

Л. К. Капанян

Об изгибе некоторых полых консольных стержней

§ 1. Решение задачи об изгибе с помощью аналитической функции

Рассмотрим изгиб консольного призматического стержня силой P , приложенной к концу консоли и совпадающей по направлению с одной из главных центральных осей поперечного сечения.*

Решение задачи сводится к определению функции напряжений $\Phi(x, y)$ из дифференциального уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \frac{P}{I} y - \frac{d\bar{f}}{dy}, \quad (1)$$

где σ — коэффициент Пуассона,

I — момент инерции сечения относительно нейтральной оси OY ,

$\bar{f}(y)$ — произвольная функция координаты y .

Функция напряжений на контуре должна удовлетворять условию: ρ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[\frac{Px^2}{2I} - \bar{f}(y) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (2)$$

Компоненты касательных напряжений по осям координат будут

$$X_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \bar{f}(y), \quad (3)$$

$$Y_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4)$$

В целях упрощения (2) в последующем ходе решения задачи примем:

$$\bar{f}(y) = -\frac{Py^2}{2I}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{Py}{I} \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma}. \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma} = C; \quad \frac{P}{I} = B. \quad (7)$$

Тогда (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = BCy. \quad (8)$$

* Статья была сдана в печать, когда изм стало известно о работе Ю. А. Амензэде [1], в которой приведено решение этой же задачи методом, предложенным Д. И. Шерманом.

Решение (8) может быть представлено через комплексные переменные в виде

$$\Phi = -\frac{CB}{48i}(z - \bar{z})^3 + \varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \quad (9)$$

где $\frac{CB}{48i}(z - \bar{z})^3$ — частное решение, а $[\varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z})]$ — гармоническая функция, являющаяся общим решением (8) без правой части.

Исследуем функцию $\varphi_1(z)$ с точки зрения многозначности. Предположим, что $\varphi_1(z)$ содержит в себе логарифмический член, т.е. в случае двусвязной области может оказаться многозначной. Допустим, что:

$$\varphi_1(z) = \varphi^*(z) + A_1 \ln z, \quad (10)$$

где $\varphi^*(z)$ — однозначная функция.

Для определения величины A_1 используем теорему о циркуляции касательного напряжения при изгибе [2]. Теорема эта выражается следующей формулой:

$$\int_L T_s ds = \left[2\mu\tau - \frac{Py_0}{(1+\nu)I} \right] \Omega, \quad (11)$$

где интеграл взят по любому замкнутому контуру L ,

Ω — площадь внутри рассматриваемого контура,

y_0 — ордината центра тяжести площади Ω .

Так как в рассматриваемом случае изгиб не сопровождается кручением, то $\tau = 0$, кроме того, начало координат совпадает с центром тяжести сечения, значит и $y_0 = 0$, тогда из (11) следует

$$\int_L T_s ds = 0. \quad (12)$$

Из другого соотношения, приведенного также в [2], имеем:

$$\int_L T_s ds = - \int_L \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = - \iint f'(y) dx dy, \quad (13)$$

Учитывая, что

$$f'(y) = -\frac{P}{I} y,$$

получим:

$$\iint f'(y) dx dy = -\frac{P}{I} \iint y dx dy = 0. \quad (14)$$

Имея в виду (12) и (14), перепишем (13) в виде

$$\int_L \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0. \quad (15)$$

В случае двусвязной области соотношение (15) должно иметь место как на внутреннем, так и на внешнем контурах сечения.

Далее, умножим обе части уравнения (2) на $-ids$, после чего проинтегрируем его по всему контуру сечения и сложим полученное выражение с (15); в результате имеем:

$$\int_L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) ds = - \frac{P}{2I} i \int_L (x^2 + y^2) dy. \quad (16)$$

Применяя формулу Грина, преобразуем правую часть (16), после чего получим:

$$\int_L (x^2 + y^2) dy = \iint 2x dx dy = 2x_0 \Omega.$$

Но в рассматриваемом случае центр тяжести совпадает с началом координат, значит $x_0 = 0$ и

$$\int_L (x^2 + y^2) dy = 0. \quad (17)$$

Левую часть (16) приведем к комплексному виду. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

после некоторых преобразований в левой части (16) получим:

$$\int_L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) ds = -2i \int_L \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz. \quad (19)$$

Подстановка (19) и (17) в (16) дает

$$\int_L \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0. \quad (20)$$

Введя в (20) выражение функции напряжений (9) в виде

$$\Phi = -\frac{CB}{48i} (z - \bar{z})^3 + \varphi_1^*(z) + A_1 \ln z + \bar{\varphi}_1^*(\bar{z}) + \bar{A}_1 \ln \bar{z},$$

получим $\int_L \frac{A_1}{z} dz = 0$ или $2\pi i A_1 = 0$, откуда следует, что $A_1 = 0$, значит и $\bar{A}_1 = 0$. Следовательно, функция $\varphi_1(z)$ есть однозначная функция.

Контурное условие нашей задачи приведем к комплексному виду.

Учитывая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds}$, $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ и $dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$, из (2) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{dz}{dz} = \frac{B}{4i} z \bar{z} \left(1 - \frac{dz}{dz} \right). \quad (21)$$

Касательные напряжения также выразим в функции комплексного переменного. Введя (5) в (3), имеем

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{P x^2}{2l} - \frac{P y^2}{2l}. \quad (22)$$

Умножим (4) на $-i$ и сложим с (22), тогда получим

$$X_z - iY_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{P}{2l} (x^2 + y^2)$$

или, имея в виду (18), перепишем это выражение в виде

$$X_z - iY_z = 2i \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{P}{2l} z \bar{z}. \quad (23)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе полого консольного стержня сводится к определению функции напряжений Φ или в силу (9)—аналитической функции $\varphi_1(z)$, при помощи контурных условий задачи.

§ 2. Решение задачи об изгибе призматического консольного стержня круглого сечения с квадратным вырезом

Для определения функции $\varphi_1(z)$ применим метод конформного отображения.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ отображает область поперечного сечения рассматриваемого стержня на круговое кольцо. Тогда $\varphi_1(z)$ примет вид $\varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$. Функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области кольца и поэтому разлагается в ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}. \quad (24)$$

После подстановки в (9) выражений $z = \omega(\zeta)$ и $\varphi_1(z) = \varphi(\zeta)$, функция напряжений примет вид

$$\Phi = -\frac{CB}{48i} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^3 + \varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}). \quad (25)$$

В контурное условие (21) тоже введем функцию $z = \omega(\zeta)$. Вычислив предварительно величины, входящие в (21), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{CB}{16i} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} &= \frac{CB}{16i} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 + \frac{\bar{\varphi}'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{\rho^2}{\zeta^2} \frac{\bar{\omega}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (27)$$

Введя (26) и (27) в (21), условие на контуре перепишем в виде

$$-\frac{CB}{16i} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\rho^2}{\zeta^2} \frac{\bar{\omega}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{CB}{16i} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} = \frac{B}{4i} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \left[1 + \frac{\rho^2 \bar{\omega}'(\zeta)}{\zeta^2 \omega'(\zeta)} \right].$$

После некоторых преобразований окончательно имеем:

$$-\frac{B}{16i} [\zeta^2 \omega'(\zeta) + \rho^2 \bar{\omega}'(\bar{\zeta})] \{ C[\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 + 4\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \} = \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) \rho^2 - \varphi'(\zeta) \zeta^2. \quad (28)$$

Для рассматриваемой двусвязной области условие (28) должно быть удовлетворено на ее внешнем и внутреннем контурах.

Подставив в (28) $\zeta = t_0 = \rho_0 e^{i\theta}$, где ρ_0 — радиус внешнего контура кольца, получим условие на внешнем контуре

$$-\frac{B}{16i} [t_0^2 \omega'(t_0) + \rho_0^2 \bar{\omega}'(\bar{t}_0)] \{ C[\omega(t_0) - \bar{\omega}(\bar{t}_0)]^2 + 4\omega(t_0) \bar{\omega}(\bar{t}_0) \} = \rho_0^2 \bar{\varphi}'(\bar{t}_0) - t_0^2 \varphi'(t_0), \quad (29)$$

а при $\zeta = t_1 = \rho_1 e^{i\theta}$, где ρ_1 — внутренний радиус кольца, из (28) имеем условие на внутреннем контуре:

$$-\frac{B}{16i} [t_1^2 \omega'(t_1) + \rho_1^2 \bar{\omega}'(\bar{t}_1)] \{ C[\omega(t_1) - \bar{\omega}(\bar{t}_1)]^2 + 4\omega(t_1) \bar{\omega}(\bar{t}_1) \} = \rho_1^2 \bar{\varphi}'(\bar{t}_1) - t_1^2 \varphi'(t_1). \quad (30)$$

Решим задачу об изгибе консоли круглого сечения с квадратным вырезом.

Воспользуемся функцией, отображающей внешность квадрата с закругленными углами на внешность единичного круга, приведенной в работе Неймана [4]

$$z = \omega(\zeta) = K \left(\zeta + \frac{1}{9} \zeta^{-3} \right), \quad (31)$$

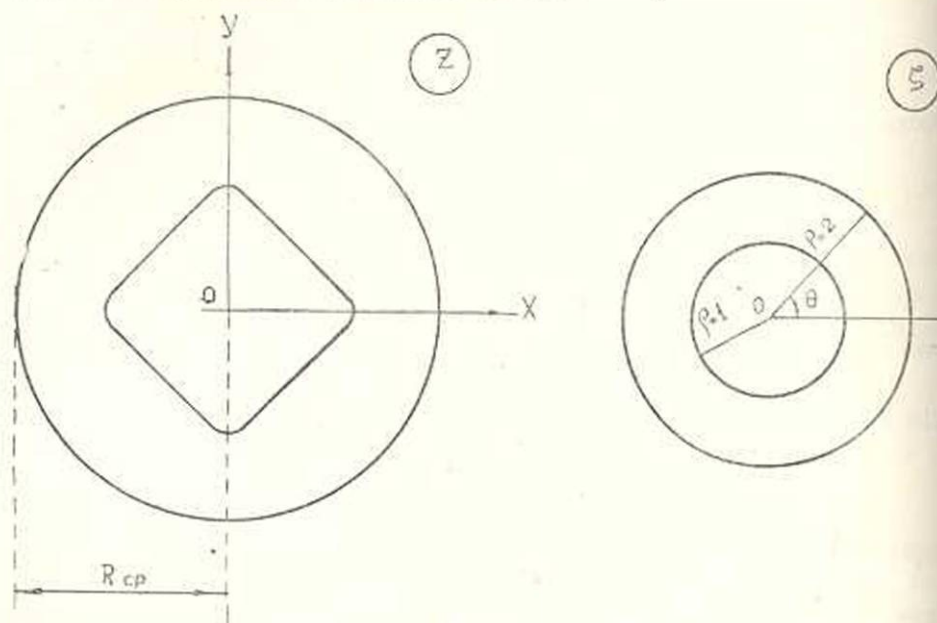
где K — постоянный параметр.

Функция эта преобразует окружности $\rho > 1$ на плоскости ζ в замкнутые кривые на плоскости z , которые, начиная с некоторого значения $\rho > 1$, весьма близки к окружности. Например, при $\rho_0 = 2$ (фиг. 1), $|z| = R_{\min} = 1,9861K$, а $|z| = R_{\max} = 2,0139K$, разница между $R_{\max}$ и $R_{\min}$ составляет $1,4\%$. Чем больше будет величина ρ_0 , тем меньше станет разница между $R_{\max}$ и $R_{\min}$; это значит, что всякая кривая на

плоскости z , соответствующая $\rho_0 \gg 2$, может быть принята за окружность.

Примем квадрат за внутренний контур сечения, а кривую, соответствующую $\rho_0 = 2$, за внешний контур.

Таким образом, (31) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую вышеуказанную двусвязную область на кольцо.



Фиг. 1.

Перепишем (31), обозначив коэффициент при втором члене этого выражения буквой A

$$z = \omega(\zeta) = K(\zeta + A\zeta^{-3}). \quad (32)$$

Найдем производные (32) и (24)

$$\omega'(\zeta) = K(1 - 3A\zeta^{-4}), \quad (33)$$

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)a_{k+1}\zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-k+1)b_{-k+1}\zeta^{-k}. \quad (34)$$

Введя (32), (33) и (34) в условие на внешнем контуре (29), где $\zeta = t_0$, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{BK^3}{16i} [t_0^2 - 3At_0^{-2} + \rho_0^2 - 3A\rho_0^2\bar{t}_0^{-4}] [Ct_0^2 + 2ACt_0^{-2} + A^2Ct_0^{-6} + \\ & + C\bar{t}_0^{-2} + 2A\bar{C}t_0^{-2} + A^2\bar{C}t_0^{-6} + (4-2C)t_0\bar{t}_0 + (4-2C)At_0\bar{t}_0^{-3} + \\ & + (4-2C)A\bar{t}_0t_0^{-3} + (4-2C)A^2t_0^{-3}\bar{t}_0^{-3} = \\ & = \rho_0^2 \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)\bar{a}_{k+1}\bar{t}_0^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-k+1)\bar{b}_{-k+1}\bar{t}_0^{-k} - \right. \end{aligned}$$

$$-t_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t_0^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-k+1) b_{-k+1} t_0^{-k} \right]. \quad (35)$$

Напомним, что в (35) $t_0 = \rho_0 e^{ik\theta}$, где ρ_0 — радиус внешней окружности кольца.

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях e в правой и левой частях (35) дает, при $k = 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$, следующую конечную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_0^2 \bar{a}_1 + b_1 &= [-AC + (4-C)\rho_0^4 - 2(4+C)\rho_0^{-4}A^2] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 3\bar{a}_3 \rho_0^4 + 3b_3 \rho_0^{-2} &= [-2(4-3C)A + C\rho_0^4 - 3(4-C)A^3\rho_0^{-8}] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 5\bar{a}_5 \rho_0^6 + 5b_5 \rho_0^{-4} &= [(4-5C)A - 5A^2C\rho_0^{-4}] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 7\bar{a}_7 \rho_0^8 + 7b_7 \rho_0^{-6} &= (-12 + 7C)A^2\rho_0^{-4} \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 9\bar{a}_9 \rho_0^{10} + 9b_9 \rho_0^{-8} &= (-3A^3C\rho_0^{-8}) \left(-\frac{BK^3}{16i} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Из условия (30) следует, что подобная система уравнений должна удовлетворяться и на внутреннем контуре при $\zeta = t_1 = \rho_1 e^{i\theta}$, где $\rho_1 = 1$. Подставив в (36) вместо ρ_0 величину $\rho_1 = 1$, получим новую систему уравнений, вытекающую из условия (30), а именно:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 + b_1 &= [-AC + (4-C) - 2(4+C)A^2] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 3\bar{a}_3 + 3b_3 &= [-2(4-3C)A + C - 3(4-C)A^3] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 5\bar{a}_5 + 5b_5 &= [(4-5C)A - 5A^2C] \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 7\bar{a}_7 + 7b_7 &= (-12 + 7C)A^2 \left(-\frac{BK^3}{16i} \right), \\ 9\bar{a}_9 + 9b_9 &= (-3A^3C) \left(-\frac{BK^3}{16i} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Решая совместно (36) и (37), определим коэффициенты функций $\varphi(\zeta)$ и $\bar{\varphi}(\bar{\zeta})$:

$$\begin{aligned} a_1 = -\bar{a}_1 &= \left[(4-C)(\rho_0^2 + 1) + \frac{2(4+C)A^2(1-\rho_0^{-4})}{\rho_0^2 - 1} \right] \frac{BK^3}{16i}, \\ b_1 = -\bar{b}_1 &= \left[AC + (4-C)\rho_0^2 + \frac{2(4+C)A^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-4})}{\rho_0^2 - 1} \right] \frac{BK^3}{16i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= -\bar{a}_3 = \left[\frac{C}{3} - \frac{2(4-3C)A(\rho_0^2-1) - 3(4-C)A^3(1-\rho_0^{-6})}{3(\rho_0^6-1)} \right] \frac{BK^3}{16i}, \\
 b_3 &= -\bar{b}_3 = \frac{2(4-3C)A(\rho_0^6-\rho_0^2) + 3(4-C)A^3(\rho_0^6-\rho_0^{-6})}{3(\rho_0^6-1)} \frac{BK^3}{16i}, \\
 a_5 &= -\bar{a}_5 = \frac{(4-5C)A(\rho_0^4-1)}{5(\rho_0^{10}-1)} \frac{BK^3}{16i}, \\
 b_5 &= -\bar{b}_5 = \left[A^2C - \frac{(4-5C)A\rho_0^4(\rho_0^6-1)}{5(\rho_0^{10}-1)} \right] \frac{BK^3}{16i}, \\
 a_7 &= -\bar{a}_7 = \frac{(12-7C)A^2(1-\rho_0^2)}{7(\rho_0^{14}-1)} \frac{BK^3}{16i}, \\
 b_7 &= -\bar{b}_7 = \frac{(12-7C)A^2(\rho_0^{14}-\rho_0^2)}{7(\rho_0^{14}-1)} \frac{BK^3}{16i}, \\
 a_9 &= -\bar{a}_9 = 0, \\
 b_9 &= -\bar{b}_9 = \frac{A^3C}{3} \frac{BK^3}{16i}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Применим предлагаемое решение задачи к частным случаям.

а. Изгибающая сила направлена по диагонали квадрата.

Оси координат направим по диагоналям квадрата так, чтобы линия действия силы совпадала бы с осью OX (фиг. 2). В этом случае коэффициент в (32) следует брать со знаком плюс, т. е. $A = \frac{1}{9}$. Тогда отображающая функция (32) примет вид

$$z = \omega(\zeta) = K \left(\zeta + \frac{1}{9} \zeta^{-3} \right), \tag{39}$$

где параметр K выражается через средний радиус внешнего контура сечения

$$R_{\text{ср}} = \frac{R_{\text{max}} + R_{\text{min}}}{2}, \text{ тогда } K = 0,5 R_{\text{ср}}.$$

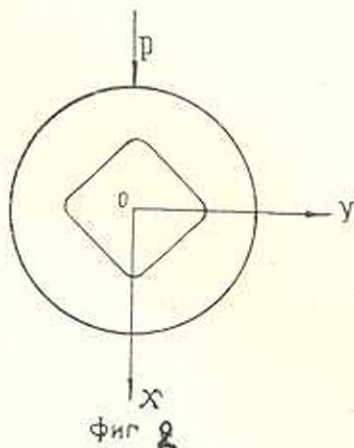
Найдем производную функции (39)

$$\omega'(\zeta) = K \left(1 - \frac{1}{3} \zeta^{-4} \right). \tag{40}$$

Примем коэффициент Пуассона равным 0,3, тогда из (7) получим

$$C = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} = 1,230679.$$

Подставив значения A и C в (38), вычислим коэффициенты разложения функции $\varphi(\zeta)$.



Следовательно, функция $\varphi(\zeta)$ и ее производная $\varphi'(\zeta)$ являются многочленами такого вида:

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_3\zeta^3 + a_5\zeta^5 + a_7\zeta^7 + b_1\zeta^{-1} + b_3\zeta^{-3} + b_5\zeta^{-5} + b_7\zeta^{-7} + b_9\zeta^{-9},$$

$$\varphi'(\zeta) = a_1 + 3a_3\zeta^2 + 5a_5\zeta^4 + 7a_7\zeta^6 - b_1\zeta^{-2} - 3b_3\zeta^{-4} - 5b_5\zeta^{-6} - 7b_7\zeta^{-8} - 9b_9\zeta^{-10}.$$

Перепишем выражение $\varphi'(\zeta)$, подставив туда найденные значения коэффициентов a_k и b_k .

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) = \frac{BK^3}{16i} & (13,886512 + 1,227693\zeta^2 - 3,592245 \cdot 2^{-10}\zeta^4 - \\ & - 0,125356 \cdot 2^{-14}\zeta^6 - 11,383192\zeta^{-2} - 0,076695\zeta^{-4} - \\ & - 0,311780\zeta^{-6} - 0,041846\zeta^{-8} - 0,005067\zeta^{-10}). \end{aligned} \quad (41)$$

Формула (23) может быть преобразована к виду, удобному для вычисления напряжений, если учесть, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{CB}{16i}(z - \bar{z})^2 + \varphi'(z) = -\frac{CB}{4}iy^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

тогда из (23) получим

$$X_z - iY_z = \frac{CB}{2}y^2 + 2\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}i - \frac{B}{2}(x^2 + y^2). \quad (42)$$

Вычислим максимальное напряжение на внутреннем контуре, т. е. в точке, где $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$, $y = 1,111111K$).

В этой точке из (40) и (41) имеем: $\varphi'(\zeta) = 24,236809 \frac{BK^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 0,666666K$. Подставив найденные значения $\varphi'(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$ в (42), получим:

$$X_z = 1,1734 \frac{P}{I} R_{cp}^2, \quad Y_z = 0.$$

Тем же способом найдем максимальное напряжение на внешнем контуре, т. е. в точке $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$, $y = 2,013889K$).

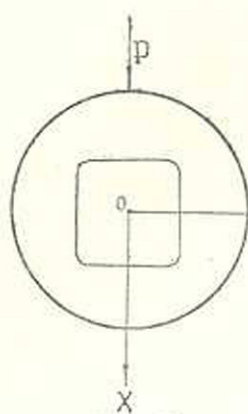
В этой точке $\varphi'(\zeta) = 11,765815 \frac{BK^3}{16i}$, а $\omega'(\zeta) = 0,979167K$. По формуле (42) получим

$$X_z = 0,4919 \frac{P}{I} R_{cp}^2 \text{ и } Y_z = 0.$$

При проверке напряжений в точке $\rho = 2$, $\theta = \pi$ ($x = 2,013889K$, $y = 0$) по формуле (42) находим $X_z = 0$, с точностью до шестого знака, и $Y_z = 0$.

б. Изгибающая сила параллельна стороне квадрата.

Ось OX направим вдоль линии действия силы (фиг. 3). В этом случае $A = -\frac{1}{9}$ и (32) примет вид:



Фиг. 3

$$z = \omega(\zeta) = K \left(\zeta - \frac{1}{9} \zeta^{-3} \right), \quad (43)$$

где $K = 0,5 R_{cp}$.

Подставив величины A и C в (38), вычислим коэффициенты разложения функции $\varphi(\zeta)$.

Вводя полученные значения a_k и b_k в выражение производной функции $\varphi(\zeta)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) = \frac{BK^3}{16i} (13,886512 + 1,233849\zeta^2 + \\ + 3,592245 \cdot 2^{-10\pi^4} - 0,125356 \cdot 2^{-14\pi^6} - \\ - 11,109688\zeta^{-2} + 0,076695\zeta^{-4} + 0,159830\zeta^{-6} - \\ - 0,041846\zeta^{-8} + 0,005067\zeta^{-10}). \end{aligned} \quad (44)$$

Найдем производную функции (43)

$$\omega'(\zeta) = K \left(1 + \frac{1}{3} \zeta^{-4} \right). \quad (45)$$

Определим максимальные напряжения на внешнем и внутреннем контурах по формуле (42).

На внутреннем контуре в точке $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$, $y = 0,888889K$) имеем из (44) и (45): $\varphi'(\zeta) = 23,635811 \frac{BK^3}{16i}$, $\omega'(\zeta) = 1,333333K$. Вычисление напряжений по (42) даст:

$$X_z = 0,5768 \frac{P}{l} R_{cp}^2, \quad Y_z = 0.$$

На внешнем контуре в точке $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$, $y = 1,986111K$) имеем из (44) и (45) $\varphi'(\zeta) = 11,787279 \frac{BK^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 1,020833K$. Напряжения в этой точке, вычисленные по (42), будут

$$X_z = 0,4746 \frac{P}{l} R_{cp}^2, \quad Y_z = 0.$$

Проверим напряжения в точке $\rho = 2$, $\theta = \pi$ ($x = 1,986111K$, $y = 0$).

где по (44) и (45) имеем: $\varphi'(\zeta) = 16,107259 \frac{BK^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 1,020833K$.

По формуле (42) найдем, что в этой точке $X_z = 0$ и $Y_z = 0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 22 XI 1955 г.

Լ. Կ. Կապանցյան

ՈՐՈՇ ՍՆԱՄԵՋ ԿՈՆՍՈԼԱՅԻՆ ՋՈՂԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մնամեջ կոնսոլային պրիզմատիկ ձողի ծոման խնդիրը, ծայրում կիրառված ուժի ազդեցության գեպքում, կարելի է լուծել, եթե հայտնի է ձողի բնդրայնական կտրվածքի երկկապ տիրույթի կոնֆորմ արտադատկերման ֆունկցիան օղակի վրա:

Աշխատության մեջ բերվում է զրահց շրջանաչափ, իսկ ներսից քառակուսով սահմանափակված երկկապ տիրույթն օղակի վրա մոտավոր արտադատկերող ֆունկցիան, որի միջոցով լուծված է քառակուսի անցք ունեցող կլոր կոնսոլային պրիզմատիկ ձողի ծոման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амензаде Ю. А. К вопросу изгиба полых призматич. стержней (Тр. Аз. НИИ нефти, вып. 1, Баку, 1954).
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, М.—Л., 1947.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, М.—Л., 1950.
4. Нейман М. И. Напряжения в балке с криволинейным отверстием, Москва 1937.