

О. М. Сапонджян

Изгиб заземленной пластинки под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга

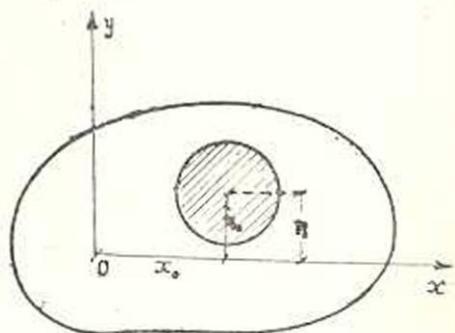
В работе решена, методом Мусхелишвили [1], задача об изгибе заземленной тонкой пластинки при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, в предположении, что область пластинки конформно отображается на область единичного круга с помощью полинома. Решение представлено в виде степенных рядов по степеням комплексной координаты единичного круга. В случае, когда начало координат совпадает с центром нагруженного круга, а также в случае действия в произвольной точке сосредоточенной силы, указанные ряды превращаются в полиномы, степени которых не выше степени полинома отображающей функции.

§ 1. Общее выражение прогиба при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга

Этот случай нагружения рассмотрел Гершгорин [2], полагая известным решение при действии сосредоточенной силы. Такой же прием применил Лурье [3]. Задачи об изгибе пластинки при действии указанной нагрузки можно решить не используя решения для случая действия сосредоточенной силы. Это сделано в работах [4, 5, 6]. Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей работе, последний способ более эффективен.

При действии на пластинку нагрузки, равномерно распределенной по площади круга радиусом r_0 и с центром в точке x_0, y_0 (см. фигуру) прогиб, согласно [4], представляется в виде: для замкнутой области нагруженного круга

$$w = w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] + \Phi_0(x, y) \quad (1.1)$$



для замкнутой ненагруженной области пластинки

$$w = w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r + \Phi_0 \quad (1.2)$$

где D — жесткость, P — равнодействующая нагрузки, $\Phi_0(x, y)$ — бигармоническая функция, регулярная во всей области пластинки,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Формулу (1.2) напомним в следующем виде:

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) G + \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi_0$$

где $G(x, y; x_0, y_0)$ — функция Грина.

Так как гармоническая функция $\ln r - G$ регулярна во всей области пластинки, то бигармоническая функция

$$\Phi = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi_0$$

также будет регулярной в той же области. В силу этого формулы (1.1) и (1.2) могут быть представлены в следующем виде, удобном для применений:

$$w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] - \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi \quad (1.3)$$

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) G + \Phi \quad (1.4)$$

Заметим, что если в (1.4) принять $P = \text{const}$, $r_0 = 0$, получим известное выражение для прогиба при действии в точке x_0, y_0 сосредоточенной силы P [7]

$$w = \frac{P}{8\pi D} r^2 G + \Phi \quad (1.5)$$

Для того, чтобы придать явный вид функции Грина, конформно отобразим с помощью функции

$$z = \omega(\zeta), \text{ при } \omega(0) = 0 \quad (1.6)$$

область единичного круга плоскости комплексного переменного $\zeta = re^{i\theta}$ в область пластинки на плоскости $z = x + iy$. Тогда функция Грина представляется формулой [8]

$$G = \frac{1}{2} \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})} \quad (1.7)$$

где ζ_0 — точка в области единичного круга, соответствующая центру нагруженного круга, а $\bar{\zeta} = re^{-i\theta}$. Внося (1.7) в (1.4), имея в виду при этом, что

$$r^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)]$$

$$\Phi = \bar{z}\varphi_0(z) + z\bar{\varphi}_0(\bar{z}) + \chi_0(z) + \bar{\chi}_0(\bar{z}) =$$

$$= \bar{\omega}(\bar{\zeta})\bar{\varphi}(\zeta) + \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \quad (1.8)$$

где

$$\bar{z} = x - iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

получаем

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{P}{16\pi D} \left\{ [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] + \right. \\ & \left. + \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)(1 - \zeta_0\bar{\zeta})} + \bar{\omega}(\bar{\zeta})\bar{\varphi}(\zeta) + \right. \\ & \left. + \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \right\} \quad (1.9) \end{aligned}$$

Аналитические функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ определяются из контурных условий пластинки.

§ 2. Случай защемленной пластинки

Для этого случая контурные условия будут [6]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

причем первое из них необходимо для определения только одного постоянного параметра. Примем, что область нагруженного круга целиком принадлежит области пластинки. Тогда контурным условиям должен удовлетворить прогиб w_1 . Поэтому в (2.1) надо внести выражение (1.9). Предварительно найдем производное этого выражения по z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial z} = & \frac{1}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})} \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta} = \frac{P}{16\pi D} \left\{ \frac{(1 - \beta_0^2)[\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)]}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})(\zeta - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)} + \right. \\ & \left. + [\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)(1 - \zeta_0\bar{\zeta})} + \frac{r_0^2(1 - \beta_0^2)}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})(\zeta - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)} \right\} + \\ & + \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \frac{\chi(\zeta)}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})} \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\beta_0^2 = \zeta_0\bar{\zeta}_0$, а штрихами обозначены производные. Обозначим значение ζ на окружности единичного круга через t ($t = e^{i\theta}$). Тогда, внося (1.9) и (2.2) в (2.1) и имея в виду, что на контуре функция Грина обращается в нуль, получаем следующие контурные условия для защемленной пластинки, при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга:

$$\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \bar{\varphi}(t) + \omega(t) \bar{\varphi} \left(\frac{1}{t} \right) + \chi(t) + \bar{\chi} \left(\frac{1}{t} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{\omega}(t)} \varphi(t) + \frac{\chi(t)}{\bar{\omega}(t)} = \\ & = \frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\zeta_0) \right]}{t\bar{\omega}(t)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \\ & - \frac{P(1-\rho_0^2)r_0^2}{32\pi D} \frac{1}{t\bar{\omega}(t)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, что взамен уравнения (2.4) можно использовать также его сопряженное, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)} \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\chi\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)} = \\ & = \frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\zeta_0) \right]}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \\ & - \frac{P(1-\rho_0^2)r_0^2}{32\pi D} \frac{t}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Мусхелишвили показал [1], что условия (2.5) или (2.4) вполне определяет функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$, если, в случае конечной области, учитывать также условия определенности функции $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi(0)}{\bar{\omega}(0)} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Имея в виду сложность выражения правой части уравнения (2.5), мы несколько видоизменяем способ определения функции $\varphi(\zeta)$, предложенный Мусхелишвили. Вместо того, чтобы умножить обе части (2.5) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-\zeta}$$

мы умножим на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta}$$

и, как у Мухелишвили, интегрируем результат по окружности (γ) единичного круга. Имея в виду при этом, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\dot{\chi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{1-\rho_0^2} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\dot{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)\dot{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} =$$

$$= -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} -$$

$$-\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0\zeta} \quad (2.7)$$

Из этого уравнения мы должны определить функции $\varphi(\zeta)$. После этого легко можно определить функцию $\chi(\zeta)$. Для этого умножаем обе части уравнения (2.4) на

$$\frac{1}{2\pi i} \omega(t) \frac{dt}{t-\zeta}$$

и интегрируем по γ . Учитывая при этом, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \chi(t) \frac{dt}{t-\zeta} = \chi(\zeta)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{1-\rho_0^2} \frac{\bar{\zeta}_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}$$

получаем

$$\chi(\zeta) = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{t(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\text{Pr}_0^2 \bar{\zeta}_0}{32\pi D 1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \varphi(t)}{t - \zeta} dt - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t - \zeta} dt
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда определяем

$$\chi(\zeta) = \int_{\gamma} \chi(\zeta) d\zeta + b_0 \quad (2.9)$$

причем, согласно условию определенности функции $\chi(\zeta)$ $\text{Im}[\chi(0)] = 0$, b_0 будет действительным числом. Имея в виду это и внося (2.9) в условие (2.3), получаем

$$\begin{aligned}
 & \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \varphi(t) + \omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \int_0^1 \chi(\zeta) d\zeta + \\
 & + \int_0^1 \bar{\chi}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} + 2b_0 = 0
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Функции $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ регулярны в области единичного круга, поэтому их можно представить в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}
 \omega(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k \\
 \varphi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \\
 \chi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Внося значения этих функций в условие (2.10) и приравнявая сумму постоянных слагаемых нулю, получим для b_0

$$b_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (2.12)$$

Тогда, согласно (2.9), будем иметь

$$\chi(\zeta) = \int_{\gamma} \chi(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \zeta^k \quad (2.13)$$

Таким образом, если бы мы смогли из уравнения (2.7) определить функцию $\varphi(\zeta)$, то этим задача была бы полностью решена.

§ 3. Определение функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ в случае пластинки, область которой отображается на круг при помощи полинома

Пусть область пластинки отображается на область единичного круга с помощью полинома

$$z = \omega(\zeta) = c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n \quad (3.1)$$

Тогда, имея в виду также (2.11), находим

$$\frac{1}{t} \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \varphi(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n k c_k \bar{a}_{k+\lambda} \right) t^\lambda + \psi_1 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{t} \omega(t) \bar{\varphi} \left(\frac{1}{t} \right) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k \right) t^\lambda + \psi_2 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\omega(t) - \omega(\zeta_0)}{t - \zeta_0} = \sum_0^{n-1} \mu_k t^k, \quad \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)}{\frac{1}{t} - \bar{\zeta}_0} = \sum_0^{n-1} \frac{\mu_k}{t^k}$$

$$\frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{(t - \zeta_0) \left(\frac{1}{t} - \bar{\zeta}_0 \right)} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) t^\lambda + \psi_3 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.4)$$

где функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 голоморфны вне единичного круга и обращаются в нуль в бесконечности, а

$$\mu_k = \sum_{m=k+1}^n c_m \bar{\zeta}_0^{m-k-1} \quad (3.5)$$

Внося (3.2), (3.3) и (3.4) в (2.7) и имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi_k \left(\frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t - \zeta} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{\zeta}_0^\lambda \zeta^\lambda$$

получаем

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n k c_k \bar{a}_{k+\lambda} \right) \zeta^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k \right) \zeta^\lambda =$$

$$= -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \mu_{k-\lambda} \right) \zeta^\lambda - \\ - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{c}_0^\lambda \zeta^\lambda$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при ζ^λ , получаем

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} + \sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \mu_{k-\lambda} - \\ - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \bar{c}_0^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \bar{c}_0^\lambda, \quad \lambda = n, n+1, \dots \quad (3.7)$$

Решение бесконечной системы уравнений (3.7) ищем в виде

$$a_k = C \bar{c}_0^k, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (3.8)$$

где C — постоянное число.

Внося (3.8) в (3.7), определяем C

$$C = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{c}_0)}$$

Тогда (3.8) даст

$$a_k = -\frac{Pr_0^2 \bar{c}_0^{k-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{c}_0)}, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (3.9)$$

Пользуясь формулой (3.9), мы можем значительно упростить систему уравнений (3.6). Для этого первую сумму левой части уравнения (3.6) преобразуем так:

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = \sum_{k=1}^{n-\lambda} k \bar{c}_k a_{k+\lambda} + \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} \quad (3.10) \\ \lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Но, согласно (3.9)

$$\sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = -\frac{Pr_0^2 \bar{c}_0^{\lambda-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{c}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{c}_0^k \\ \lambda = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Поэтому из (3.10) получим

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = \sum_{k=1}^{n-\lambda} k \bar{c}_k a_{k+\lambda} - \frac{\text{Pr}_0^2 \bar{\zeta}_0^{\lambda-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^k$$

Внося этот результат в (3.6), получаем систему уравнений с неизвестными a_1, a_2, \dots, a_n .

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda} k (\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = - \frac{P(1-\beta_0^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\zeta}_0^{k-\lambda} - \frac{\text{Pr}_0^2 \bar{\zeta}_0^\lambda}{32\pi D} \left[1 - \frac{1}{\bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{k-1} \right] \quad (3.11)$$

$\lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$

К этим уравнениям надо присоединить второе условие из (2.6), которое согласно (2.11) и (3.1) приводится к уравнению

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

Таким образом, для определения a_1, a_2, \dots, a_n имеем уравнения (3.11) и (3.12). Первое уравнение из (3.11) и уравнение (3.12) являются действительными уравнениями, а остальные комплексными. Поэтому число действительных уравнений в (3.11) и (3.12) составляет $2n$. Эти уравнения содержат $2n$ действительных неизвестных α_k, β_k ($k=1, 2, \dots, n$), где $\alpha_k + i\beta_k = a_k$. Если уравнения (3.11) и (3.12) имеют решение, то из них находим a_k ($k=1, 2, \dots, n$). Остальные же коэффициенты a_{n+1}, a_{n+2}, \dots находим из рекуррентной формулы (3.9). Этим полностью определяется функция $\varphi(\zeta)$.

Выведем теперь формулу для функции $\chi(\zeta)$, полагая известными коэффициенты a_k . Согласно (2.11) и (3.1) имеем

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \varphi(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+2}^{n+\lambda+1} k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{-\lambda-1} a_k \right) t^\lambda + \psi_4\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+2}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda-1} \right) t^\lambda + \psi_5\left(\frac{1}{t}\right)$$

Внося эти результаты и (3.4) в (2.8), получаем

$$\chi(\zeta) = - \frac{P(1-\beta_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+1}^{n-1} \mu_k \bar{\zeta}_0^{k-\lambda-1} \right) \zeta^\lambda - \frac{\text{Pr}_0^2 \bar{\zeta}_0}{32\pi D} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0 \zeta} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+2}^{n+\lambda+1} k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{-\lambda-1} a_k \right) \zeta^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+2}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda-1} \right) \zeta^\lambda$$

Подставляя это выражение в (2.13), определяем $\chi(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \mu_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} + \frac{P\Gamma_0^2}{32\pi D} \ln(1-\bar{\zeta}_0\zeta) - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+1}^{n+\lambda+2} k \bar{c}_k \bar{a}_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_1^n (c_k a_k + c_k \bar{a}_k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заметим, что при использовании способа Мусхелишвили без указанного выше изменения вместо уравнений (3.11) и (3.9) получились бы уравнения

$$a_\lambda + \sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{a}_k b_{k+\lambda-1} = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} A_\lambda - \frac{P\Gamma_0^2}{32\pi D} \frac{\bar{\zeta}_0^{\lambda-1}}{\bar{w}(\bar{\zeta}_0)} \quad (3.11')$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, n$$

$$a_\lambda = -\frac{P\Gamma_0^2}{32\pi D} \frac{\bar{\zeta}_0^{\lambda-1}}{\bar{w}(\bar{\zeta}_0)}, \quad \lambda = n+1, n+2, \dots$$

Коэффициенты b_k и A_k определяются последовательными подстановками из следующих уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{c}_k b_{k+\lambda-1} = c_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{c}_k A_{k+\lambda-1} = \sum_{k=\lambda-1}^{n-1} \mu_k \mu_{k-\lambda+1}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

Таким образом, для решения (3.11') необходимо предварительно определить коэффициенты b_k и A_k , что в значительной мере усложняет вычисления при определении коэффициентов a_k из (3.11') по сравнению с вычислениями, необходимыми при определении тех же коэффициентов из (3.11).

§ 4. Случай, когда начало координат совпадает с центром нагруженного круга

В частных случаях совмещение начала координат с центром нагруженного круга может привести к значительному упрощению вычислений.

Для этого случая имеем

$$z_0 = \bar{z}_0 = 0, \quad \bar{\zeta}_0 = \bar{\zeta}_0 = 0 \quad (4.1)$$

Функция Грина, согласно (1.7), принимает значение

$$G = \frac{1}{2} \ln \bar{\zeta} = \ln r \quad (4.2)$$

Внося (4.2) в (1.3) и (1.4), получаем:

для замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] - \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{r}{\rho} + \Phi \quad (4.3)$$

для замкнутой не нагруженной области пластинки

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r + \Phi \quad (4.4)$$

где r — расстояние произвольной точки пластинки от начала координат, а Φ определяется согласно (1.8).

Приняв в (3.9) $\bar{\zeta}_0 = 0$, получим

$$a_k = 0, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (4.5)$$

Следовательно, функция $\varphi(\zeta)$ представляется полиномом

$$\varphi(\zeta) = \sum_1^n a_k \zeta^k$$

Коэффициенты a_k определяются по уравнениям (3.11) и (3.12), которые при $\bar{\zeta}_0 = \bar{\zeta}_0 = 0$ принимают вид

$$\sum_{k=1}^n k(\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{k=1}^n c_k \bar{c}_k - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \quad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda} k(\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{k=\lambda+1}^n c_k \bar{c}_{k-\lambda} \quad (4.7)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

Имея в виду (4.1), из (3.13) получаем

$$\chi(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} c_{k+\lambda} \bar{c}_{k-\lambda+1} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k \bar{c}_{k-\lambda} a_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\
 & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_1^n (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\chi(\zeta)$ представляется также полиномом.

Определим значение прогиба в центре нагруженного круга. Имея в виду, что

$$\ln \frac{r}{\rho} = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}}$$

получаем

$$\left(\ln \frac{r}{\rho} \right)_{\substack{r=0 \\ \rho=0}} = \frac{1}{2} \ln c_1 \bar{c}_1 \quad (4.9)$$

Приняв в (4.3) $r=0$, $\rho=0$ и учитывая (1.8), (4.6), (4.8) и (4.9), найдем значение прогиба в центре нагруженного круга

$$w_0(0, 0) = \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \left(2 \ln \frac{r_0^2}{c_1 \bar{c}_1} - 5 \right) - \sum_1^n (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (4.10)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе защемленной по контуру эллиптической пластинки при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, центр которого совпадает с центром эллипса. Совместим оси x, y с главными диагоналями эллипса и примем отношения полуосей $a:b = \sqrt{5}:3$. Тогда внутренняя область эллипса приближенно отображается на область единичного круга с помощью полинома [8]

$$z = \omega(\zeta) = C(\zeta + 0,12\zeta^3 + 0,03\zeta^5 + 0,01\zeta^7) \quad (4.11)$$

где $C = \frac{10}{9} b$

Внеся значения коэффициентов отображающей функции (4.1) в (4.7), получаем четыре уравнения с неизвестными a_1, a_3, a_5 и a_7 . Решая эти уравнения, получаем

$$a_1 = A \left(1,942929 C + 1,041860 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_3 = A \left(0,218177 C - 0,104096 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_5 = A \left(0,052561 C - 0,024383 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_7 = A \left(0,020571 C - 0,010419 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

где

$$A = - \frac{P}{64\pi D}$$

Таким образом,

$$\varphi(\zeta) = a_1 \zeta + a_3 \zeta^3 + a_5 \zeta^5 + a_7 \zeta^7$$

Из (4.8) получаем

$$\chi(\zeta) = b_0 + b_2 \zeta^2 + b_4 \zeta^4 + b_6 \zeta^6$$

где

$$b_0 = -A(1,970895 C^2 + 1,028533 r_0^2)$$

$$b_2 = 2A \sum_{k=1}^3 c_{2k-1} c_{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (2k+1)(c_{2k-1} a_{2k+1} + c_{2k+1} a_{2k-1})$$

$$b_4 = A \sum_{k=1}^2 c_{2k-1} c_{2k+3} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 (2k+3)(c_{2k-1} a_{2k+3} + c_{2k+3} a_{2k-1})$$

$$b_6 = \frac{2A}{3} c_1 c_7 - \frac{7}{6} (c_1 a_7 + c_7 a_1)$$

Таким образом, задача решена. Внося значение коэффициентов c_k и a_k в (4.10), найдем значение прогиба в центре нагруженного круга:

$$w_0(0, 0) = \frac{P}{16\pi D} \left(1,21660 b^2 - 0,84110 r_0^2 - r_0^2 \ln \frac{b}{r_0} \right) \quad (4.12)$$

Приняв в (4.12) $r_0 = 0$, получаем значение прогиба в центре эллиптической пластинки при действии в той же точке силы P

$$w_0(0, 0) = 1,21660 \frac{Pb^2}{16\pi D}$$

Точное решение [6] показывает, что погрешность найденного значения прогиба менее чем $0,4\%$.

§ 5. Случай действия сосредоточенной силы

Внося (1.7) и (1.8) в (1.5), получаем выражение прогиба пластинки при действии в точке x_0, y_0 сосредоточенной силы P :

$$w = \frac{P}{16\pi D} [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)] [\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})} + \bar{\omega}(\bar{\zeta})\varphi(\zeta) + \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \quad (5.1)$$

В случае защемленной пластинки, когда ее область отображается на единичный круг с помощью полинома (3.1), функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ определяются по результатам § 3, если принять в них $r_0 = 0$. Тогда из (3.8) получаем

$$a_k = 0, \text{ при } k = n + 1, n + 2, \dots \quad (5.2)$$

Следовательно, $\varphi(\zeta)$ представляется полиномом

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k \quad (5.3)$$

Коэффициенты a_k при $k = 1, 2, \dots, n$ определяем по уравнениям (3.11) и (3.12), приняв в них $r_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda} k(\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \quad (5.4)$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$$

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

причем μ_k согласно (3.5).

Далее, полагая в (3.13) $r_0 = 0$ и имея в виду (5.2), получаем для функции $\chi(\zeta)$

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k \bar{c}_{k-\lambda} \bar{a}_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_1^n \left(\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, в случае действия сосредоточенной силы функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ представляются полиномами. Когда начало координат совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы, т. е. когда $r_0 = 0$, из (3.5) получаем

$$\mu_k = c_{k+1}$$

и благодаря этому, в частных случаях, вычисления в значительной мере упрощаются.

Օ. Մ. Մապոնճյան

ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՊԼԱՍՏԻՆԿԱՅԻ ԾՌՈՒՄԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՎՐԱ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌԻ ԱՉԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՍ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում Մուսխիլիշվիլու մեթոդով լուծված է եզրագծով ամրակցված բարակ պլաստինկայի ծաման խնդիրը, երբ արտաքին բևեռ նախատարաչափ բաշխված է պլաստինկայի հիմքերից մեկի մակերևույթի մասի վրա, որն իրենից ներկայացնում է շրջան: Խնդիրը լուծված է այն ենթադրությամբ, որ պլաստինկայի միջին շաբթույթյան տիրույթը կոնֆորմորեն օրտոպատկերվում է միավոր շրջանի տիրույթի վրա պլաննումի միջոցով: Խնդրի լուծումը ներկայացված է աստիճանային շաբթերի միջոցով, որոնք գտնվում են բոլոր միավոր շրջանի կոմպլեքս կոորդինատի աստիճաններին: Երբ կոորդինատների սկզբնակիտը համասեղվում է բևեռավորված շրջանի կենտրոնի հետ, նաև այն դեպքում, երբ պլաստինկայի կամայական կետում կիրառված է կենտրոնացած ուժ, վերոհիշյալ շաբթերը փոխարինվում են պլաննումներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, Ленинград, 1935.
2. Гершгорин С. А. Об изгибе пластинок нагрузками, распределенными по площади круга. Прикладная математика и механика, т. 1, в. 2, 1933.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление, Ленинград, 1938.
4. Сапонджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.
5. Сапонджян О. М. Изгиб свободно опертой полигональной плиты. Известия Академии наук Армянской ССР, т. V, № 2, 1952.
6. Сапонджян О. М. Изгиб эллиптической плиты. Известия Академии наук Армянской ССР, т. VII, № 5, 1954.
7. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных перекрытий, Москва, 1915.
8. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, Ленинград, 1949.