловому распределению излученных фотонов. Покажем, что угловое распределение можно очень просто получить, исходя из работы Вейцзекера. Число псевдофотонов, проходящих через единицу поверхности в точке расположения электрона за все время пролета ядра, дается согласно Вейцзекеру следующим выражением (напомним, что штрихованные величины относятся к системе, где электрон покоится):

$$F_{\nu_k} d\nu_k = F_{\alpha_0'} d\alpha_0' = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 \rho^2 \lambda} d\alpha_0' \text{ при } \alpha_0' \ll \frac{\lambda}{\rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$F_{\alpha_0'} d\alpha_0' = 0$ при $\alpha_0' \gg \frac{\lambda}{\rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где $\alpha_0' = \frac{h\nu_k'}{mc^2}$; $\alpha' = \frac{h\nu_k'}{mc^2}$. Формула Клейна — Нишины в переменных α_0', α' имеет вид:

$$d\Phi = \frac{r_0^2}{2}\frac{\alpha'^2}{\alpha_0'^2}\left(\frac{\alpha_0'}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha_0'} - \sin^2\theta'\right) d\Omega'$$

Здесь θ' — угол между падающим и рассеянным псевдоквантом.

Число рассеянных псевдоквантов есть

$$d\sigma = F_{\alpha_0'} d\alpha_0' d\Phi = \frac{r_0^2}{\pi\rho^2}\frac{Z^2 e^2}{hc}\frac{\alpha'^2}{\alpha_0'^2}\left(\frac{\alpha_0'}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha_0'} - \sin^2\theta'\right)\frac{d\alpha_0'}{\alpha_0'}\sin\theta' d\theta'$$

Чтобы получить поперечник для углового распределения тормозных квантов, нужно преобразовать эту формулу в лабораторную систему и проинтегрировать по параметрам столкновения. Вводя обозначение для угла θ между направлением излучения и первоначальным направлением движения $\theta = x\frac{mc^2}{E}$, получим

$$d\sigma = 4\,\frac{r_0^2 Z^2}{137}\,\frac{d\nu}{\nu}\,x\,dx\left[\frac{E_0^2+E^2}{(1+x^2)^2E_0^2}-\frac{4x^2E}{E_0(1+x^2)^4}\right]\begin{cases}2\log k\dfrac{2EE_0}{mc^2h\nu}\\[2ex] 2\log k137Z^{-\frac{1}{3}}\end{cases} \tag{26}$$

где $k \sim 1$.

Если мы ту же задачу рассмотрим с помощью переменных k_1, k_2, k_3 и за максимальное значение параметра $\sqrt{k_2^2+k_3^2}$ возьмем такое, что для него $\left[\log\dfrac{h\sqrt{k_2^2+k_3^2}}{mc}\right]_{\min}=1$, то придем к следующей формуле:

$$d\sigma = 4\,\frac{r_0^2Z^2}{137}\,\frac{d\nu}{\nu}\,x\,dx\left[\frac{E_0^2+E^2}{(1+x^2)^2E_0^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4x^2E}{E_0(1+x^2)^4}\right]\left\{\log\frac{1}{\dfrac{\lambda^2}{R^2}+\left[\dfrac{(1+x^2)h\nu mc^2}{2E_0E}\right]^2}+1\right\} \tag{27}$$

Член $\dfrac{1+x^2}{2E_0E}\,h\nu mc^2$, стоящий под логарифмом, есть минимальный импульс, передаваемый ядру при излучении фотона x. Точность формулы (27) составляет несколько процентов.

§ 6. Рождение электронно-позитронных пар

Исходя из предыдущих параграфов, можно получить приближенные формулы, описывающие процессы рождения электронно-позитронных пар, а также угловое их распределение. Дело в том, что формулу (11) (а также соответствующую формулу с учетом экранирующего действия электронов) можно рассматривать как некоторое приближение к точной квантомеханической формуле; три независимые переменные k_1, k_2, k_3 соответствуют трем угловым переменным в известной формуле Бете — Гайтлера. Учитывая эту аналогию, формулы для рождения пар можно просто получить, умножив поперечник (11) на величину $\dfrac{E_-^2\,dE_+}{(h\nu)^2d(h\nu)}$, где E_+ и E_-, соответственно, энергия позитрона и электрона. Тогда вместо (11) мы получим

$$d\sigma = \frac{Z^2r_0^2}{137}\,\frac{1}{\pi}\iiint\frac{k_2^2+k_3^2}{k_1^2\left(k^2+\dfrac{1}{R^2}\right)^2}\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\lambda}\left[\frac{1}{1-\varepsilon}+1-\varepsilon-\right.$$

$$\left.-\frac{2\varepsilon\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1(1-\varepsilon)}+\varepsilon^2\,\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^2k_1^2(1-\varepsilon)^2}\right]\frac{dE_+}{E_-\varepsilon^2}\,d\vec{k} \tag{28}$$

В последней формуле мы учли также экранировку. Интегрирование по $\vec{k}$ проводится в тех же пределах, что и при выводе формул (13) и (16). Если мы учтем, что

$$\varepsilon^2 + \frac{4}{3}(1-\varepsilon) = \frac{E_-^2 + E_+^2}{E_-^2} + \frac{2}{3}\frac{E_+}{E_-}$$

и проинтегрируем по k, то получим полный поперечник рождения пары электрон-позитрон квантом с энергией $h\nu$ и энергией позитрона в интервале E_+; $E_+ + dE_+$.

$$d\sigma = 4\frac{Z^2 r_0^2}{137}\frac{E_+E_-}{(h\nu)^2}dE_+\left[\frac{2}{3} + \frac{E_-^2 + E_+^2}{E_- E_+}\right]\begin{cases}\log\frac{2E_+E_-}{h\nu mc^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\frac{E_+}{E_-} & (29)\\ \log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} & (29^1)\end{cases}$$

Параметр обрезания мы брали упрощенный, равный $\log\frac{a}{\lambda} = \log\frac{e^*}{\lambda}$; экранировку брали такую, что $\frac{R}{\lambda} = 137Z^{-\frac{1}{3}}$, поэтому и формулы (29), (29[1]) имеют точность несколько процентов.

Если формулу (28) мы проинтегрируем по k_2 и k_3, а k_1 выразим через угол между квантом и электроном, то получим поперечник рождения электрона в направлении, составляющем угол $\theta_- = x\frac{mc^2}{E}$ с первоначальным направлением фотона. Формула имеет следующий вид:

$$d\sigma = 8\frac{r_0^2 Z^2}{137}\frac{dE_+E_-^2}{(E_+ + E_-)^3}xdx\times$$

$$\times\left[\frac{E_+^2 + E_-^2}{(1+x^2)^2E_-^2} + \frac{4x^2E_+}{E_-(1+x^2)^4}\right]\begin{cases}\log\frac{2E_+E_-}{(1+x^2)h\nu mc^2} + \frac{1}{2} & (30)\\ \log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} & (30^1)\end{cases}$$

Формулы (29), (29[1]), (30) и (30[1]), а также (27), могут быть использованы для практических расчетов, в которых не требуется большой точности.

В заключение я хотел бы поблагодарить Е. Л. Фейнберга за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Институт физики АН Армянской ССР Поступило 13 XI 1955

---

* Здесь e—основание натуральных логарифмов.

Մ. Լ. Տեր-Միքայելյան

ԲԱԽՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ տրված է բախման պարամետրների մեթոդի մաթեմատիկական նոր մեկնաբանություն։ Այդ նոր մեթոդի օգնությամբ ուսումնասիրված են էլեկտրոնի կուլոնյան ուժական կենտրոնի վրա արգելակման ճառագայթման երևույթի զանազան հարցերը։ Բացի այդ, ստացված է էլեկտրոն-պոզիտրոն զույգերի ծնման էֆեկտիվ լայնական կտրվածքի բանաձևը։ Քննարկված է նաև փոքր էներգիայի քվանտների ճառագայթման հարցը։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ферми*. Zeits, f. Phys. 29, 315, 1924.
2. *Вильямс*. Det. Kgl. Danske, Videnskab Selskab Mat. fys. Medd Kobenhavn, 13, 276, 1935.
3. *Вейцзекер*. Zeits. f. Phys. 88, 612, 1934.
4. *Бете*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 30, 524, 1934.
5. *Ахиезер, Берестецкий*. Квантовая электродинамика. Гостехиздат. М., 1953.