ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 5, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

К теории обобщенных интегральных преобразований функций многих переменных

Введение

В работе М. М. Джрбашяна [1] была построена теория прямых и обратных интегральных преобразований с ядрами вида $e^{-z^{\rho}}$ и $E_{\rho}(z;\mu)$ в классе L_2, где $E_{\rho}(z;\mu)$ целая функция, определяемая рядом Тейлора вида

$$E_{\rho}(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\quad\left(\rho\geqslant\frac{1}{2};\ 0<\mu<+\infty\right)$$

Используя поведение таких преобразований в комплексной области, им был построен интегральный аппарат, являющийся естественным обобщением интеграла Фурье, для представления функций, принадлежащих к классу L_2 на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат. Полученный аппарат позволил доказать, что для произвольной конечной системы лучей $\{L\}$, исходящих из одной точки комплексной плоскости, можно построить целые функции нормального типа и определенного порядка $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, сходящиеся в среднем к заданной функции, принадлежащей к классу L_2 на $\{L\}$.

В вышеуказанной работе, в частности, были доказаны следующие предложения.

Теорема 1. Пусть $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$. *Для любой функции* $g(y)$ *из класса* $g(y)y^{\mu-1}\subset L_2(0,+\infty)$ *формула*

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}g(y)y^{\mu-1}dy$$

определяет почти всюду функции $f^{(+)}(x)$ *и* $f^{(-)}(x)$, *принадлежащие к классу* $L_2(0,+\infty)$. *Двойственная формула*

$$g(y)y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^{\mu}\int_0^{\infty}E_{\rho}\left(x^{1/\rho}y^{1/\rho}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+1\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)dx\right]+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\left[y^{\mu}\int_0^{\infty}E_{\rho}\left(x^{1/\rho}y^{1/\rho}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+1\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)dx\right]\right\}$$

также имеет место почти всюду на $(0, \infty)$, *при этом имеет место формула Парсеваля:*

$$\int_0^{\infty}|g(y)|^2y^{2\mu-2}dy=\rho\int_0^{\infty}|f^{(+)}(x)|^2dx+\rho\int_0^{\infty}|f^{(-)}(x)|^2dx$$

Теорема 2. Для любой функции $f(x)\subset L_2(0,+\infty)$ *формула*

$$g^{(\pm)}(y)y^{\mu-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^{\mu}\int_0^{\infty}E_{\rho}\left(x^{1/\rho}y^{1/\rho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\mu+1\right)x^{\mu-1}f(x)dx\right\}$$

где $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$, *определяет почти всюду на* $(0,+\infty)$ *функции* $g^{(\pm)}(y)y^{\mu-1}$, *принадлежащие к классу* $L_2(0,+\infty)$. *Двойственная формула*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g^{(+)}(y)y^{\mu-1}dy+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\frac{e^{ixy}-1}{iy}g^{(-)}(y)y^{\mu-1}dy\right\}$$

тоже имеет место почти всюду на $(0,+\infty)$; *кроме того, существуют постоянные* $M_1>0$ *и* $M_2>0$, *не зависящие от* $g^{(\pm)}(y)$ *и* $f(x)$, *такие, что*

$$\int_0^{\infty}|g^{(\pm)}(y)|^2y^{2\mu-2}dy\leqslant M_1\int_0^{\infty}|f(x)|^2dx$$

и

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2dx\leqslant M_2\left\{\int_0^{\infty}|g^{(+)}(y)|^2y^{2\mu-2}dy+\int_0^{\infty}|g^{(-)}(y)|^2y^{2\mu-2}dy\right\}$$

Теорема 3. Для любой функции g(y) *из класса*

$$g(y)y^{\mu-1}\subset L_2(0,+\infty),\ \text{если } \rho\geqslant\frac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho},$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\infty\Bigg|g(y)-e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{1/\rho}y^{1/\rho}e^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)dx-$$

$$-e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{1/\rho}y^{1/\rho}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)dx\Bigg|^2y^{2\mu-2}dy=0$$

где, как и в теореме 1,

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}g(y)y^{\mu-1}dy$$

Теорема 4. Пусть $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$. *Если* $g_1(y)$ *произвольная функция из класса*

$$\int_0^\infty|g_1(y)|^2y^{2\mu\rho-\rho-1}dy<+\infty$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{e^{\pm ixy^\rho}-1}{\pm iy^\rho}g_1(y)y^{\mu\rho-1}dy$$

принадлежат к классу $L_2(0,+\infty)$. *Целые функции порядка* ρ *и типа* $\sigma>0$, *определяемые по формуле*

$$G_\sigma(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{1/\rho}ze^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}f^{(-)}(x)dx+$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^\sigma E_\rho\left(x^{1/\rho}ze^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)dx$$

сходятся в среднем к $g_1(y)$, *когда* $\sigma\to+\infty$ *в смысле*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\infty|g_1(y)-G_\sigma(y)|^2y^{2\mu\rho-\rho-1}dy=0$$

В случае, когда $\rho\geqslant1$, *для функций* $G_\sigma(z)$ *справедливо также утверждение*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\infty |G_\sigma(ye^{i\varphi})|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1}dy = 0$$

при

$$\frac{\pi}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}\cdot$$

Обозначим через $\{L\}$ совокупность лучей

$$l_k;\ \arg z=\varphi_k(k=1,\ 2,\ \dots n),\quad 0=\varphi_1<\varphi_2<\dots<\varphi_n<2\pi$$

исходящих из начала координат. Обозначим далее

$$\alpha=\max_{1<k<n}\left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right\}$$

Теорема 5. Пусть $\rho\geqslant\alpha$ *и* $\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$. *Для произвольной функции* $F(z)$, *определенной на* $\{L\}$ *и удовлетворяющей условию*

$$\int_{\{L\}}|F(z)|^2|z|^{2\mu\rho-\rho-1}d|z|<+\infty$$

существуют целые функции $G_\sigma(z)$ *порядка* ρ *и типа* σ, *для которых*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{\{L\}}|F(z)-G_\sigma(z)|^2|z|^{2\mu\rho-\rho-1}d|z|=0$$

Целью настоящей статьи является перенесение всех вышеуказанных результатов М. М. Джрбашяна на многомерный случай, т. е. на функции многих переменных. Однако, для простоты формулировок и записи, мы все эти результаты будем излагать для функций двух переменных.

§ 1. Вспомогательные предложения

1°. Для дальнейшего нам нужны некоторые теоремы, которые известны или легко следуют из теории интегралов Фурье для функций многих переменных [2,3]:

Теорема A (Планшерель). *Если*

$f(x_1,\ x_2)\subset L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)$ т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ x_2)|^2dx_1\ dx_2<\infty$$

то существует функция $F(x_1, x_2)\subset L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)$ *такая, что*

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|F(x_1, x_2)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}f(u_1, u_2)e^{i(x_1u_1+x_2u_2)}du_1du_2\right|^2dx_1dx_2=0$$

причем для почти всех x_1 *и* x_2

$$F(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix_1u_1}-1}{iu_1}\,\frac{e^{ix_2u_2}-1}{iu_2}f(u_1, u_2)du_1du_2$$

Справедливо также равенство

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(x_1, x_2)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}F(u_1, u_2)e^{-i(x_1u_1+x_2u_2)}du_1du_2\right|^2dx_1dx_2=0$$

причем почти для всех x_1 *и* x_2

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix_1u_1}-1}{-iu_1}\cdot\frac{e^{-ix_2u_2}-1}{-iu_2}F(u_1, u_2)du_1du_2$$

Кроме того, имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x_1, x_2)|^2dx_1dx_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x_1, x_2)|^2dx_1dx_2$$

Если функции $f(x_1, x_2)$ *и* $g(x_1, x_2)$ *принадлежат к классу* $L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$, *а функции* $F(x_1, x_2)$ *и* $G(x_1, x_2)$ *суть соответственно преобразования Фурье этих функций, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x_1, x_2)\overline{g(x_1, x_2)}dx_1dx_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x_1, x_2)\overline{G(x_1, x_2)}dx_1dx_2$$

Применением теоремы Планшереля к функции $2\pi f\left(e^{\xi_1}, e^{\xi_2}\right)e^{\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2)}$ и последующей заменой переменных легко получаются две теоремы Меллина.

Теорема Б (Меллин). Если функция $f(x_1, x_2)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}|f(x_1, x_2)|^2dx_1dx_2<\infty$$

то функция

$$I(s_1, s_2; a)=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}f(x_1, x_2)x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1}dx_1dx_2$$

$$s_k = \frac{1}{2} + t_k, \ -\infty < t_k < +\infty \quad (k = 1, 2)$$

в среднем сходится к некоторой функции

$$I(s_1, s_2) \subset L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty; \frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$$

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} | I(s_1, s_2) - I(s_1, s_2; a) |^2 ds_1 ds_2 = 0$$

Функция

$$f(x_1, x_2; a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} I(s_1, s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2$$

в среднем сходится к функции $f(x_1, x_2)$ *в смысле*

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty | f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2; a) |^2 dx_1 dx_2 = 0$$

кроме того, имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| I\left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2\right)\right|^2 dt_1 dt_2$$

Теорема В (Меллин). *Если*

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty | f(x_1, x_2) |^2 dx_1 dx_2 < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty | g(x_1, x_2) |^2 dx_1 dx_2 < +\infty$$

то имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} I(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2$$

где $I(s_1, s_2)$ *и* $G(s_1, s_2)$ — *трансформации Меллина функций* f *и* g *в смысле теоремы Б.*

2°. Приводим некоторые вспомогательные леммы, которые являются простыми следствиями соответствующих лемм работы М. М. Джрбашяна [1].

Пусть

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \qquad \left(\rho \geqslant \frac{1}{2}, \ \mu > 0\right)$$

целая функция Миттаг-Лефлера, имеющая порядок ρ и тип 1.

Обозначим

$$E_{\rho_1}(x_1;\ \mu_1)\cdot E_{\rho_2}(x_2;\ \mu_2) = E_{\rho_1\rho_2}(x_1,\ x_2;\ \mu_1,\ \mu_2) \tag{1.1}$$

при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Обозначим также

$$e_{\rho_1\rho_2}(x_1,\ x_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2) = E_{\rho_1\rho_2}(x_1^{1/\rho_1} e^{i\alpha_1},\ x_2^{1/\rho_2} e^{i\alpha_2};\ \mu_1+1,\ \mu_2+1)\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \tag{1.2}$$

Лемма 1. Если $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ $(k=1,\ 2)$, то при $\frac{\pi}{2\rho_k} \leqslant \alpha_k \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k}$ $(k=1,\ 2)$

$$\frac{e_{\rho_1\rho_2}(x_1,\ x_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{x_1 x_2} \subset L_2(0,\ +\infty;\ 0,\ +\infty) \tag{1.3}$$

Лемма 2. Если $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $\frac{\pi}{2\rho_k} \leqslant \alpha_k \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k}$, $s_k = \frac{1}{2} + it_k$, $-\infty < t_k < +\infty$ $(k=1,\ 2)$, то

$$\frac{U_{\rho_1\rho_2}(s_1,\ s_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}(x_1,\ x_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2)}{x_1 x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{4\pi^2\rho_1\rho_2}{\Gamma(2-s_1)\Gamma(2-s_2)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\rho_1\alpha_1(s_1+\mu_1-1)\right]}\ e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\rho_2\alpha_2(s_2+\mu_2-1)\right]}}{\left[1-e^{-2\pi\rho_1(s_1+\mu_1-1)}\right]\left[1-e^{-2\pi\rho_2(s_2+\mu_2-1)}\right]} \tag{1.4}$$

причем в случае, когда $\rho_1 = \frac{1}{2}$ или $\rho_2 = \frac{1}{2}$, интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем на $\left(\frac{1}{2} - i\infty,\ \frac{1}{2} + i\infty;\ \frac{1}{2} - i\infty,\ \frac{1}{2} + i\infty\right)$.

Лемма 3. Если $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$ $(k=1,\ 2)$, то для всех α_k из $\left[\frac{\pi}{2\rho_k},\ 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k}\right]$ $(k=1,\ 2)$ существует такое число M, что

$$\left|U_{\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{2} + it_1,\ \frac{1}{2} + it_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2\right)\right| \leqslant M \tag{1.5}$$

$$(-\infty < t_k < +\infty,\ k=1,\ 2)$$

Обозначим

$$\frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2)}{x_1 x_2} = \frac{e^{\pm ix_1}-1}{\pm ix_1} \frac{e^{\pm ix_2}-1}{\pm ix_2} \tag{1.6}$$

Обозначим далее

$$\frac{H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)}{x_1 x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2 =$$

$$=\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} e^{\pm i\frac{\pi}{2}s_1 \pm i\frac{\pi}{2}s_2} \tag{1.7}$$

Из лемм 13 и 14 работы [1] легко получаются следующие тождества, которым удовлетворяют преобразованию Меллина $U_{\rho_1\rho_2}(s_1, s_2; \alpha_1, \alpha_2)$ и $H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2)$ функций $e_{\rho_1\rho_2}(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2)$ и $h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)$. Обозначим

$$e^{i\frac{\pi}{2}(-2+\mu_1+\mu_2)}=C_1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}(\mu_1-\mu_2)}=C_2,$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}(\mu_2-\mu_1)}=C_3, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}(2-\mu_1-\mu_2)}=C_4. \tag{1.8}$$

Лемма 4. При $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho_k}$, когда $s_k=\frac{1}{2}+it_k$, $-\infty<t_k<+\infty$ $(k=1, 2)$, справедливо тождество

$$C_1 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2}\right) H^{(-)}_{(-)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_2 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_2}\right) H^{(-)}_{(+)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_3 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2}\right) H^{(+)}_{(-)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_4 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_2}\right) H^{(+)}_{(+)}(1-s_1, 1-s_2)=4\pi^2\rho_1\rho_2. \tag{1.9}$$

Лемма 5. Пусть $\rho_k \geqslant 1$, $\frac{1}{2}<\mu_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho_k}$ $s_k=\frac{1}{2}+it_k$, $-\infty<t_k<+\infty$ $(k=1, 2)$. При этих условиях

а) если

$$0 \leqslant \omega_k \leqslant 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right) \qquad (k=1, 2) \tag{1.10}$$

то имеет место тождество

$$C_1 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right) H^{(-)}_{(-)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_2 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right) H^{(-)}_{(+)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_3U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)H^{(+)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_4U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)H^{(+)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)=0 \qquad (1.11)$$

б) если

$$0\leqslant\omega_1\leqslant 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \qquad (1.12)$$

то имеет место тождество

$$C_1U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}\right)H^{(-)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_2U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_2}\right)H^{(-)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_3U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}\right)H^{(+)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_4U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_2}\right)H^{(+)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)=0 \qquad (1.13)$$

в) если

$$0\leqslant\omega_2\leqslant 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \qquad (1.14)$$

то имеет место тождество

$$C_1U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1},\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)H^{(-)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_2U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1},\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)H^{(-)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_3U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_1},\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)H^{(+)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)+$$

$$+C_4U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho_1},\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)H^{(+)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)=0 \qquad (1.15)$$

Наконец, из леммы 15 работы [1] получается следующая простая:

Лемма 6. Функции $H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1,\ s_2)$ равномерно ограничены при $s_k=\frac{1}{2}+it_k,\ -\infty<t_k<+\infty,\ (k=1,\ 2)$

$$\left|H^{(\pm)}_{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it_1,\ \frac{1}{2}+it_2\right)\right|\leqslant 2\pi.$$

§ 2. Прямые и обратные преобразования в классе $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ для функций двух переменных

1°. На основании вспомогательных предложений § 1 в настоящем параграфе приводятся теоремы о прямых и обратных преобразованиях в классе $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ с ядрами вида

$$\frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1, x_2y_2)}{y_1y_2} \quad \text{и} \quad \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1, x_2y_2; \pm i\frac{\pi}{2\rho_1}, \pm\frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2}$$

Теорема 1. Пусть $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ $(k = 1, 2)$. *Для любой функции из класса* $g(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} \subset L_2(0, \infty; 0, \infty)$ *формула*

$$f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1, x_2y_2)}{y_1y_2} g(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1}dy_1dy_2 \tag{2.1}$$

определяет для почти всех x_1 *и* x_2 *функции* $f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)$, *принадлежащие к классу* $L_2(0, \infty; 0, \infty)$.

Двойственная формула

$$g(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\left\{D_1 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1, x_2y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f^{(-)}_{(-)}(x_1, x_2)dx_1dx_2 + \right.$$

$$+ D_2 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1, x_2y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f^{(-)}_{(+)}(x_1, x_2)dx_1dx_2 +$$

$$+ D_3 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1, x_2y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f^{(+)}_{(-)}(x_1, x_2)dx_1dx_2 +$$

$$\left. + D_4 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1, x_2y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f^{(+)}_{(+)}(x_1, x_2)dx_1dx_2\right\} \tag{2.2}$$

где $D_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} C_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ *также имеет место для почти всех* y_1, *и*, y_2, *и, кроме того, справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |g(y_1, y_2)|^2 y_1^{2\mu_1-2}\, y_2^{2\mu_2-2}\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left\{ |f^{(+)}_{(+)}(x_1, x_2)|^2 + |f^{(+)}_{(-)}(x_1, x_2)|^2 + |f^{(-)}_{(+)}(x_1, x_2)|^2 + |f^{(-)}_{(-)}(x_1, x_2)|^2 \right\} dx_1 dx_2 \tag{2.3}$$

Эта и последующие две теоремы доказываются совершенно так же, как и соответствующие теоремы для функций одного переменного, т. е. как теоремы 1, 5, 7 работы [1]. При этом, конечно, используются вспомогательные результаты для функций двух переменных, сформулированные нами в § 1. Поэтому доказательства этой и последующих двух теорем опускаем.

2°. В пункте 1° мы рассмотрели преобразования с ядрами $\frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2}$. Здесь мы рассмотрим обратную задачу — преобразования в классе $L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$ с ядром

$$\frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1 y_1,\ x_2 y_2;\ \pm\frac{\pi}{2\rho_1},\ \pm\frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1 x_2}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Для любой функции $f(x_1, x_2) \subset L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$ *формула*

$$g^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1 y_1,\ x_2 y_2;\ \pm\frac{\pi}{2\rho_1},\ \pm\frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right. \tag{2.4}$$

где $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ $(k = 1, 2)$ *определяет почти для всех* y_1 *и* y_2 *функции* $g^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-2}$, *принадлежащие к классу* $L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$. *Двойственная формула*

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left\{ D_1 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{h^{(-)}_{(-)}(x_1 y_1,\ x_2 y_2)}{y_1 y_2} g^{(+)}_{(+)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-2} dy_1 dy_2 + \right.$$

$$+ D_2 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{h^{(-)}_{(+)}(x_1 y_1,\ x_2 y_2)}{y_1 y_2} g^{(+)}_{(-)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 +$$

$$+ D_3 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{h^{(+)}_{(-)}(x_1y_1,\ x_2y_2)}{y_1y_2} g^{(-)}_{(+)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1dy_2 +$$

$$\left. + D_4 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{h^{(+)}_{(+)}(x_1y_1,\ x_2y_2)}{y_1y_2} g^{(-)}_{(-)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1dy_2 \right\} \tag{2.5}$$

также имеет место почти для всех x_1 и x_2. Существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от функций $f(x_1, x_2)$ и $g^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1, y_2)$, такие, что

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |g^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1,\ y_2)|^2 y_1^{2\mu_1-2} y_2^{2\mu_2-2} dy_1dy_2 \leqslant M_1 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |f(x_1,\ x_2)|^2 dx_1dx_2 \tag{2.6}$$

и

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |f(x_1,\ x_2)|^2 dx_1dx_2 \leqslant M_2 \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Big\{ |g^{(+)}_{(+)}(y_1, y_2)|^2 + |g^{(+)}_{(-)}(y_1,\ y_2)|^2 +$$

$$+ |g^{(-)}_{(+)}(y_1,\ y_2)|^2 + |g^{(-)}_{(-)}(y_1,\ y_2)|^2 \Big\} y_1^{2\mu_1-2} y_2^{2\mu_2-2} dy_1dy_2 \tag{2.7}$$

§ 3. Сходимость в среднем обобщенных интегральных преобразований для функций двух переменных. Приближение целыми функциями

В этом параграфе дополняется результат теоремы 1 и приводится основная теорема о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ целыми функциями порядка $\rho_1 \geqslant \frac{1}{2}$ по z_1, и порядка $\rho_2 \geqslant \frac{1}{2}$ по z_2, типы которых стремятся к бесконечности*. В заключении этого параграфа приводится общая теорема о приближении в среднем к функциям, принадлежащим к классу L_2 на произвольной системе „четверть плоскостей" целыми функциями, типы которых стремятся к бесконечности.

Обозначим

$$e^{*}_{\rho_1\rho_2}(x_1,\ x_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2) = E_{\rho_1\rho_2}(x_1^{1/\rho_1} e^{i\alpha_1},\ x_2^{1/\rho_2} e^{i\alpha_2};\ \mu_1,\ \mu_2) x_1^{\mu_1-1} x_2^{\mu_2-1} \tag{3.1}$$

1°. Дополнение теоремы 1. Справедлива

Теорема 3. Для любой функции $g(y_1,\ y_2)$ *из класса* $g(y_1,\ y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} \subset L_2(0,\ \infty;\ 0, \infty)$, *если* $\rho_k \geqslant \frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ $(k = 1,\ 2)$, *имеет место предельное соотношение*

* Определение и интегральное представление целых функций двух переменных, имеющих различные порядки и типы по отдельным переменным, даны в работе М. М. Джрбашяна [4].

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\Bigg| g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} -$$

$$- D_1\int\limits_0^{\sigma_1}\int\limits_0^{\sigma_2}\frac{e^*_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \dfrac{\pi}{2\rho_1},\ \dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2} f^{(-)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 -$$

$$- D_2\int\limits_0^{\sigma_1}\int\limits_0^{\sigma_2}\frac{e^*_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \dfrac{\pi}{2\rho_1},\ -\dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2} f^{(-)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 -$$

$$- D_3\int\limits_0^{\sigma_1}\int\limits_0^{\sigma_2}\frac{e^*_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ -\dfrac{\pi}{2\rho_1},\ \dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2} f^{(+)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 -$$

$$- D_4\int\limits_0^{\sigma_1}\int\limits_0^{\sigma_2}\frac{e^*_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ -\dfrac{\pi}{2\rho_1},\ -\dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2} f^{(+)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\Bigg|^2 dy_1dy_2 = 0 \tag{3.2}$$

где, как и в теореме 1, функции $f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1,\ x_2)$ определяются из (2.1).

2°. В этом пункте мы докажем теорему о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$ целыми функциями двух комплексных переменных.

Теорема 4. Пусть $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k\rho_k - \rho_k - 1 = \tau_k$ $(k = 1,\ 2)$. *Если* $g_1(y_1,\ y_2)$ — *произвольная функция из класса*

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |g_1(y_1,\ y_2)|^2 y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} dy_1dy_2 < \infty \tag{3.3}$$

то функции

$$f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1,\ x_2) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{4\pi^2}}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1^{\rho_1},\ x_2y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1}y_2^{\rho_2}} g_1(y_1,\ y_2) y_1^{\mu_1\rho_1-1} y_2^{\mu_2\rho_2-1} dy_1dy_2 \tag{3.4}$$

принадлежат к классу $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$. *Целые функции порядка* ρ_1 *и типа* σ_1 *по* z_1 *и порядка* ρ_2 *и типа* σ_2 *по* z_2, *определяемые по формуле*

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\Bigg|g(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1}-$$

$$-D_1\int_0^{\sigma_1}\!\!\int_0^{\sigma_2}\frac{e^{*}_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \dfrac{\pi}{2\rho_1},\ \dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2}f^{(-)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2-$$

$$-D_2\int_0^{\sigma_1}\!\!\int_0^{\sigma_2}\frac{e^{*}_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \dfrac{\pi}{2\rho_1},\ -\dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2}f^{(-)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2-$$

$$-D_3\int_0^{\sigma_1}\!\!\int_0^{\sigma_2}\frac{e^{*}_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ -\dfrac{\pi}{2\rho_1},\ \dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2}f^{(+)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2-$$

$$-D_4\int_0^{\sigma_1}\!\!\int_0^{\sigma_2}\frac{e^{*}_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ -\dfrac{\pi}{2\rho_1},\ -\dfrac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2}f^{(+)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\Bigg|^2dy_1dy_2=0 \tag{3.2}$$

где, как и в теореме 1, функции $f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1,\ x_2)$ определяются из (2.1).

2°. В этом пункте мы докажем теорему о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$ целыми функциями двух комплексных переменных.

Теорема 4. Пусть $\rho_k\geq\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\mu_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k\rho_k-\rho_k-1=\tau_k$ $(k=1,\ 2)$. *Если* $g_1(y_1,\ y_2)$ — *произвольная функция из класса*

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty|g_1(y_1,\ y_2)|^2y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}dy_1dy_2<\infty \tag{3.3}$$

то функции

$$f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1,\ x_2)=$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{4\pi^2}}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1^{\rho_1},\ x_2y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1}y_2^{\rho_2}}g_1(y_1,\ y_2)y_1^{\mu_1\rho_1-1}y_2^{\mu_2\rho_2-1}\,dy_1dy_2 \tag{3.4}$$

принадлежат к классу $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$. *Целые функции порядка* ρ_1 *и типа* σ_1 *по* z_1 *и порядка* ρ_2 *и типа* σ_2 *по* z_2, *определяемые по формуле*

$$G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2) =$$

$$= D_1 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i\frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i\frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_2 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i\frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i\frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_3 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i\frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i\frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_4 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i\frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i\frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{3.5}$$

сходятся в среднем к $g_1(y_1, y_2)$, *когда* $\sigma_1 \to \infty$, $\sigma_2 \to \infty$ *в смысле*

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |g_1(y_1, y_2) - G_{\sigma_1\sigma_2}(y_1, y_2)|^2 y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} dy_1 dy_2 = 0 \tag{3.6}$$

В случае, когда $\rho_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2)$, *справедливо также утверждение*

если а) $\dfrac{\pi}{\rho_k} \leqslant \varphi_k \leqslant 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho_k}$ $(k = 1, 2)$ *или* (3.7^а)

б) $\dfrac{\pi}{\rho_1} \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho_1}$ $\varphi_2 = 0$ *или* (3.7^б)

в) $\dfrac{\pi}{\rho_2} \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho_2}$ $\varphi_1 = 0$ (3.7^в)

то имеет место также равенство

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |G_{\sigma_1\sigma_2}(y_1 e^{i\varphi_1}, y_2 e^{i\varphi_2})|^2 y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} dy_1 dy_2 = 0 \tag{3.8}$$

Эта теорема также доказывается по методу доказательства аналогичной теоремы для функций одного переменного, но заключительная часть теоремы имеет некоторые особенности. Поэтому мы докажем эту теорему полностью.

Доказательство. Утверждения теоремы (3.4) и (3.6) немедленно следуют из теорем 3 и 1, если положить там $g(y_1, y_2) = g_1(y_1^{1/\rho_1}, y_2^{1/\rho_2})$ и учесть обозначения (1.2) и (3.1). Остается убедиться в справедливости утверждения (3.8), когда $\rho_k \geq 1$ $(k=1, 2)$. Докажем это сначала, когда выполняется условие (3.7ª).

Обозначим

$$G(s_1, s_2)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(y_1, y_2) y_1^{\rho_1-1} y_2^{\rho_2-1} y_1^{s_1-1} y_2^{s_2-1} dy_1 dy_2 \tag{3.9}$$

Из теоремы Б § 1 следует, что

$$G\left(\frac{1}{2}+it_1, \frac{1}{2}+it_2\right) \subset L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$$

а из леммы 7 § 1 следует, что и

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} H_{(\pm)}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it_1, \frac{1}{2}+it_2\right)\times$$

$$\times G\left(\frac{1}{2}+it_1, \frac{1}{2}+it_2\right) \subset L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$$

Теперь, если обозначить

$$f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2; a)=$$

$$=\frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2}\iint_{Ra} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2 \tag{3.10}$$

где aR означает область интегрирования

$\left(\frac{1}{2}-ia, \frac{1}{2}+ia; \frac{1}{2}-ia, \frac{1}{2}+ia\right)$, то по теореме Б § 1 существует предел в среднем

$$f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)=\mathrm{l.i.m.}\, f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2; a)=$$

$$=\frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2}\iint_{R_\infty} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2 \tag{3.11}$$

причем функции $f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) \subset L_2(0, \infty; 0, \infty)$. Покажем, что эти функции совпадают с функциями (3.4).

Из (3.10) имеем

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(u_1, u_2; a) du_1 du_2=$$

$$=\frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2}\iint_{Ra}\frac{H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{1-s_1} x_2^{1-s_2} ds_1 ds_2 \tag{3.12}$$

Но из формулы (1.7) следует, что $\frac{H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} x_1^{1-s_1} x_2^{1-s_2}$ есть преобразование Меллина функции $\dfrac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1, x_2y_2)}{y_1y_2}$. Переходя к пределу в (3.12) при $a \to \infty$ и применяя теорему В § 1, получим

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f^{(\pm)}_{(\pm)}(u_1, u_2)du_1du_2 =$$

$$= \frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2}\iint_{R_\infty}\frac{H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)}x_1^{1-s_1}x_2^{1-s_2}G(1-s_1, 1-s_2)ds_1ds_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1y_1, x_2y_2)}{y_1y_2}g(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1}dy_1dy_2$$

Отсюда видно, что функции $f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)$ действительно совпадают с функциями (3.4).

Обозначим

$$F^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1}dx_1dx_2 \tag{3.13}$$

Но из (3.11) следует, что

$$(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2)G(1-s_1, 1-s_2) =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1, x_2)x_1^{s_1-1}x_2^{s_2-1}dx_1dx_2 \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) имеем

$$F^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2) = (4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}_{(\pm)}(s_1, s_2)G(1-s_1, 1-s_2)$$

или, что то же самое,

$$F^{(\pm)}_{(\pm)}(1-s_1, 1-s_2) = (4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}H^{(\pm)}_{(\pm)}(1-s_1, 1-s_2)G(s_1, s_2) \tag{3.15}$$

Умножим тождество (1.11) леммы 6 § 1 на $G(s_1, s_2)$. Учитывая (3.15), получим

$$C_1U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)F^{(-)}_{(-)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_2U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)F^{(-)}_{(+)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_3U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)F^{(+)}_{(-)}(1-s_1, 1-s_2)+$$

$$+C_4 U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)F^{(+)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)=0 \qquad (3.16)$$

Разделим (3.16) на $(2\pi i)^2(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}$ $(y_1>0,\ \ y_2>0)$ и проинтегрируем по области R_∞. Обозначая $C_k\dfrac{1}{(2\pi i)^2}=M_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, получим

$$M_1\iint\limits_{R_\infty}\frac{U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}}F^{(-)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+M_2\iint\limits_{R_\infty}\frac{U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}}F^{(-)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+M_3\iint\limits_{R_\infty}\frac{U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}}F^{(+)}_{(-)}(1-s_1,\ 1-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+M_4\iint\limits_{R_\infty}\frac{U_{\rho_1\rho_2}\left(s_1,\ s_2;\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}}F^{(+)}_{(+)}(1-s_1,\ 1-s_2)ds_1ds_2=0$$

$$(3.17)$$

Применяя теорему В § 1 к этому равенству, получим

$$C_1\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)}{x_1x_2}f^{(-)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2+$$

$$+C_2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\frac{\pi}{\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)}{x_1x_2}f^{(-)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2+$$

$$+C_3\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\frac{\pi}{\rho_2}+\omega_2\right)}{x_1x_2}f^{(+)}_{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2+$$

$$+C_4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \frac{\pi}{2\rho_1}+\omega_1,\ \frac{\pi}{2\rho_2}+\omega_2\right)}{x_1x_2}f^{(+)}_{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2=0 \quad (3.18)$$

Обозначим $\varphi_k=\dfrac{\pi}{\rho_k}+\omega_k$. Из (3.18) следует, что если $\dfrac{\pi}{\rho_k}\leqslant\varphi_k\leqslant$

$\leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho_k}$ $(k = 1, 2)$, то для почти всех y_1 и y_2 имеет место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\left\{C_1 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 + \right.$$

$$+ C_2 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_2},\ \varphi_2 - \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f_{(+)}^{(-)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 +$$

$$+ C_3 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 +$$

$$\left. + C_4 \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 - \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f_{(+)}^{(+)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\right\} = 0 \tag{3.19}$$

Для любых $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ обозначим

$$^*f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2) = \begin{cases} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2) \text{ в прямоугольнике } \begin{matrix} 0 \leqslant x_1 \leqslant \sigma_1 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \sigma_2 \end{matrix} \\ 0 \qquad \text{вне этого прямоугольника.} \end{cases}$$

Обозначим далее

$$F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1,\ y_2)y_1^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 \mp \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 \mp \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\right\}$$

$$^*F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1,\ y_2)y_1^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 \mp \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 \mp \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2} {}^*f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\right\} =$$

$$= \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{e^*_{\rho_1\rho_2}\left(x_1y_1,\ x_2y_2;\ \varphi_1 \mp \frac{\pi}{2\rho_1},\ \varphi_2 \mp \frac{\pi}{2\rho_2}\right)}{x_1x_2y_1y_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2 \tag{3.20}$$

Из теоремы 3 следует, что

$$F^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} = \underset{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}{}^{*}F^{(\pm)}_{(\pm)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} \tag{3.21}$$

Из (3.19), (3.20) и (3.21) выводим, что

$$\underset{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}\Big\{C_1{}^*F^{(-)}_{(-)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} + C_2{}^*F^{(-)}_{(+)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} +$$

$$+ C_3{}^*F^{(+)}_{(-)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} + C_4{}^*F^{(+)}_{(+)}(y_1, y_2)y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1}\Big\} = 0$$

А это значит

$$\underset{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}\, G_{\sigma_1\sigma_2}(y_1^{1/\rho_1}e^{i\varphi_1}; y_2^{1/\rho_2}e^{i\varphi_2})\, y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1} = 0$$

при $\frac{\pi}{\rho_k} \leqslant \varphi_k \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho_k}$. Отсюда уже утверждение теоремы в случае а) сразу получается простой заменой переменных $y_1^{1/\rho_1} = \overline{y}$, $y_2^{1/\rho_2} = \overline{y}_2$.

Теперь, исходя из тождеств (1.13) и (1.15) леммы 5 § 1, совершенно аналогично получим и утверждение теоремы в случаях б) и в).

3°. Пусть имеем две системы лучей, исходящих из начала координат:

$$\arg z_1 = \varphi_k (k = 1, 2, \dots n), \quad 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

$$\arg z_2 = \psi_j (j = 1, 2 \dots m), \quad 0 \leqslant \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi \tag{3.22}$$

Любую пару лучей (φ_k, ψ_j) назовем „четверть-плоскостью".

Обозначим через $\{\Omega\}$ систему всевозможных „четверть-плоскостей" из (3.22), число которых равно mn. Обозначим далее

$$\alpha_1 = \max_{1<k<n}\left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k}\right\}, \quad \alpha_2 = \max_{1<j<m}\left\{\frac{\pi}{\psi_{j+1} - \psi_j}\right\} \tag{3.23}$$

Докажем общую теорему об аппроксимации целыми функциями двух комплексных переменных на произвольной конечной системе „четверть-плоскостей".

Теорема 5. Пусть $\rho_k > \alpha_k$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k\rho_k - \rho_k - 1 = \tau_k$ $(k = 1, 2)$. *Для произвольной функции* $F(z_1, z_2)$, *определенной на* $\{\Omega\}$ *и удовлетворяющей условию*

$$\iint\limits_{\{\Omega\}} |F(z_1, z_2)|^2 |z_1|^{\tau_1} |z_2|^{\tau_2} d|z_1| d|z_2| < \infty \tag{3.24}$$

существуют целые функции $G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2)$ *порядка* ρ_1, *типа* σ_1 *по* z_1 *и порядка* ρ_2, *типа* σ_2 *по* z_2, *для которых*

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\iint\limits_{(\Omega)} |F(z_1, z_2) - G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2)|^2 |z_1|^{\gamma_1} |z_2|^{\gamma_2} d|z_1|\, d|z_2| = 0 \tag{3.25}$$

Доказательство. Из условия (3.24) следует, что

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |F(y_1 e^{i\varphi_k},\ y_2 e^{i\psi_j})|^2 y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} dy_1 dy_2 < \infty \qquad (k = 1,\ 2 \cdots n,\ j = 1,\ 2 \cdots m)$$

откуда, как в теореме 4, заключаем, что функции

$$f^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1,\ x_2;\ k,\ j) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{4\pi^2}}\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}_{(\pm)}(x_1 y_1^{\rho_1},\ x_2 y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1} y_2^{\rho_2}} F(y_1 e^{i\varphi_k},\ y_2 e^{i\psi_j}) y_1^{\mu_1\rho_1 - 1} y_2^{\mu_2\rho_2 - 1} dy_1 dy_2$$

принадлежат к классу $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$

Обозначим

$$G^{(k,\ j)}_{\sigma_1\sigma_2}(z_1,\ z_2) =$$

$$= D_1 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho_1} - \varphi_k\right)},\ x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho_2} - \psi_j\right)};\ \mu_1,\ \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times$$

$$\times f^{(-)}_{(-)}(x_1,\ x_2;\ k,\ j) dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_2 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho_1} - \varphi_k\right)},\ x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho_2} + \psi_j\right)};\ \mu_1,\ \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times$$

$$\times f^{(-)}_{(+)}(x_1,\ x_2;\ k,\ j)\, dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_3 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho_1} + \varphi_k\right)},\ x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho_2} - \psi_j\right)};\ \mu_1,\ \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times$$

$$\times f^{(+)}_{(-)}(x_1,\ x_2;\ k,\ j) dx_1 dx_2 +$$

$$+ D_4 \int_0^{\sigma_1}\int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho_1} + \varphi_k\right)},\ x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho_2} + \psi_j\right)};\ \mu_1,\ \mu_2\right)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times$$

$$\times f^{(+)}_{(+)}(x_1,\ x_2;\ k,\ j) dx_1 dx_2 \tag{3.26}$$

Нетрудно проверить, что $G^{(k,\ j)}_{\sigma_1\sigma_2}(z_1,\ z_2)$ есть функция порядка ρ_1, типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2, типа σ_2 по z_2.

В силу теоремы 4

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left|F(y_1e^{i\varphi_k}, y_2e^{i\psi_j})-G^{(k,j)}_{\sigma_1\sigma_2}(y_1e^{i\varphi_k}, y_2e^{i\psi_j})\right|^2 y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}dy_1dy_2=0$$

$$(k=1, 2\ldots n, \quad j=1, 2\ldots m) \tag{3.27}$$

А если

а) $$|\varphi-\varphi_k|\geqslant\frac{\pi}{\rho_1}, \ |\psi-\psi_j|\geqslant\frac{\pi}{\rho_2}$$

или б) $$|\varphi-\varphi_k|\geqslant\frac{\pi}{\rho_1}, \quad \psi=\psi_j$$

или в) $$\varphi=\varphi_k \quad |\psi-\psi_j|\geqslant\frac{\pi}{\rho_2}$$

то

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left|G^{(k,j)}_{\sigma_1\sigma_2}(y_1e^{i\varphi}, y_2e^{i\psi})\right|^2 y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}dy_1dy_2=0$$

$$(k=1, 2\ldots n, \quad j=1, 2\ldots m)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left|G^{(k,j)}_{\sigma_1\sigma_2}(y_1e^{i\varphi_\alpha}; y_2e^{i\psi_\beta})\right|^2 y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}dy_1dy_2=0 \tag{3.28}$$

где (α, β) какая-нибудь пара чисел, отличная от пары (k, j).

Обозначим

$$G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}G^{(k,j)}_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2) \tag{3.29}$$

тогда из (3.26), (3.27) и (3.28) будет следовать равенство

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty\\ \sigma_2\to\infty}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left|F(y_1e^{i\varphi_k}, y_2e^{i\psi_j})-G_{\sigma_1\sigma_2}(y_1e^{i\varphi_k}, y_2e^{i\psi_j})\right|^2 y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}dy_1dy_2=0$$

$$(k=1, 2\ldots n, \quad j=1, 2\ldots m)$$

что равносильно утверждению теоремы.

В заключение благодарю моего учителя М. М. Джрбашяна за руководство и помощь в выполнении этой работы.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 25 II 1956

Ա. Ե. Ավետիսյան

ՇԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում են շատ փոփոխականների ֆունկցիաների ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխությունների մասին թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի աշխատության [1] հիմնական արդյունքների անալոգը շատ փոփոխականների ֆունկցիաների համար։ Դատողությունների և գրության պարզության նպատակով արդյունքները շարադրված են երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия математическая, 19 (1955).
2. *Титчмарш Е. К.* Введение в теорию интегралов Фурье.
3. *Бохнер С.* и *Мартин У. Т* Функции многих комплексных переменных.
4. *Джрбашян М. М.* К теории некоторых классов целых функций многих переменных. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. VIII, № 4. 1955.