

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Аракелян

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основании

1. *Интегродифференциальное уравнение интенсивности реакции основания.* Рассмотрим бесконечно длинную призматическую балку, опирающуюся по всей своей длине на сплошное, податливое водонасыщенное грунтовое основание и нагруженную одной сосредоточенной силой.

Для определения интенсивности реакции основания  $q(x, t)$ , где  $x$  — абсцисса сечения балки,  $t$  — время, рассмотрим отдельно мгновенное и продолжительное воздействие нагрузки на грунтовое основание.

При мгновенном действии нагрузки, т. е. при  $t = 0$ , реакция и осадка основания связаны линейной зависимостью

$$q(x, 0) = bk_1 \delta(x, 0), \quad (1.1)$$

где

$b$  — ширина балки,

$k_1$  — так называемый мгновенный коэффициент податливости основания. При этом

$$\delta(x, 0) = -\frac{P}{8EI\beta^3} (\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x}, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{P}{4EI\beta^2} e^{-\beta x} \sin\beta x, \quad (1.3)$$

$$M(x, 0) = \frac{P}{4\beta} (\cos\beta x - \sin\beta x)e^{-\beta x}, \quad (1.4)$$

$$Q(x, 0) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos\beta x, \quad (1.5)$$

$$q(x, 0) = -\frac{P}{2} \beta (\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x}, \quad (1.6)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{bk_1}{4EI}}, \quad (1.7)$$

$EI$  — жесткость балки.

Здесь  $\beta$  имеет размерность  $\frac{1}{\text{длина}}$ . Приведенные элементы изгиба балки относятся к левой половине ее.

При продолжительном действии нагрузки, реакция основания  $q(x, t)$  определяется из условий равенства прогиба балки осадке основания  $\delta(x, t)$ , при наличии прямолинейной фильтрационной консолидации грунта основания.

Если площадь подошвы балки достаточно велика ( $10 \text{ м}^2$  и больше), а мощность слоя сжимаемого грунта в 2 или более раз меньше ширины балки, то без больших погрешностей допустимо применение соотношения осадок одномерного уплотнения к решению поставленной, вообще говоря, трехмерной задачи [1].

В большом числе случаев податливых грунтов применим метод расчета осадок без учета ползучести грунта. Необходимость последнего обусловлена отношением проницаемости грунта к скорости нарастания деформации ползучести; однако для водонасыщенных податливых грунтов указанное отношение значительно.

Приведенные условия имеют место для гидротехнических и других крупных инженерных сооружений, особенно, когда они возведены на аллювиальных отложениях речных долин или на толще некоторых ледниковых образований.

Для аллювиальных пород большой мощности характерно чередование пластов практически несжимаемых, проницаемых обломочных пород и податливых глинистых грунтов. Часто в толще обломочного материала ледниковых отложений залегают пласты податливых глинистых пород.

Таким образом, в указанных условиях податливый грунт воспринимает давление от сооружений через площадку достаточных размеров. В силу чего, с удовлетворительной точностью для практических целей, возможно допущение наличия прямолинейной фильтрационной консолидации грунта основания.

Осадки грунта определяются на основе соотношения Флорина—Арутюняна [2] и, в данном случае, выражаются, как известно [3], таким образом

$$\delta(x, t) = \frac{8k_0}{\Delta H b} \int_0^t q(x, \xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-\lambda^2 v^2 (t-\xi)} d\xi + \delta(x, 0), \quad (1.8)$$

где

$$\lambda = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 c,$$

$k_0$  — средне-приведенный коэффициент фильтрации грунта основания, соответствующий диапазону изменения сжимающих напряжений грунта.

$\Delta$  — удельный вес фильтруемой воды.

$H$  — мощность пласта податливого грунта.

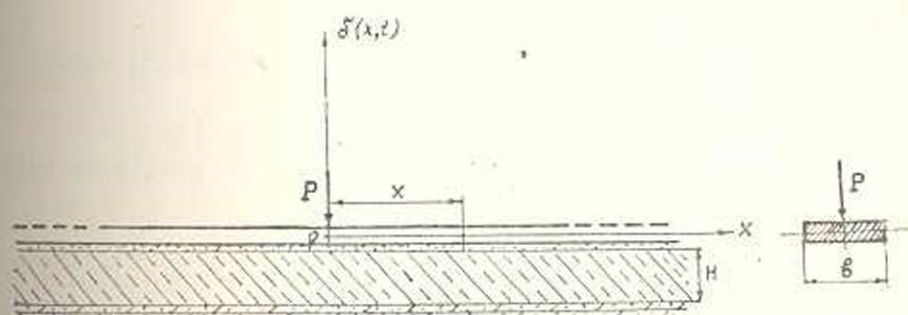
$c$  — коэффициент консолидации грунта.

Для определения интенсивности реакции основания воспользуемся дифференциальной зависимостью между перемещениями оси балки и интенсивностью сплошной нагрузки ее

$$q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \left[ \xi(x, t) \right]. \quad (1.9)$$

Внося (1.9) и (1.2) в (1.8), получаем

$$q(x, t) = -\frac{8EI k_0}{\Delta H b} \int_0^t \frac{\partial^4}{\partial x^4} q(x, \tau) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} e^{-\gamma_n^2 k (t-\tau)} d\tau - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (1.10)$$



Фиг. 1.

Разрезав балку в точке приложения силы  $P$  (фиг. 1), рассмотрим правую часть балки, для которой  $\infty \geq x \geq 0$ . Действие левой (отброшенной) части балки заменим поперечной силой  $Q(0, t)$  и изгибающим моментом  $M(0, t)$  (фиг. 2).

При любом значении времени  $t$ , граничными условиями для рассматриваемой части балки будут

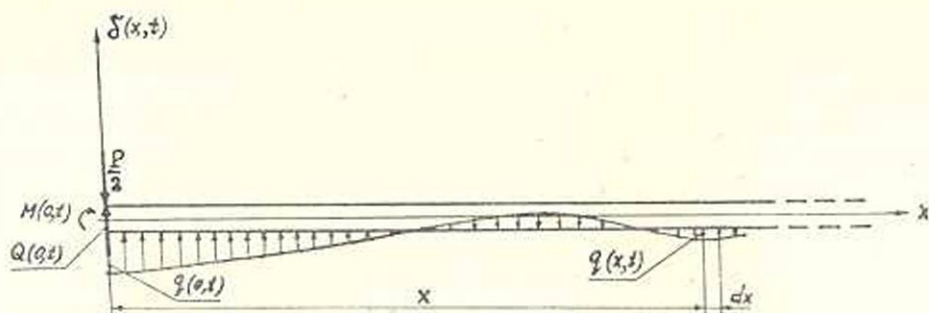
$$\xi(\infty, t) = q(\infty, t) = 0, \quad (1.11)$$

$$\varphi(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \xi(0, t) \right] = 0, \quad (1.12)$$

$$Q(0, t) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \xi(0, t) \right] = -\frac{P}{2}. \quad (1.13)$$

Таким образом, определение реакции основания  $q(x, t)$  сводится к решению интегродифференциального уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11), (1.12), (1.13) и с начальным условием (1.6).

2. *Общий интеграл уравнения (1.10).* Рассматривая часть балки правее сечения  $x$  (фиг. 2),



Фиг. 2.

получим:

$$Q(x, t) = \int_x^l q(x, t) dx, \quad (2.1)$$

или

$$Q(x, t) = \int_0^{x+l} q(x, t) dx - \int_0^x q(x, t) dx,$$

но первый интеграл представляет известное значение поперечной силы справа от сечения  $x = 0$ ,

значит

$$Q(x, t) = -\frac{P}{2} - \int_0^x q(x, t) dx. \quad (2.2)$$

Исходя из дифференциальной зависимости между поперечной силой и перемещением оси балки

$$Q(x, t) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} [z(x, t)],$$

на основе (1.8) и (2.2) находим

$$Q(x, t) = \frac{8EI k_0}{\Delta H b} \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3} q(x, \xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi - \frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (2.3)$$

Внеся (2.3) в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \int_0^x q(x, t) dx = & -\frac{8EI k_0}{\Delta H b} \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3} q(x, \xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi - \\ & - \frac{P}{2} (1 - e^{-\beta x} \cos \beta x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) можно получить также интегрированием из (1.10).

Из равенства (1.10) следует, что искомая функция  $q(x, t)$  состоит из двух слагаемых, первое из которых зависит от двух переменных  $x$  и  $t$ , а второе слагаемое представляет, зависящее только от  $x$ , известное упруго-мгновенное решение.

В силу изложенного, решение (1.10) будем искать в виде

$$q(x, t) = X(x)T(t) - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.5)$$

При  $t = 0$ , из (2.5) и (1.6) непосредственно следует, что

$$q(x, 0) = X(x) T(0) + q(x, 0),$$

или

$$T(0) = 0. \quad (2.6)$$

Внося (2.5) в (2.4), будем иметь

$$\begin{aligned} T(t) \int_0^x X(x) dx - \frac{P}{2} \beta \int_0^x (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} dx = \\ = - \frac{8EI k_0 X'''(x)}{\Delta H b} \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi + \\ + \frac{16PEI k_0 \beta^4}{\Delta H b} \int_0^t \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi - \frac{P}{2} \left( 1 - e^{-\beta x} \cos \beta x \right). \end{aligned}$$

Имея в виду

$$\begin{aligned} \int_0^x (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} dx = \left[ \frac{(\sin \beta x - \cos \beta x) e^{-\beta x}}{2\beta} - \right. \\ \left. - \frac{(\cos \beta x + \sin \beta x) e^{-\beta x}}{2\beta} \right]_0^x = \frac{1}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta x} \cos \beta x \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\int_0^t \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi = \frac{H^2}{8c} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda t} \right), \quad (2.8)$$

получим

$$\begin{aligned} T(t) \int_0^x X(x) dx = - \frac{8EI k_0 X'''(x)}{\Delta H b} \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi + \\ + \frac{2PEI k_0 H \beta^4}{\Delta c b} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda t} \right) e^{-\beta x} \cos \beta x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Внося (2.5) в (1.10) и имея в виду (2.8), находим

$$X(x)T(t) = -\frac{8EI k_0 X^{IV}(x)}{\Delta H b} \int_0^1 T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda t} d\xi - \frac{2PEI k_0 H \beta^5}{\Delta c b} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.10)$$

Умножив соотношение (2.9) на  $X^{IV}(x)$  и (2.10) на  $X'''(x)$  и вычитая полученные результаты, имеем:

$$X(t) \cdot X^{IV}(x) \int_0^x X(x) dx - T(t) \cdot X(x) \cdot X^{IV}(x) = \frac{2PEI k_0 H \beta^4}{\Delta c b} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) \left[ X^{IV}(x) \cos \beta x + \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) X'''(x) \right] e^{-\beta x}.$$

Разделив переменные, находим

$$\frac{T(t)}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}} = \frac{2PEI k_0 H \beta^4 [X^{IV}(x) \cos \beta x + \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) X'''(x)] e^{-\beta x}}{\Delta c b [X^{IV}(x) \int_0^x X(x) dx - X(x) X'''(x)]} = \alpha, \quad (2.11)$$

где  $\alpha$  — некоторый параметр.

$$\text{Откуда} \quad T(t) = \alpha \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right). \quad (2.12)$$

$$2P \frac{EI k_0 H}{\Delta c b} \beta^4 \left[ X^{IV}(x) \cos \beta x + \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) X'''(x) \right] e^{-\beta x} = \alpha \left[ X^{IV}(x) \int_0^x X(x) dx - X(x) \cdot X'''(x) \right]. \quad (2.13)$$

Из (2.12) непосредственно следует (2.6).

Имеется возможность выразить интегральный член уравнения (2.13) через производные неизвестной функции  $X(x)$  и упруго-мгновенное решение.

Для этого внося (2.12) в (2.9), получаем

$$\alpha \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) \int_0^x X(x) dx = -\alpha \frac{8EI k_0 X'''(x)}{\Delta H b} \int_0^1 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda \xi}}{v^2} \cdot \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi + \\
& + 2P \frac{Elk_0 H}{\Delta cb} \beta^4 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Исходя из (2.8), имеем

$$\begin{aligned}
& \alpha \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) \int_0^x X(x) dx = - \alpha \frac{8Elk_0 H}{\Delta cb} X^{III}(x) \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) + \\
& + \frac{64Elk_0 \alpha X^{IV}(x)}{\pi^2 \Delta cb} \int_0^t \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda \xi}}{v^2} \cdot \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi + \\
& + 2P \frac{Elk_0 H}{\Delta cb} \beta^4 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Входящий в соотношение (2.15) подинтегральный двойной ряд получается умножением рядов

$$\sum_{u=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{u^2 \lambda \xi}}{u^2} \text{ и } \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda (t-\xi)}}{v^2},$$

которые абсолютно сходятся в интервале  $t > \xi \geq 0$ ; для этих же значений абсолютно сходятся и двойной ряд. Необходимым условием сходимости двойного ряда является стремление к нулю общего члена,

$$\lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} a_{u,v}(\xi, t-\xi) = 0,$$

что, очевидно, имеет место. Так как подинтегральные функции  $a_{u,v}(\xi, t-\xi)$ , ( $u, v = 1, 3, 5, \dots$ ) непрерывны в промежутке  $T > \xi \geq 0$  и составленный из них двойной ряд сходится в этом промежутке равномерно, допустимо почленное интегрирование такого функционального ряда: т. е. имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda \xi}}{v^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi = \int_0^t \sum_{u,v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-[u^2 + v^2 (t-\xi)] \lambda}}{v^2} d\xi = \\
& = \frac{H^2}{c \pi^2} \left[ \sum_{u,v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{u^2 (u^2 - v^2)} - \sum_{u,v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-u^2 \lambda t}}{u^2 (u^2 - v^2)} \right]. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Заметив, что сумма сходящегося с положительными членами двойного ряда не зависит от способа суммирования, получим

$$\sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \xi}}{v^2} \cdot \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 (1-\xi)} d\xi = 0. \quad (2.17)$$

Введя обозначение

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta c b}{4 E l k_0 H}}, \quad (2.18)$$

и имея в виду (2.17), из (2.15) находим

$$\int_0^x X(x) dx = -\frac{X'''(x)}{4\gamma^4} + \frac{P}{2} \frac{\beta^4}{\alpha \gamma^4} e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.13) и преобразуя, получим

$$X^{IV}(x) + 4\gamma^4 X(x) + 2P \frac{\beta^5}{\alpha} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} = 0. \quad (2.20)$$

Таким образом, определение функции  $X(x)$  сводится к решению обыкновенного линейного неоднородного уравнения четвертого порядка (2.20).

Отметим, что уравнение (2.20) получается также, если в уравнение (1.10) вносить (2.5) и (2.12) и использовать результат (2.17).

Решение соответствующего однородного уравнения

$$X^{IV}(x) + 4\gamma^4 X(x) = 0, \quad (2.21)$$

будет:

$$\bar{X}(x) = (c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x) e^{\gamma x} + (c_3 \sin \gamma x + c_4 \cos \gamma x) e^{-\gamma x}. \quad (2.22)$$

Корни характеристического уравнения однородного уравнения (2.21) отличаются от  $\beta$  ( $1 \pm i$ ), поэтому частное решение полного уравнения (2.20) ищется в виде

$$\bar{X}(x) = (A \sin \beta x + B \cos \beta x) e^{-\beta x}, \quad (2.23)$$

которое не является уже решением уравнения (2.21). Здесь  $A$  и  $B$  — неопределенные постоянные, для определения которых внеся (2.23) в (2.20),

$$-4\beta^4 (A \sin \beta x + B \cos \beta x) e^{-\beta x} + 4\gamma^4 (A \sin \beta x + B \cos \beta x) e^{-\beta x} + \frac{2P}{\alpha} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} = 0$$

и сократив на  $e^{-\beta x}$ , получим

$$4A (\gamma^4 - \beta^4) \sin \beta x + 4B (\gamma^4 - \beta^4) \cos \beta x + \frac{2P}{\alpha} \beta^3 \sin \beta x + \frac{2P}{\alpha} \beta^3 \cos \beta x = 0.$$

Приравняв коэффициенты у членов, содержащих  $\sin \beta x$  и  $\cos \beta x$ , найдем

$$A = B = \frac{P \beta^3}{2\alpha (\gamma^4 - \beta^4)}. \quad (2.24)$$

Исходя из (2.22), (2.23) и (2.24), общее решение полного уравнения (2.20) будет

$$X(x) = \bar{X}(x) + \bar{X}(x)$$

или

$$X(x) = (c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x) e^{\gamma x} + (c_3 \sin \gamma x + c_4 \cos \gamma x) e^{-\gamma x} + \frac{P}{2} \frac{\beta^5}{\alpha(\gamma^4 - \beta^4)} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.25)$$

Внеся (2.25) и (2.12) в (2.5), получим общее решение интегродифференциального уравнения (1.10) в виде

$$q(x, t) = \left[ (c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x) e^{\gamma x} + (c_3 \sin \gamma x + c_4 \cos \gamma x) e^{-\gamma x} + \frac{P \beta^5}{2\alpha(\gamma^4 - \beta^4)} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) \alpha - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.26)$$

Исключение составляет частный случай, когда

$$\gamma = \beta, \quad (2.27)$$

тогда  $\beta(1 \pm i)$  являются корнями характеристического уравнения, соответствующего однородного уравнения (2.21), кратностью 1. При этом частное решение полного уравнения (2.20) надо искать в виде

$$\bar{X}_1(x) = x(A_1 \sin \beta x + B_1 \cos \beta x) e^{-\beta x}, \quad (2.28)$$

тогда

$$X_1^{IV}(x) = 8\beta^3(A_1 - B_1)e^{-\beta x} \sin \beta x + 8\beta^3(A_1 + B_1)e^{-\beta x} \cos \beta x - 4A_1\beta^4 x e^{-\beta x} \sin \beta x - 4B_1\beta^4 x e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (2.29)$$

Подставляя (2.28) и (2.29) в (2.20) и приравнявая коэффициенты при выражениях  $x \sin \beta x$  и  $x \cos \beta x$ , получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{P}{4\alpha} \beta^2 \\ B_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.30)$$

Теперь общий интеграл уравнения (2.20), имея в виду (2.28), (2.30), (2.22) и (2.27), будет

$$X_1(x) = \frac{P}{4\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x + (c_1' \sin \beta x + c_2' \cos \beta x) e^{\beta x} + (c_3' \sin \beta x + c_4' \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.31)$$

Подставив (2.31) и (2.12) в (2.5) и учитывая (2.27), получим общее решение (1.10) в виде

$$q_1(x, t) = \left[ \frac{P}{2\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x + (c_1' \sin \beta x + c_2' \cos \beta x) e^{\beta x} + (c_3' \sin \beta x + c_4' \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) \alpha - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (2.32)$$

Условие (2.27) на основе (1.7) и (2.18) дает

$$k_1 = \frac{\Delta c}{k_0 H} \quad (2.33)$$

Но, как известно, коэффициент консолидации грунта с равняется

$$c = \frac{k_0(1 + \varepsilon_0)}{\Delta a}, \quad (2.34)$$

где

$\varepsilon_0$  — средний коэффициент пористости грунта,

$a$  — коэффициент уплотнения или сжимаемости грунта.

Внося (2.34) в (2.33), получим

$$k_1 = \frac{1 + \varepsilon_0}{aH} \quad (2.35)$$

обозначив среднюю приведенную толщину слоя грунта через

$$H_0 = \frac{H}{1 + \varepsilon_0},$$

получим

$$k_1 = \frac{1}{aH_0} \quad (2.36)$$

Так как коэффициент податливости грунта —  $k_1$  равен силе, действующей на единицу площади грунта и вызывающей осадку, равную единице длины и коэффициент уплотнения грунта —  $a$  аналогичен обратной величине модуля нормальной упругости, то соотношение (2.36) будет иметь место при больших значениях давления или при определенных, но небольших  $H_0$ .

Соотношение (2.36) связывает две характеристики грунта, согласно чему коэффициент податливости —  $k_1$  равняется обратной величине коэффициента уплотнения грунта —  $a$  при единичной приведенной толщине сжимаемого слоя.

В выражениях  $\beta$  и  $\gamma$  в (1.7) и (2.18) величины  $k_1$  и  $a$  входят в  $\sqrt[4]{k_1}$  и  $\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$ , в силу этого даже значительные колебания их отражаются сравнительно слабо на результатах расчета.

Вследствие сказанного, по средним значениям этих коэффициентов возможно провести общую качественную оценку прочности грунта.

Коэффициент податливости (постели) —  $k_1$  зависит от рода грунта и может быть принят [4]:

Для слабых грунтов от 1 до 3 кг/см<sup>3</sup>

„ средних „ от 3 до 7 „

„ плотных „ от 7 до 15 „

Средние значения коэффициента уплотнения —  $a$  для указанных типов грунтов можно принять [1]:

для грунтов чрезмерной сжимаемости —  $0,1 \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$ ;  
 " " средней "  $0,01$  " ;  
 " " малой "  $0,001$  " ;  
 Исходя из (2.36)

$$H_0 = \frac{1}{a \cdot k_1},$$

тогда, чтобы имело место для вышеприведенных типов грунтов особое условие (2.27), они должны иметь следующие значения приведенной высоты слоя,

$$H_1 = 10 \div 3,3 \text{ см}, H_2 = 33,3 \div 14,3 \text{ см}, H_3 = 143 \div 66,7 \text{ см}.$$

Если изменение по  $x$  величины  $q_1(x, t)$  уподобить затухающему колебательному движению, то (2.27) означает совпадение периодов свободных колебаний балки  $\frac{2\pi}{\gamma}$  и  $\frac{2\pi}{\beta}$  при продолжительном и мгновенном воздействиях силы  $P$ .

3. *Определение произвольных постоянных.* Для рассматриваемой части балки ( $0 \leq x \leq \infty$ ) произвольные постоянные определяются из вышеприведенных граничных и начальных условий (1.11), (1.12), (1.13), (1.6).

Внеся (1.11) в (2.26), получаем

$$c_1 = c_2 = 0, \quad (3.1)$$

тогда

$$q(x, t) = a \left[ (c_3 \sin \gamma x + c_4 \cos \gamma x) e^{-\gamma x} + \frac{P \beta^3}{2 a (\gamma^4 - \beta^4)} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.2)$$

Внеся (3.2) в (1.8), имея в виду (2.7), (2.8), (2.16), (1.2) и производя интегрирование, получаем

$$\delta(x, t) = \frac{k_0 H a}{\Delta c b} \left\{ (c_3 \sin \gamma x + c_4 \cos \gamma x) e^{-\gamma x} + \left[ \frac{P \beta^3}{2 a (\gamma^4 - \beta^4)} + \frac{P \beta}{2 a} \right] (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right\} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{8 E I \beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.3)$$

Исходя из (3.3), имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = \frac{k_0 H a}{\Delta c b} & \left\{ \gamma [(c_3 - c_4) \cos \gamma x - (c_3 + c_4) \sin \gamma x] e^{-\gamma x} - \right. \\ & - \frac{P}{a} \beta^2 \left( \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} - 1 \right) e^{-\beta x} \sin \beta x \left. \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{P}{4 E I \beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x, \right. \end{aligned} \quad (3.4)$$

тогда из (1.12)

$$\varphi(0, t) = \frac{k_0 H \alpha}{\Delta c b} (c_3 - c_4) \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) = 0,$$

отсюда

$$c_3 = c_4, \quad (3.5)$$

тогда (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta(x, t) = \frac{k_0 H \alpha}{\Delta c b} \left\{ c_3 (\sin \gamma x + \cos \gamma x) e^{-\gamma x} - \frac{P}{2} \frac{\beta}{\alpha} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) (\sin \beta x + \right. \\ \left. + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right\} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{8 E I \beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Исходя из (3.6) для поперечной силы, получим

$$\begin{aligned} Q(x, t) = \frac{E I k_0 H \alpha}{\Delta c b} \left[ 4 \gamma^3 c_3 e^{-\gamma x} \cos \gamma x - 2P \frac{\beta^4}{\alpha} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) e^{-\beta x} \cos \beta x \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На основе (3.7), учитывая (1.13), находим:

$$\begin{aligned} Q(0, t) = \frac{E I k_0 H \alpha}{\Delta c b} \left[ 4 \gamma^3 c_3 - \frac{2P}{\alpha} \beta^4 \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \\ - \frac{P}{2} = -\frac{P}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 4 \gamma^3 c_3 - \frac{2P}{\alpha} \beta^4 \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) = 0, \\ c_3 = \frac{P}{2\alpha} \frac{\beta^4}{\gamma^4} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Внеся (3.1) и (3.8) в (3.2), находим

$$\begin{aligned} q(x, t) = \frac{P}{2} \beta^4 \left[ \frac{1}{\gamma^3} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) (\sin \gamma x + \cos \gamma x) e^{-\gamma x} + \frac{\beta}{\gamma^4 - \beta^4} (\sin \beta x + \right. \\ \left. + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, из значения искомой функции  $q(x, t)$  исключается произвольный параметр  $\alpha$  и соотношение (3.9) дает окончательное выражение решения уравнений (1.10). Это означает, что  $\alpha = 1$ .

Внеся (3.8) в (3.6), получим

$$\delta(x, t) = \frac{Pk_0H}{2\Delta cb} \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left[ \frac{\beta^3}{\gamma^3} (\sin \gamma x + \cos \gamma x) e^{-\gamma x} - (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) - \frac{P}{8EI\beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}.$$

Исходя из (2.18), будем иметь

$$\delta(x, t) = \frac{P}{8EI\gamma^4} \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left[ \frac{\beta^3}{\gamma^3} (\sin \gamma x + \cos \gamma x) e^{-\gamma x} - (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) - \frac{P}{8EI\beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.10)$$

Внеся (3.5) и (3.8) в (3.4) и имея в виду (2.18), находим

$$\varphi(x, t) = \frac{P}{4EI\gamma^4} \beta^2 \left( \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} - 1 \right) \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} e^{-\gamma x} \sin \gamma x - e^{-\beta x} \sin \beta x \right) \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) + \frac{P}{4EI} \beta^2 e^{-\beta x} \sin \beta x, \quad (3.11)$$

$$M(x, t) = \frac{P\beta^4}{4\gamma^4} \left( \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} - 1 \right) \left[ \frac{\beta}{\gamma} (\cos \gamma x - \sin \gamma x) e^{-\gamma x} - (\cos \beta x - \sin \beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) + \frac{P}{4\beta} (\cos \beta x - \sin \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.12)$$

Внеся (3.8) в (3.7) и имея в виду (2.18), находим

$$Q(x, t) = \frac{P}{2} \left[ \frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left( e^{-\gamma x} \cos \gamma x - e^{-\beta x} \cos \beta x \right) \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) - e^{-\beta x} \cos \beta x \right]. \quad (3.13)$$

Расчетные величины при изгибе балки достигают своего максимального значения в опасном сечении  $x=0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; тогда из соотношений (3.9), (3.10), (3.12) и (3.13) находим

$$q(x, t)_{\max} = q(0, \infty) = \frac{P}{2} \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left( \frac{\beta^3}{\gamma^3} - 1 \right); \quad (3.14)$$

$$\delta(x, t)_{\max} = \delta(0, \infty) = \frac{P}{8EI\beta^3} \left[ \frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left( \frac{\beta^3}{\gamma^3} - 1 \right) - 1 \right]; \quad (3.15)$$

$$M(x, t)_{\max} = M(0, \infty) = \frac{P}{4\beta} \left[ \frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left( \frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) + 1 \right]; \quad (3.16)$$

$$Q(x, t)_{\max} = Q(0, \infty) = Q(0, t) = Q(0, 0) = -\frac{P}{2}. \quad (3.17)$$

Эти соотношения показывают, что только максимальное значение поперечной силы остается то же самое, что и при упруго-мгновенной задаче.

Определим значение произвольных постоянных в указанном особом случае, когда имеет место (2.27).

Значение  $q_1(x, t)$ , определяемое соотношением (2.32) будет удовлетворять граничному условию (1.11) лишь при

$$c_1' = c_2' = 0, \quad (3.18)$$

тогда

$$q_1(x, t) = \alpha \left[ \frac{P}{2\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x + (c_1' \sin \beta x + c_2' \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.19)$$

Внося (3.19) в (1.8), имея в виду (2.7), (2.8), (2.16), (2.2) и (2.18) и произведя интегрирование, получаем

$$\hat{q}_1(x, t) = \frac{\alpha}{4 E I \beta^4} \left[ \frac{P}{2\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x + (c_1' \sin \beta x + c_2' \cos \beta x) e^{-\beta x} - \frac{P}{2\alpha} \beta (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{8 E I \beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}. \quad (3.20)$$

На основе (3.20)

$$\varphi_1(x, t) = \frac{\alpha}{4 E I \beta^4} \left[ \frac{P}{2\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{P}{2\alpha} \beta^3 x e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{P}{2\alpha} \beta^3 x e^{-\beta x} \cos \beta x + \right. \\ \left. + \beta \left[ (c_1' - c_2') \cos \beta x - (c_1' + c_2') \sin \beta x \right] e^{-\beta x} + P \beta^2 e^{-\beta x} \sin \beta x \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) + \frac{P e^{-\beta x}}{4 E I \beta^2} \sin \beta x, \quad (3.21)$$

тогда (1.12) дает

$$\varphi_1(0, t) = \frac{\alpha}{4 E I \beta^3} (c_1' - c_2') \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) = 0$$

или

$$c_1' = c_2'. \quad (3.22)$$

При этом

$$\hat{q}_1(x, t) = \frac{\alpha}{4 E I \beta^4} \left[ \frac{P}{2\alpha} \beta^2 x e^{-\beta x} \sin \beta x + \left( c_1' - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{8 E I \beta^3} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x}; \quad (3.23)$$

$$Q_1(x, t) = \frac{1}{4} \left[ 3Pe^{-\beta x} \cos \beta x - Pe^{-\beta x} \sin \beta x + 2P\beta x e^{-\beta x} \sin \beta x + 4 \frac{\alpha}{\beta} \left( c'_2 - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) e^{-\beta x} \cos \beta x \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (3.24)$$

На основе (3.24) и (1.13)

$$Q_1(0, t) = \frac{1}{4\beta^4} \left[ 3P\beta^4 + 4\alpha\beta^3 \left( c'_2 - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} = -\frac{P}{2},$$

или

$$3P\beta + 4\alpha \left( c'_2 - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) = 0,$$

откуда

$$c'_2 = -\frac{P}{4\alpha} \beta. \quad (3.25)$$

Внеся (3.18) и (3.25) в (3.19), находим окончательно

$$q_1(x, t) = \frac{P}{2} \beta \left\{ \left[ \beta x e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{1}{2} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right\}. \quad (3.26)$$

Внеся (3.25) в (3.23), получаем

$$\delta_1(x, t) = \frac{P}{8EI\beta^3} \left\{ \left[ \beta x e^{-\beta x} \sin \beta x - \frac{3}{4} (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - (\sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \right\}. \quad (3.27)$$

Внеся (3.22) и (3.25) в (3.21), получаем

$$\varphi_1(x, t) = \frac{P}{4EI\beta^2} \left\{ \frac{e^{-\beta x}}{2} \left[ 2 \sin \beta x - \beta x (\sin \beta x + \cos \beta x) \right] \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) + e^{-\beta x} \sin \beta x \right\}. \quad (3.28)$$

$$M_1(x, t) = \frac{P}{4} \beta \left\{ (2\beta x \sin \beta x - \sin \beta x + \cos \beta x) e^{-\beta x} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) + (\cos \beta x - \sin \beta x) e^{-\beta x} \right\}. \quad (3.29)$$

Внеся (3.25) в (3.24), получаем

$$Q_1(x, t) = \frac{P}{4} \left[ \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) (2\beta x - 1) e^{-\beta x} \sin \beta x - 2 e^{-\beta x} \cos \beta x \right] \quad (3.30)$$

Расчетные величины при условии (2.27,) аналогично вышеуказанному, будут

$$q_1(x, t)_{\max} = q_1(0, \infty) = -\frac{3}{4} \frac{P}{\beta} = \frac{3}{2} q(x, 0)_{\max} = 1,5 q(0, 0);$$

$$\delta_1(x, t)_{\max} = \delta_1(0, \infty) = -\frac{5P}{32 E \beta^3} = \frac{5}{4} \delta(x, 0)_{\max} = 1,25 \delta(0, 0);$$

$$M_1(x, t)_{\max} = M_1(0, \infty) = \frac{P}{2} \beta = 2 M(x, 0)_{\max} = 2,00 M(0, 0),$$

$$Q_1(x, t)_{\max} = Q_1(0, \infty) = -\frac{P}{2} = Q(x, 0)_{\max} = Q_1(0, t) = Q(0, 0);$$

Таким образом, кроме максимальной поперечной силы, остальные расчетные величины при учете фильтрационной консолидации грунта податливого основания, получаются значительно больше, чем в случае упруго-мгновенной задачи.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступило 9 IX 1954 г.

### Թ. Յ. Առաքելյան

## ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱՏԱՐԱԾ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՀԵԾԱՆԻ ԾՈՌԻՄԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ջրով հագեցած գրունտի վրա ամբողջ երկարությամբ հենված պրիզմատիկ հեծանի ծռումը գիտելիս բևեռ ակնթարթային և տեական ազդեցության ղեպքերում հեծանի և գրունտի տեղափոխումները տարրերում են:

Հիմնատակի որոշ երկրաբանական պայմանների ղեպքում և խոշոր կառուցվածքների համար ընդունվում է, որ հիմնատակի երկֆազ գրունտի ղեֆորմացիան հեծանի ազդեցության տակ կարելի է բնութագրել գրունտի ուղղագծային ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայով:

Վերահիշյալի հիման վրա հիմնատակի հակազդման ինտենսիվությունը որոշելու համար ստացվում է (1.10) ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումը, (1.11), (1.12), (1.13) եզրային պայմաններով և (1.6) սկզբնական պայմանով:

Այդ հավասարման լուծումը վերածվում է (2.20) սովորական անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Ինտեգրման հաստատունների արժեքները որոշելիս պարզվում է, որ  $q(x, t)$  անհայտ ֆունկցիայից արտաքսվում է  $\alpha$  ստրամետորը: (1.10) հավասարման լուծումը տրվում է (3.9) տեսքով:

Տրված է նաև (1.10) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը (2.27) պայմանի գոյություն դեպքում (3.26) տեսքով:

Եւրված են ծաման բոլոր էլեմենտների արտահայտությունները վերահիշյալ երկու դեպքերի համար:

Վերջին դեպքում ծաման հաշվային մեծությունները, բացի մաքուր մալ կտրող ուժից, ստացվում են զգալի մեծ արժեքներով, քան տառձգական-սկիւթարձային խնդրի լուծման արդյունքները:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. Гос. изд. строит. и арх. лит., М., 1951.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
3. Аракелян Т. Т. Расчет балок на сплошном грунтовом основании. Изв. АН Армянской ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, том IV, № 2, 1953.
4. Герсегованов Н. М. Собрание сочинений, том II, Стройвоенмориздат, М., 1948.