ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 3, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Костандян

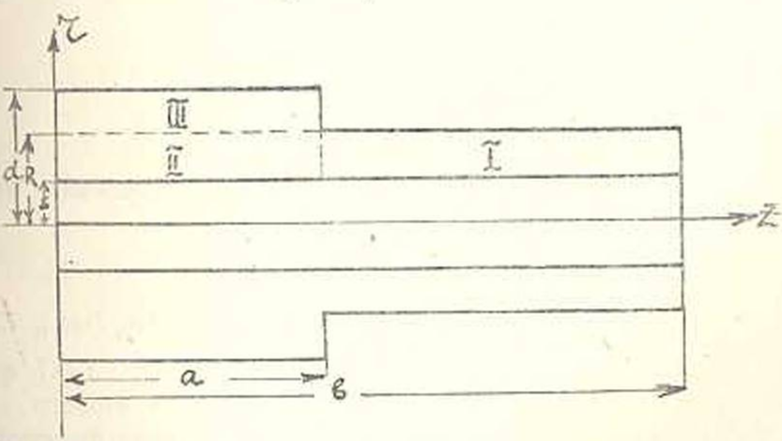
О кручении полого ступенчатого вала

В работе приводится точное решение задачи о кручении полого ступенчатого вала, когда к его торцам приложена симметричная нагрузка, зависящая только от радиуса.

Решение задачи представляется рядами по бесселевым функциям, коэффиценты которых определяются из бесконечной вполне регулярной системы линейных уравнений. Для определения напряжений при кручении даются формулы, зависящие от геометрических параметров вала. В качестве примера рассмотрена задача о кручении полого ступенчатого вала, когда скручивающая нагрузка приложена к торцам вала по линейному закону.

§ 1. Постановка задачи

1°. Возьмем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) и совместим ось z с осью вала (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается (1,2), что поперечные сечения вала при кручении остаются плоскими и перемещение вдоль радиуса вала равно нулю.

При таком предположении из шести составляющих напряжений отличны от нуля только касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$

$$\tau_{r\theta} = \tau_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{1.1}$$

где $\Phi\ (r,\ z)$ — функция напряжения, удовлетворяющая в области осевого сечения уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.2}$$

Граничные условия для функции $\Phi\ (r,\ z)$ определяются законом распределения напряжений на всей поверхности вала.

В том случае, когда внутренняя боковая поверхность полого вала свободна от внешних сил, на внутренней боковой поверхности вала функция напряжений удовлетворяет условию

$$\Phi\ (r,\ z) = C = \mathrm{const}. \tag{1.3}$$

На боковой поверхности вала, когда боковая поверхность не свободна от внешних нагрузок, функция напряжений удовлетворяет условию

$$\Phi\,(r\,(s),\ z) = -\int\limits_0^s P\,(s)\ r^2\,(s)\ ds, \tag{1.4}$$

где $P\ (s)$—скручивающая нагрузка, $r\ (s)$—радиус поперечного сечения, а s—расстояние по длине контура осевого сечения вала. Проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения должна совпадать по величине с приложенной нагрузкой

$$\tau_r \frac{dz}{ds} - \tau_z \frac{dr}{ds} = P\,(s). \tag{1.5}$$

Условие (1.4) получается из (1.5) и (1.1).

Решая уравнение (1.2) методом Фурье — разделения переменных,—получим:

$$\begin{aligned} \Phi\ (r,\ z) &= (A\,\mathrm{sh}\lambda z + B\,\mathrm{ch}\lambda z)\,[Cr^2\,J_2\,(\lambda r) + Dr^2 Y_2\ (\lambda r)], \\ \Phi\ (r,\ z) &= (A\,\sin\lambda z + B\cos\lambda z)\ [Cr^2\,I_2\,(\lambda r) + Dr^2\,K_2\,(\lambda r)\,], \end{aligned} \tag{1.6}$$

где λ — произвольный вещественный параметр, $J_2(x)$ и $Y_2(x)$ функции Бесселя второго порядка, соответственно, первого и второго рода, а $I_2(x)$ и $K_2(x)$ —функции Бесселя первого и второго рода, второго порядка от мнимого аргумента.

Функции

$$r^4,\ r^4 z,\ \text{и}\ z \tag{1.7}$$

также являются частными решениями уравнений (1.2).

2°. Рассмотрим задачу о кручении полого вала со ступенчатым осевым сечением (фиг. 1).

Пусть скручивающая нагрузка приложена к торцам его и задана как функция r:

$$\tau_z(r,\ 0)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=0}=\varphi_1(r);\qquad (s\leqslant r\leqslant d);$$

$$\tau_z(r,\ b)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=b}=\varphi_2(r);\qquad (s\leqslant r\leqslant R). \tag{1.8}$$

Предположим, что функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ кусочно-непрерывные и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Следовательно, функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ можно представить в виде рядов Фурье-Дини (3).

$$\varphi_1(r)=\begin{cases} a_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, w_1(\lambda_k r); & (s<r<R),\\ b_0r+\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\, w_1(\mu_k r); & (R<r<d),\end{cases} \tag{1.9}$$

$$\varphi_2(r)=f_0r+\sum_{k=1}^{\infty} f_k\, w_1(\lambda_k r);\qquad (s<r<R),$$

где

$$w_n(\lambda_k r)=\frac{J_n(\lambda_k r)}{J_2(\lambda_k R)}-\frac{Y_n(\lambda_k r)}{Y_2(\lambda_k R)},$$

$$w_n(\mu_k r)=\frac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k d)}-\frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k d)}, \tag{1.10}$$

а числа $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ являются, соответственно, корнями уравнений:

$$w_2(xs)=\frac{J_2(sx)}{J_2(Rx)}-\frac{Y_2(sx)}{Y_2(Rx)}=0,$$

$$w_2(xR)=\frac{J_2(Rx)}{J_2(dx)}-\frac{Y_2(Rx)}{Y_2(dx)}=0. \tag{1.11}$$

Для функций $w_n(x)$ справедливы следующие формулы

$$\int_s^R xw_1(\lambda_k x)\ w_1(\lambda_p x)\,dx=\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\int_s^R xw_2(\lambda_k x)\,w_2(\lambda_p x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{при } p\neq k\\ \omega_k, & \text{при } p=k,\end{cases} \tag{1.12}$$

где
$$\omega_k=\frac{1}{2}\ \{[Rw_1(\lambda_k R)]^2-[sw_1(\lambda_k s)]^2\},$$

$$\int_R^d x w_1(\mu_k x) w_1(\mu_p x) dx = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_R^d w_2(\mu_k x) w_2(\mu_p x) x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \varepsilon_k, & \text{при } p = k, \end{cases} \tag{1.13}$$

где
$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \{ [R w_1(\mu_k d)]^2 - [R w_1(\mu_k R)]^2 \};$$

$$\int_s^R x^2 w_1(\lambda_k x)\, dx = \int_R^d x^2 w_1(\mu_k x)\, dx = 0. \tag{1.14}$$

Коэффициенты разложений (1.9) определяются единственным образом при помощи формул (1.12)—(1.14).

Функция напряжений $\Phi(r, z)$ должна удовлетворить следующим контурным условиям: на части контура осевого сечения, соответствующей внутренней поверхности вала, из (1.13)

$$\Phi(s, z) = C = \text{const.}, \tag{1.15}$$

а на остальной части, пользуясь формулой (1.4), подставляя туда значение касательных напряжений согласно (1.5), (1.8) и (1.9), после последовательного интегрирования получим:

$$\Phi(r, 0) = C + \frac{a_0}{4}(r^4 - s^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} w_2(\lambda_k r); \quad (s \leqslant r \leqslant R),$$

$$\Phi(r, 0) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(r^4 - R^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\mu_k} w_2(\mu_k r); \quad (R \leqslant r \leqslant d),$$

$$\Phi(d, z) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); \quad (0 \leqslant z \leqslant a),$$

$$\Phi(r, a) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); \quad (R \leqslant r \leqslant d),$$

$$\Phi(R, z) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); \quad (a \leqslant z \leqslant b),$$

$$\tag{1.16}$$

$$\Phi(r, b) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4) + \frac{f_0}{4}(r^4 - R^4) +$$
$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} w_2(\lambda_k r); \qquad (s \leqslant r \leqslant R).$$

Из (1.15) следует, что $\Phi(s, b) = C$, и следовательно, из последней формулы (1.16) получим:

$$(a_0 - f_0)(R^4 - s^4) + b_0(d^4 - R^4) = 0. \tag{1.17}$$

Это соотношение между введенными постоянными представляет уравнение равновесия действующих на вал крутящих моментов.

Функцию $\Phi(r, z)$ ищем в виде:

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1(r, z), & \text{в области I} \\ \Phi_2(r, z), & \text{в области II} \\ \Phi_3(r, z), & \text{в области III (фиг. 1),} \end{cases} \tag{1.18}$$

где функции $\Phi_i(r, z)$; $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{z=b} = f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k w_1(\lambda_k r); && (s<r<R) \\ &\Phi_1(s, z) = C; && (a<z<b) \\ &\Phi_1(R, z) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); && (a<z<b) \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{z=0} = a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_1(\lambda_k r); && (s<r<k) \\ &\Phi_2(s, z) = C; && (0<z<a) \\ &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{z=0} = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_1(\mu_k r); && (R<r<d) \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_3(d, z) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); && (0<z<a) \\ &\Phi_3(r, a) = C + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{b_0}{4}(d^4 - R^4); && (R<r<d). \end{aligned} \tag{1.21}$$

На смежных границах областей I и II, II и III функции Φ_i должны удовлетворять условиям сопряжения:

$$\Phi_1(r, a) = \Phi_2(r, a), \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a}; \ (s<r<R) \tag{1.22}$$

$$\Phi_2(R, z) = \Phi_3(R, z), \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=R} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{r=R}; \ (0<z<a). \tag{1.23}$$

Там же определим $\tau_r(R, z)$ и $\tau_z(r, a)$ разложениями

$$\left.\begin{aligned} &\tau_r(R, z) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos\frac{k\pi z}{a}; \ (0<z<a) \\ &\tau_z(r, a) = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k w_1(\lambda_k r); \ (s<r<R) \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

где $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$—неизвестные коэффициенты. Решение задачи сводится к нахождению этих коэффициентов.

Используя решения (1.6) и (1.7) уравнения (1.2) и удовлетворив граничным условиям (1.19)—(1.21), имея в виду (1.24), (1.25), удовлетворив первым условиям из (1.22), (1.23) и используя соотношение (1.17), для функций $\Phi_i(r, z)$ $(i=1, 2, 3)$, получим:

$$\Phi_1(r, z) = C + \frac{f_0}{4}(r^4 - s^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \operatorname{sh} \lambda_k (z-a) + $$

$$+ \xi_k \operatorname{sh} \lambda_k (b-z)] \frac{w_2(\lambda_k r)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k (b-a)} \qquad \begin{pmatrix} s \leqslant r \leqslant R \\ a \leqslant z \leqslant b \end{pmatrix}; \tag{1.26}$$

$$\Phi_2(r,z) = C + \frac{a_0}{4}(r^4 - s^4) + z(r^4 - s^4)\frac{f_0 - a_0}{4a} + \frac{r^2 a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi s}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} \sin \frac{k\pi z}{a} +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} [\xi_k \operatorname{sh} \lambda_k z + a_k \operatorname{sh} \lambda_k (a-z)] \frac{w_2(\lambda_k r)}{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k a}; \qquad \begin{pmatrix} s \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}; \tag{1.27}$$

$$\Phi_3(r, z) = C + \frac{b_0}{4}(r^4 - R^4) + z(d^4 - r^4)\frac{b_0}{4a} + \frac{a_0}{4}(R^4 - s^4) +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k a} w_2(\mu_k r) +$$

$$+ \frac{r^2 a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi r}{a}\right)}{k\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi d}{a}\right)} \sin \frac{k\pi z}{a}; \qquad \begin{pmatrix} R \leqslant r \leqslant d \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

где

$$\Delta(x, y) = I_2(x) K_2(y) - K_2(x) I_2(y).$$

§ 2. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

Неизвестные коэффициенты $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$; $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, имеющиеся в выражениях для функций $\Phi_i(r, z)$; $(i = 1, 2, 3)$ вполне определяются, если также потребовать выполнение вторых условий сопряжения из (1.22) и (1.23).

1°. Потребуем чтобы функции $\Phi_1(r, z)$ и $\Phi_2(r, z)$ удовлетворяли второму условию из (1.22)

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a}; \quad (s < r < R). \tag{2.1}$$

Из формул (1.26) и (1.27) составим равенство (2.1)

$$r\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{f_k}{\operatorname{sh}\lambda_k(b-a)}+\frac{a_k}{\operatorname{sh}\lambda_k a}+\frac{\xi_k\operatorname{sh}\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k a\operatorname{sh}\lambda_k(b-a)}\right]w_2(\lambda_k r)=$$

$$=\frac{f_0-a_0}{4a}\left(r^3-\frac{s^4}{r}\right)+r\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi s}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)}(-1)^k;\ (s<r<R). \qquad (2.2)$$

Умножив обе части тождества (2.2) на $w_2(\lambda_p r)$ и интегрируя по r в пределах $(s<r<R)$, используя формулу (1.13), а также значение интегралов

$$\int_s^R\left(r^3-\frac{s^4}{r}\right)w_2(\lambda_p r)\,dr=-\frac{(R^4-s^4)}{\lambda_p R}w_1(\lambda_p R), \qquad (2.3)$$

$$\int_s^R r\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)w_2(\lambda_p r)\,dr=-\frac{R\lambda_p\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{\lambda_p^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}w_1(\lambda_p R), \qquad (2.4)$$

получим

$$\xi_p\frac{\omega_p}{Rw_1(\lambda_p R)}=\frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b}\lambda_p\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\eta_k\frac{1}{\lambda_p^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}+$$

$$+\frac{f_0-a_0}{4a\lambda_p R^2}(R^4-s^4)\frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b}+\left[f_p\frac{\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b}+\right.$$

$$\left.+a_p\frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)}{\operatorname{sh}\lambda_p b}\right]\frac{\omega_p}{Rw_1(\lambda_p R)};\ (p=1,2,3\ldots), \qquad (2.5)$$

где ω_p —значение интеграла (1.13).

2°. Функции $\Phi_2(r,z)$ и $\Phi_3(r,z)$ должны удовлетворять второму из условий (1.23), т. е.

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=R}=\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)_{r=R};\ (0<z<a). \qquad (2.6)$$

Из формул (1.27) и (1.28), составляя равенство (2.6), используя рекуррентные соотношения для бесселевых функций, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\left[\frac{I_2\left(\frac{k\pi d}{a}\right)K_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+K_2\left(\frac{k\pi d}{a}\right)I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)}+\right.$$

$$+\frac{K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)I_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)K_1\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}\Bigg]\sin\frac{k\pi z}{a}=R(a_0-b_0)+$$

$$+\frac{R}{a}(f_0-a_0+b_0)z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k \operatorname{sh}\lambda_k z+a_k \operatorname{sh}\lambda_k(a-z)\right]\frac{w_1(\lambda_k R)}{\operatorname{sh}\lambda_k a}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\operatorname{sh}\mu_k(a-z)}{\operatorname{sh}\mu_k a}w_1(\mu_k R);\quad (0<z<a) \tag{2.7}$$

Умножив тождество (2.7) на $\sin\frac{p\pi z}{a}$ и интегрируя по z в пределах $(0<z<a)$, получим

$$a\eta_p=\frac{(-1)^{p+1}2\left(\frac{p\pi}{a}\right)}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)+\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{w_1(\lambda_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\lambda_k^2}+$$

$$+\frac{2}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)+\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}\left\{\frac{p\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{w_1(\lambda_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\lambda_k^2}-\right.$$

$$-\frac{p\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{w_1(\mu_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\mu_k^2}+R(a_0-b_0)\frac{a}{p\pi}\left[1+(-1)^{p+1}\right]+$$

$$\left.+\frac{aR}{p\pi}(-1)^{p+1}(f_0-a_0+b_0)\right\};(p=1,\ 2,\ 3\ldots), \tag{2.8}$$

где

$$\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)=\frac{I_2\left(\frac{p\pi d}{a}\right)K_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right)+K_2\left(\frac{p\pi d}{a}\right)I_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)}; \tag{2.9}$$

$$\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)=\frac{K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)I_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right)+I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)K_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}. \tag{2.10}$$

Введем обозначения:

$$(-1)^{k+1}a\eta_k=\alpha F_k; \tag{2.11}$$

$$\xi_p\frac{\omega_p}{Rw_1(\lambda_p R)}=L_p, \tag{2.12}$$

где $\alpha > 0$—постоянная подлежащая определению. Имея в виду (2.11) и (2.12), бесконечные системы (2.5) и (2.8) приводятся к виду

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} F_k + G_p; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots), \tag{2.13}$$

$$F_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} L_k + R_p; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots). \tag{2.14}$$

где

$$a_{pk} = \frac{\alpha\lambda_p}{a} \frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b} \cdot \frac{1}{\lambda_p^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} \tag{2.15}$$

$$G_p = \frac{f_0 - a_0}{4a\lambda_p R^2}(R^4 - s^4)\frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b} + \left[f_p \frac{\operatorname{sh}\lambda_p a}{\operatorname{sh}\lambda_p b} + \right.$$

$$\left. + a_p \frac{\operatorname{sh}\lambda_p(b-a)}{\operatorname{sh}\lambda_p b}\right] \frac{\omega_p}{R w_1(\lambda_p R)}; \tag{2.16}$$

$$b_{pk} = \frac{\frac{2}{\alpha}\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{w_1^2(\lambda_k R)}{\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2\right]\omega_k}; \tag{2.17}$$

$$R_p = \frac{2}{\alpha}(-1)^{p+1} \frac{1}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \left\{\frac{p\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{w_1(\lambda_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{p\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{w_1(\mu_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \mu_k^2} + \frac{Ra}{p\pi}\left[a_0 - b_0 + (-1)^{p+1} f_0\right]\right\}. \tag{2.18}$$

Совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.13) и (2.14) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots), \tag{2.19}$$

если ввести обозначения

$$\begin{aligned} &Z_{2p-1} = L_p && Z_{2p} = F_p \\ &B_{2p-1} = G_p && B_{2p} = R_p \\ &A_{2p-1,\,2k-1} = 0 && A_{2p-1,\,2k} = a_{pk} \\ &A_{2p,\,2k-1} = b_{pk} && A_{2p,\,2k} = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

§ 3. Исследование бесконечной системы линейных уравнений

Докажем, что бесконечная система линейных уравнений (2.19) удовлетворяет условию вполне регулярности.

$$1^\circ.\ \sum_{k=1}^{\infty}|A_{2p-1,k}| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}| = \frac{\alpha\lambda_p \operatorname{sh}\lambda_p a \operatorname{sh}\lambda_p(b-a)}{a\operatorname{sh}\lambda_p b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\lambda_p^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{cth}\lambda_p a - \frac{1}{\lambda_p a}\right) \leqslant \frac{\alpha}{4}, \tag{3.1}$$

в силу обозначений (2.20) и (2.15), причем использованы значения ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth}a\pi - \frac{1}{a\pi}\right), \tag{3.2}$$

и неравенства

$$\operatorname{cth}x - \frac{1}{x} \leqslant 1; \qquad (0 \leqslant x < \infty), \tag{3.3}$$

$$\frac{\operatorname{sh}\lambda_p a \operatorname{sh}\lambda_p(b-a)}{\operatorname{sh}\lambda_p b} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

$$2^\circ.\ \sum_{k=1}^{\infty}|A_{2p,k}| = \sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}| = \frac{2}{\alpha}\frac{\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)+\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_1^2(\lambda_k R)}{\omega_k\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\lambda_k^2\right]}. \tag{3.5}$$

Вычислим сумму следующего ряда

$$S_k = \frac{k\pi}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Rw_1^2(\lambda_p R)}{\omega_p\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\lambda_p^2\right]}. \tag{3.6}$$

Разложим функции $\sqrt{r}\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right) = \left[I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) - K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\sqrt{r}$ и $\left(r^2-\frac{s^4}{r^2}\right)\sqrt{r}$ по системе функций $\left\{\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r)\right\}$ на интервале $(s,\ R)$. Такое разложение должно иметь вид:

$$\sqrt{r}\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right) = \sum_{p=1}^{\infty}A_p\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r); \tag{3.7}$$

$$\sqrt{r}\left(r^2-\frac{s^4}{r^2}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}B_p\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r). \tag{3.8}$$

Умножим обе части (3.7) и (3.8) на $\sqrt{\frac{r}{\omega_k}}\,w_2(\lambda_k r)$ и интегрируем по

r в интервале (s, R). Имея в виду (1.12), коэффициенты разложений A_p и B_p определяются единственным образом. Используя рекуррентные формулы для бесселевых функций и значения интегралов, которые получены при помощи интегралов Ломмеля:

$$\int_s^R xw_k(\alpha x)I_k(\beta x)\,dx=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{x\left[\beta w_k(\alpha x)I_{k-1}(\beta x)-\alpha I_k(\beta x)w_{k-1}(\alpha x)\right]\right\}_s^R,$$

$$\int_s^R xw_k(\alpha x)K_k(\beta x)\,dx=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{x\left[\beta w_k(\alpha x)K_{k-1}(\beta x)+\alpha K_k(\beta x)w_{k-1}(\alpha x)\right]\right\}_s^R, \tag{3.9}$$

для A_p и B_p получим

$$A_p=-\frac{R\lambda_p\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)w_1(\lambda_p R)}{\sqrt{\omega_p}\left[\lambda_p^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\right]} \tag{3.10}$$

$$B_p=\frac{(R^4-s^4)\,w_1(\lambda_p R)}{\sqrt{\omega_p}\,\lambda_p R}. \tag{3.11}$$

Подставляя значения A_p и B_p в (3.7) и (3.8), получим

$$\sqrt{r}\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R\lambda_p\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)w_1(\lambda_p R)}{\sqrt{\omega_p}\left[\lambda_p^2+\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\right]}\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r) \tag{3.12}$$

$$\sqrt{r}\left(r^2-\frac{s^4}{r^2}\right)=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(R^4-s^4)\,w_1(\lambda_p R)}{\sqrt{\omega_p}\,\lambda_p R}\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r). \tag{3.13}$$

Система функций $\left\{\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}\,w_2(\lambda_p r)\right\}$ ортогональна и нормальна на отрезке [s, R], что видно из (1.12), и образует замкнутую систему. Используя обобщенное равенство Парсеваля и принимая во внимание (3.10)—(3.13), получаем

$$\int_s^R r\left(r^2-\frac{s^4}{r^2}\right)\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)dr=\sum_{p=1}^{\infty}A_p B_p \tag{3.14}$$

или

$$\frac{k\pi R}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{w_1^2(\lambda_p R)}{\omega_p\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\lambda_p^2\right]}=\psi_2\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)-\frac{4aR^3}{k\pi(R^4-s^4)}. \quad (3.15)$$

При этом использованы рекуррентные формулы для бесселовых функций. Сумму ряда (3.6) можно найти и другим способом. Подставляя (3.15) в (3.5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_{2p,k}|=\frac{2}{\alpha}\frac{\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)-\frac{4aR^3}{p\pi(R^4-s^4)}}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)+\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}\leqslant\frac{2}{\alpha}, \quad (3.16)$$

где, как легко видеть, $\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)>0$ и $\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)>0$.

Из оценок (3.1) и (3.16), выбирая $\alpha=2\sqrt{2}$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_{2p,k}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.17)$$

т. е. система (2.19) впол не регулярна.

Совокупность свободных членов $\{B_p\}$ системы (2.19) ограничена и стремится к нулю когда $p\to\infty$, что легко доказать на основании работы[1].

§ 4. Определение напряжений

При кручении вала напряжения определяются формулами (1.1). Используя обозначения (2.11) и (2.12), пользуясь формулами (1.1) и рекуррентными формулами бесселевых функций, из (1.26)—(1.28) получим для области I (фиг. 1)

$$\tau_r(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_k\frac{R\dot{w}_1(\lambda_k R)\,\mathrm{ch}\,\lambda_k(b-z)}{\omega_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k(b-a)}-f_k\frac{\mathrm{ch}\,\lambda_k(z-a)}{\mathrm{sh}\,\lambda_k(b-a)}\right]w_2(\lambda_k r), \quad (4.1)$$

$$\tau_z(r,z)=rf_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k\frac{\mathrm{sh}\lambda_k(z-a)}{\mathrm{sh}\lambda_k(b-a)}+L_k\frac{Rw_1(\lambda_k R)\,\mathrm{sh}\lambda_k(b-z)}{\omega_k\,\mathrm{sh}\lambda_k(b-a)}\right]w_1(\lambda_k r). \quad (4.2)$$

для области II

$$\tau_r(r,z)=\frac{r^4-s^4}{4ar^2}(f_0-a_0)+\frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}F^k\frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \frac{\operatorname{ch}\lambda_k (a-z)}{\operatorname{sh}\lambda_k a} - L_k \frac{R w_1(\lambda_k R)\operatorname{ch}\lambda_k z}{\omega_k \operatorname{sh}\lambda_k a}\right] w_2(\lambda_k r); \qquad (4.3)$$

$$\tau_z(r, z) = a_0 r + r\frac{f_0 - a_0}{a} z + \frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k F_k \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \sin\frac{k\pi s}{a} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \frac{\operatorname{sh}\lambda_k (a-z)}{\operatorname{sh}\lambda_k a} + L_k \frac{R w_1(\lambda_k R)\operatorname{sh}\lambda_k z}{\omega_k \operatorname{sh}\lambda_k a}\right] w_1(\lambda_k r), \qquad (4.4)$$

для области III

$$\tau_r(r, z) = \frac{r^4 - d^4}{4a r^2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{ch}\mu_k (a-z)}{\operatorname{sh}\mu_k a} w_2(\mu_k r) +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} F_k \frac{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi r}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} \cos\frac{k\pi z}{a}, \qquad (4.5)$$

$$\tau_z(r, z) = r\frac{a-z}{a} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{sh}\mu_k (a-z)}{\operatorname{sh}\mu_k a} w_1(\mu_k r) +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} F_k \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi d}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} \sin\frac{k\pi z}{a}, \qquad (4.6)$$

где
$$\Omega(x, y) = I_1(x) K_2(y) + K_1(x) I_2(y). \qquad (4.7)$$

Формулами (4.1) — (4.6) определяются напряжения в любой точке осевого сечения.

§ 5. Ступенчатый вал, скручиваемый нагрузкой, приложенной к его торцам по линейному закону

1°. Пусть нагрузка приложена к торцам и изменяется линейно вдоль радиуса сечения. Законы распределения скручивающих нагрузок представим в виде

$$\tau_z(r, 0) = \varphi_1(r) = \frac{r}{s}\tau_1; \qquad (s \leqslant r \leqslant d).$$

$$\tau_z(r, b) - \varphi_2(r) = \frac{r}{s}\tau_2; \qquad (s \leqslant r \leqslant R). \qquad (5.1)$$

Пользуясь разложениями (1.9), имеем

$$a_0 = b_0 = \frac{\tau_1}{s}, \quad f_0 = \frac{\tau_2}{s} \qquad (5.2)$$

$$a_k = b_k = f_k = 0 \quad (k = 1, 1, 3 \ldots).$$

Коэффициенты a_0, b_0 и f_0 должны удовлетворять условию (1.17), т. е. уравнению равновесия крутящих моментов, откуда получим

$$\tau_1 (d^4 - s^4) = \tau_2 (R^4 - s^4). \tag{5.3}$$

Подставив коэффициенты (5.2) в (2.15)—(2.18) и имея в виду (2.20), для бесконечной системы (2.19) будем иметь

$$A_{2p-1,\ 2k} = \frac{2\sqrt{2}\lambda_p \operatorname{sh}\lambda_p a \operatorname{sh}\lambda_p (b-a)}{a \operatorname{sh}\lambda_p b} \cdot \frac{1}{\lambda_p^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}, \tag{5.4}$$

$$A_{2p,\ 2k-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \frac{w_1^2(\lambda_k R)}{\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2\right]\omega_k}, \tag{5.5}$$

$$B_{2p-1} = \frac{\operatorname{sh}\lambda_p a \operatorname{sh}\lambda_p (b-a)}{4a\lambda_p sR^2 \operatorname{sh}\lambda_p b} (d^4 - s^4)\tau_1, \tag{5.6}$$

$$B_{2p} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{R\tau_2}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}. \tag{5.7}$$

2°. В качестве численного примера рассмотрим ступенчатый полый вал с размерами $a = 5\pi s$, $b = 10\pi s$, $R = 2s$, $d = 3s$.

Из (5.4)—(5.7) видно, что все коэффициенты и свободные члены системы (2.19)—положительные числа.

В этом случае

$$|B_p| \leqslant \max\{|B_{2p-1}|, |B_{2p}|\};\ p = 1, 2 \ldots$$

$$|B_p| \leqslant 0{,}5339\,\tau_2 s, \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{p,k}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.9}$$

Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений—[5], получим следующие оценки для неизвестных

$$\begin{aligned}
0{,}53396\ \tau_2 s &\leqslant F_1 \leqslant 0{,}53929\ \tau_2 s \\
0{,}52042\ \tau_2 s &\leqslant F_2 \leqslant 0{,}54131\ \tau_2 s \\
0{,}49392\ \tau_2 s &\leqslant F_3 \leqslant 0{,}53893\ \tau_2 s \\
0{,}47337\ \tau_2 s &\leqslant F_4 \leqslant 0{,}54818\ \tau_2 s \\
0{,}44463\ \tau_2 s &\leqslant F_5 \leqslant 0{,}55254\ \tau_2 s \\
0 &< F_p \leqslant 0{,}65856\ \tau_2 s \qquad p = 6, 7, 8 \ldots \qquad (5.10)\\
0{,}10115\ \tau_2 s &\leqslant L_1 \leqslant 0{,}40658\ \tau_2 s \\
0{,}05588\ \tau_2 s &\leqslant L_2 \leqslant 0{,}44143\ \tau_2 s \\
0 &< L_p \leqslant 0{,}46567\ \tau_2 s \qquad p = 3, 4, 5 \ldots
\end{aligned}$$

Для напряжений τ_r и τ_z из (4.1)—(4.6) получим следующие формулы:

для области I (фиг. 1)

$$\tau_r(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{Rw_1(\lambda_k R)\ \mathrm{ch}\lambda_k(b-z)}{\omega_k\ \mathrm{sh}\lambda_k(b-a)} w_2(\lambda_k r); \tag{5.11}$$

$$\tau_z(r, z) = \frac{r}{s}\tau_2 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{Rw_1(\lambda_k R)\ \mathrm{sh}\lambda_k(b-z)}{\omega_k\ \mathrm{sh}\lambda_k(b-a)} w_1(\lambda_k r); \tag{5.12}$$

для области II

$$\tau_r(r, z) = \frac{r^4-s^4}{4ar^2 s}\tau_1 + \frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} F_k \frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a} -$$

$$-R\sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{w_1(\lambda_k R)\ \mathrm{ch}\lambda_k z}{\omega_k\ \mathrm{sh}\lambda_k a} w_2(\lambda_k r). \tag{5.13}$$

$$\tau_z(r, z) = \frac{r}{s}\tau_1 + \frac{rz}{as}\tau_1 + R\sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{w_1(\lambda_k R)\ \mathrm{sh}\lambda_k z}{\omega_k\ \mathrm{sh}\lambda_k a} w_1(\lambda_k r) +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} F_k \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}\sin\frac{k\pi z}{a}. \tag{5.14}$$

для области III

$$\tau_r(r, z) = \frac{r^4-d^4}{4ar^2 s}\tau_1 + \frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} F_k \frac{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi r}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a}, \tag{5.15}$$

$$\tau_z(r, z) = \frac{r(a-z)}{sa}\tau_1 + \frac{2\sqrt{2}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} F_k \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi d}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)}\sin\frac{k\pi z}{a}. \tag{5.16}$$

Подставляя в (5.11)—(5.16) коэффициенты $\{L_k\}$ и $\{F_k\}$ с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений $\tau_r(r, z)$ и $\tau_z(r, z)$.

Некоторые значения напряжений приведены в таблице 1.

Таблица 1

$z \backslash r$		s	1,5s	2s	3s
		τ_z/τ_2			
0		0,1875	0,2812	0,3750	0,5625
0,8a	с избытком с недостатком	1,6073 1,5689	2,307	3,30	0,6445
1,2a	с избытком с недостатком	1,0046 1,0011	1,5013 1,5004	2,0034 2,0009	—
2a		1	1,5	2	—

Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 11 V 1955

Բ. Ա. Կոստանդյան

ՄՆԱՄԵՋ ԱՍՏԻՃԱՆԱՁԵՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է մնամեջ աստիճանաձև լիսեռի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ բեռը սիմետրիկ է առանցքի նկատմամբ։

Խնդիրը լուծվում է օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման եղանակով։ Խնդրի լուծումը բերվում է անվերջ, լրիվ ռեգուլյար գծային հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Լարումների ֆունկցիան և լարումները ներկայացվում են շարքերով ըստ Բեսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Ուսումնասիրվել է թվային օրինակ, երբ ոլորող բեռը եզրային հատույթի շառավիղի ուղղությամբ փոփոխվում է գծային օրենքով։ Հոդվածի վերջում տեղադրված աղյուսակում բերվում են հատույթի մի քանի կետերում լարումների թվային արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения П. М. М., 1951, т. XV, в. 4.
2. *Солянин-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. *Грей Э., Метюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
4. *Янке Е. и Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Огиз, Гостехиздат, 1948.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1949.
6. *Костандян Б. А.* О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы. „Известия" АН Армянской ССР, том VII, № 4, 1954.