

Б. М. Левитан и И. С. Саргсян

Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля

1. Введение

Одной из важных задач теории уравнения Штурма — Лиувилля

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad (1)$$

заданного на полупрямой $(0, \infty)$, является задача о разложении функции с интегрируемым квадратом по собственным функциям уравнения (1), т. е. по решениям этого уравнения, удовлетворяющим краевому условию

$$y'(0)\sin\alpha + y(0)\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Как известно всегда имеет место равенство Парсеваля, т. е. сходимость интеграла Фурье в среднем квадратичном.

Для того, чтобы получить точечную сходимость интеграла Фурье, соответствующего задаче (1) — (2), до недавнего времени накладывали на функцию довольно жесткие ограничения. Так, Г. Вейлем была доказана следующая

Теорема (см., например [1], теорема 6. 2. 2). Пусть выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
3. $f(0)\cos\alpha + f'(0)\sin\alpha = 0$, где α — действительное число;
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)E'_\lambda(x) - f'(x)E_\lambda(x)\} = 0$, $E_\lambda(x) = \int_0^x \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$, $(\lambda \neq 0)$.

Положим

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)E_\lambda(x) dx.$$

Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda) dg(\lambda),$$

причем последний интеграл сходится абсолютно.

Недавно один из нас [2] показал, что точечная сходимость имеет

место при тех же условиях, что и разложение функции в обычный интеграл Фурье по косинусам.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что в существенном при тех же условиях, что и в цитированной выше теореме Г. Вейля, имеет место не только сходимость самого разложения к функции $f(x)$, но и сходимость второй производной разложения к $f''(x)$ (однако уже не абсолютно). Именно нами доказывается следующая

Теорема. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $f''(x) \in L_2(0, \infty)$;
3. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$;

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)E'_\lambda(x) - f'(x)E_\lambda(x)\} = 0, \quad E_\lambda(x) = \int_0^x \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (\lambda \neq 0)$$

Положим

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)E_\lambda(x) dx.$$

Тогда

$$f''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x^*(x, \lambda) dg(\lambda).$$

2. Некоторые предварительные формулы

Предположим функция $q(x)$ определена на полупрямой $(0, \infty)$, действительна и суммируема в каждом конечном интервале. Пусть задача (1) — (2) имеет неотрицательный спектр. Положим $\lambda = \mu^2$, $\lambda > 0$. Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (2')$$

Для произвольного действительного числа t известна формула

$$\varphi(x, \mu) \cos \mu t = \frac{1}{2} [\varphi(x+t, \mu) + \varphi(x-t, \mu)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds, \quad (3)$$

где функция $w(x, t, s)$ строится по функции Римана уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и для производных функции $w(x, t, s)$ справедлива формула (см. [3])

$$\frac{\partial^k w(x, t, s)}{\partial x^k} = \frac{1}{2^{k+1}} \left\{ q_x^{(k-1)} \left[\frac{1}{2} (x + s - t) \right] - q_x^{(k-1)} \left[\frac{1}{2} (x + s + t) \right] \right\}, (k \geq 1) (4).$$

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $g_\varepsilon(t)$ четна, т. е. $g_\varepsilon(-t) = g_\varepsilon(t)$,
2. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$,
3. $g_\varepsilon(t)$ имеет непрерывную вторую производную.

Обозначим через $\psi_\varepsilon(\mu)$ $\cos$ — преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \cos \mu t dt. \quad (5)$$

Помножим обе части формулы (3) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ε . В силу (5), получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) &= \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Заменяя в первых двух интегралах, соответственно, $x+t$ на s , $x-t$ на s и меняя порядок интегрирования во втором интеграле правой части формулы (6), мы можем ее переписать в виде:

$$\varphi(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \{g_\varepsilon(s-x) + \chi_\varepsilon(x, s)\} ds, \quad (6')$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s) = \int_{|x-s|}^\varepsilon w(x, t, s) g_\varepsilon(t) dt.$$

Дифференцируя формулу (6') по x , получим

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) &= \frac{1}{2} \varphi(x+\varepsilon, \mu) \{g_\varepsilon(\varepsilon) + \chi_\varepsilon(x, x+\varepsilon)\} - \frac{1}{2} \varphi(x-\varepsilon, \mu) \{g_\varepsilon(-\varepsilon) + \\ &+ \chi_\varepsilon(x, x-\varepsilon)\} + \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right\} ds. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу определений функций $g_\varepsilon(t)$ и $\chi_\varepsilon(x, s)$ имеем:

$$g_\varepsilon(\varepsilon) = g_\varepsilon(-\varepsilon) = 0; \quad \chi_\varepsilon(x, x+\varepsilon) = \chi_\varepsilon(x, x-\varepsilon) = 0.$$

Тогда формула (7) примет вид:

$$\varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right\} ds. \quad (7')$$

Дифференцируя формулу (7') еще раз по x , получим

$$\begin{aligned} \varphi''_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = & \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x+\varepsilon, \mu) \left[\frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right]_{s=x+\varepsilon} - \right. \\ & \left. - \varphi(x-\varepsilon, \mu) \left[\frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} + \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right]_{s=x-\varepsilon} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial^2 g_\varepsilon(x-s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x^2} \right\} ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Из определений функций $g_\varepsilon(t)$ и $\chi_\varepsilon(x, s)$ следует

$$\left. \frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} \right|_{s=x+\varepsilon} = \left. \frac{\partial g_\varepsilon(x-s)}{\partial x} \right|_{s=x-\varepsilon} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right|_{s=x+\varepsilon} = \left. \frac{\partial \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x} \right|_{s=x-\varepsilon} = 0,$$

так что формула (8) имеет вид:

$$\varphi''_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \left\{ \frac{\partial^2 g_\varepsilon(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x^2} \right\} ds. \quad (9)$$

Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\mu)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ (по собственным функциям $\varphi(x, \mu)$), т. е. положим

$$F(\mu) = l \cdot i \cdot m_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) \varphi(x, \mu) dx. \quad (10)$$

В силу равенства Парсеваля из (9) и (10) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \varphi''_x(x, \mu) F(\mu) d\rho(\mu) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \frac{\partial^2 g_\varepsilon(x-s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(x, s)}{\partial x^2} \right\} ds. \quad (11)$$

Введем обозначение

$$S(x, \mu) = \int_0^\mu \varphi(x, \nu) F(\nu) d\rho(\nu). \quad (12)$$

В силу (12) формула (11) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \cdot \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} = \int_{x-s}^{x+s} f(s) \left\{ \frac{\partial^2 g_s(x-s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_s(x, s)}{\partial x^2} \right\} ds. \quad (13)$$

Обозначим через $S^*(x, \mu)$ функцию, аналогичную функции $S(x, \mu)$, при $q(x) \equiv 0$, т. е. положим

$$C(\mu) = \int_0^{\infty} f(s) \cos \mu s ds, \quad S^*(x, \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos \nu x \cdot C(\nu) d\nu.$$

Выписывая для функции $S^*(x, \mu)$ формулу, аналогичную формуле (13), и вычитая ее из (13), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = \int_{x-s}^{x+s} f(s) \frac{\partial^2 \chi_s(x, s)}{\partial x^2} ds, \quad (14)$$

так как при $q(x) \equiv 0$, $w(x, t, s) \equiv 0$, и тем самым $\chi_s(x, s) \equiv 0$.

В силу определения функции $\chi_s(x, s)$, имеем

$$\frac{\partial^2 \chi_s(x, s)}{\partial x^2} = - \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} g_s(x-s) + \int_{|x-s|}^s g_s(t) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} dt. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = & - \int_{x-s}^{x+s} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} g_s(x-s) ds + \\ & + \int_{x-s}^{x+s} f(s) \left\{ \int_{|x-s|}^s \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} g_s(t) dt \right\} ds = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Преобразуем первый член в правой части (16). В силу определения функции $\psi_s(\mu)$ из формулы обращения следует

$$g_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) \cos \mu t d\mu.$$

Тогда первый член I_1 формулы (16) можем переписать так:

$$\begin{aligned} I_1 = & - \int_{x-s}^{x+s} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) \cos \mu (x-s) d\mu \right\} ds = \\ = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\mu) \left\{ - \int_{x-s}^{x+s} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} \cos \mu (x-s) ds \right\} d\mu. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^{\mu} dv \left\{ - \int_{x-v}^{x+v} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=|x-s|} \cos v(x-s) ds \right\}. \quad (17)$$

В силу (17) первый член I_1 формулы (16) окончательно примет вид:

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) d_{\mu} \alpha(x, \mu). \quad (18)$$

Преобразуем второй член правой части формулы (16). Положим

$$h(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} f(s) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} ds, \quad (19)$$

$$\beta(x, \mu) = \int_0^{\mu} h(x, t) \cos \mu t dt. \quad (20)$$

В силу равенства Парсеваля из (5) и (20) следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) \beta(x, \mu) d\mu &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\epsilon} g_{\epsilon}(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} f(s) \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} ds \right\} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\epsilon} \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} g_{\epsilon}(t) dt \right\} ds = \frac{\pi}{2} I_2. \end{aligned}$$

Значит

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) \beta(x, \mu) d\mu. \quad (21)$$

В силу (18) и (21) формула (16) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \alpha(x, \mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, v) dv \right\} = 0. \quad (22)$$

3. Доказательство теоремы в случае точечного спектра

Рассмотрим сперва случай, когда задача (1)–(2') имеет неотрицательный точечный спектр. Пусть $\lambda = \mu^2$, ($\lambda > 0$). Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ соответствующие собственные функции задачи (1)–(2').

Докажем некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
3. $f'(0) = 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \varphi'_n(x) - f'(x) \varphi_n(x)) = 0$.

Тогда при $a \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$V_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = o(1). \quad (23)$$

Оценка (23) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В случае точечного спектра функция $S(x, \mu)$ имеет вид:

$$S(x, \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} a_n \varphi_n(x),$$

где коэффициенты $\{a_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в системе собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$. Так как функция $\varphi_n(x)$ — решение уравнения (1), то имеем

$$a_n = \int_0^\infty f(x) \varphi_n(x) dx = - \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^\infty f(x) \{ \varphi_n''(x) - q(x) \varphi_n(x) \} dx.$$

Интегрируя последний интеграл два раза по частям, в силу условий (2') получим

$$a_n = - \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^\infty \varphi_n(x) \{ f''(x) - q(x) f(x) \} dx. \quad (24)$$

Введем обозначение

$$c_n = \int_0^\infty \varphi_n(x) \{ f''(x) - q(x) f(x) \} dx.$$

Тогда (24) можем переписать так:

$$a_n = - \frac{c_n}{\mu_n^2}. \quad (24')$$

Из определения функции $S(x, \mu)$ и (24') следует

$$V_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = \sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} |a_n| \cdot |\varphi_n''(x)| = \sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} \frac{1}{\mu_n^2} |c_n| \cdot |\varphi_n''(x)|. \quad (25)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского из (25) получим

$$V_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} < \left(\sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} c_n^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} \frac{1}{\mu_n^4} [\varphi_n''(x)]^2 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Так как $\{f'' - q(x)f\} \subset L_2(0, \infty)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty,$$

значит, при $a \rightarrow \infty$, имеем

$$\sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} c_n^2 = o(1). \quad (27)$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 работы [3], имеем

$$\left(\sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} \frac{1}{\mu_n^4} [\varphi_n^*(x)]^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{a^2} \left(\sum_{a \leq \mu_n \leq a+1} [\varphi_n^*(x)]^2 \right)^{1/2} = o(1). \quad (28)$$

Лемма следует из оценок (27) и (28).

Из определения функции $S^*(x, \mu)$ непосредственно следует

Лемма 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. $f(x) \subset L_2(0, \infty)$;
2. $f''(x) \subset L_2(0, \infty)$;
3. $f'(0) = f'(\infty) = 0$.

Тогда при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$V_a^{2+1} \left\{ \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = o(1). \quad (29)$$

Оценка (29) имеет место равномерно на всей полупрямой $(0, \infty)$.

Введем обозначение

$$R(x, \mu; f) = \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \alpha(x, \mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \beta(x, \nu) d\nu.$$

Из лемм 1 и 2 и определений функций $\alpha(x, \mu)$ и $\beta(x, \mu)$ легко следует

Лемма 3. При каждом фиксированном x и при $a \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$V_a^{2+1} \{R(x, \mu; f)\} = o(1). \quad (30)$$

Оценка (30) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Из леммы 3 и теоремы 1.1 работы [4] следует

Лемма 4. При каждом фиксированном x имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R(x, \mu; f) = 0. \quad (31)$$

Равенство (31) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Чтобы доказать теорему о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля, остается исследовать поведение функций

$$\alpha(x, \mu) \quad \text{и} \quad \int_0^\mu \beta(x, \nu) d\nu$$

при $\mu \rightarrow \infty$.

Для этой цели докажем следующие леммы.

Лемма 5. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет ограниченную первую производную, то при каждом фиксированном x имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha(x, \mu) = 0. \quad (32)$$

Равенство (32) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функции $\alpha(x, \mu)$ имеем

$$\alpha(x, \mu) = - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left. \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \right|_{t=\mu(x-s)} \cdot \frac{\sin \mu(x-s)}{x-s} ds.$$

Отсюда, в силу формулы (4), следует (при $x > s$)

$$\alpha(x, \mu) = - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \frac{q(x) - q(s)}{x-s} \cdot \sin \mu(x-s) ds. \quad (33)$$

Так как по предположению функция $q(x)$ имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то

$$\left| \frac{q(x) - q(s)}{x-s} \right| \leq C < \infty,$$

где постоянная C зависит от интервала изменения x .

Поэтому лемма следует из (33) в силу леммы Римана—Лебега.

Лемма 6. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет ограниченную первую производную, то при каждом фиксированном x имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \beta(x, \nu) d\nu = 0. \quad (34)$$

Равенство (34) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функции $\beta(x, \nu)$ имеем

$$\int_0^x \beta(x, v) dv = \int_0^1 h(x, t) \frac{\sin \mu t}{t} dt. \quad (35)$$

Далее, так как функция $q(x)$ имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то из формулы (4) следует оценка

$$\left| \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} \right| \leq C < \infty. \quad (36)$$

Из определения функции $h(x, t)$, оценки (36) и неравенства Коши — Буняковского следует

$$\begin{aligned} |h(x, t)| &\leq \int_{x-t}^{x+t} |f(s)| \cdot \left| \frac{\partial^2 w(x, t, s)}{\partial x^2} \right| ds \leq C \int_{x-t}^{x+t} |f(s)| ds \leq \\ &\leq C_1 \left(\int_{x-t}^{x+t} f^2(s) ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{x-t}^{x+t} ds \right)^{1/2} \leq C_2 t^{1/2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Обозначим через η произвольное положительное число и положим

$$\int_0^1 h(x, t) \frac{\sin \mu t}{t} dt = \left\{ \int_0^\eta + \int_\eta^1 \right\} h(x, t) \frac{\sin \mu t}{t} dt = I_1 + I_2.$$

В силу оценки (37) получим

$$|I_1| \leq C_2 \int_0^\eta \frac{dt}{\sqrt{t}} = C_2 \eta^{1/2}.$$

Поэтому, каково бы ни было число $\delta > 0$, можно подобрать η столь малым, что для всех μ будет выполняться неравенство

$$|I_1| < \delta/2. \quad (38)$$

Выбрав η , возьмем затем число μ настолько большим, чтобы для всех $\mu > \mu_0$ выполнялось неравенство

$$|I_2| < \delta/2. \quad (39)$$

что возможно на основании леммы Римана — Лебега. Из доказательства леммы Римана — Лебега следует, что оценка (39) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Лемма следует из оценок (38) и (39) и произвольности числа δ .

Из лемм 4, 5 и 6 следует следующая теорема о равной сходимости дважды дифференцированных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам:

Теорема 1. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $f''(x) \in L_2(0, \infty)$;
3. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)\varphi'_n(x) - f'(x)\varphi_n(x)\} = 0$.

Тогда равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial^2 S(x, \mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2} \right\} = 0,$$

т. е. разность между вторыми производными разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Как видно из теоремы 1, для доказательства теоремы о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля нам остается установить аналогичное утверждение для разложения в обычный интервал Фурье по косинусам.

Теорема 2. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $f''(x) \in L_2(0, \infty)$;
3. $\{f'' - g(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)\varphi'_n(x) - f'(x)\varphi_n(x)\} = 0$.

Положим

$$a_n = \int_0^\infty f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Тогда

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n''(x).$$

Доказательство. Обозначим

$$C(\mu) = \int_0^\infty f(x) \cos \mu x dx. \quad (40)$$

Интегрируя последний интеграл два раза по частям, в силу условий 4 и 5 теоремы, получим

$$\mu^2 C(\mu) = - \int_0^\infty f''(x) \cos \mu x dx. \quad (41)$$

В силу условия 2 из (41), согласно формуле обращения, следует

$$f''(x) = -\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} v^2 C(v) \cos vx dv = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\mu} C(v) \cos vx dv = \\ = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 S^*(x, \mu)}{\partial x^2},$$

что и доказывает теорему в силу теоремы 1.

4. Случай произвольного спектра

В случае произвольного спектра доказательство приводится аналогично, заменяя суммы соответствующими интегралами Стильтеса. Поэтому мы здесь ограничимся только формулировкой теоремы.

Теорема 3. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$;
2. $f''(x) \in L_2(0, \infty)$;
3. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$;
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$;

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)E_\lambda(x) - f'(x)E_\lambda(x)\} = 0, \quad E_\lambda(x) = \int_0^\lambda \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (\lambda \neq 0).$$

Положим

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x) E_\lambda(x) dx.$$

Тогда

$$f''(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi''(x, \lambda) dg(\lambda).$$

Военная артиллерийская инженерная академия

им. Ф. Э. Дзержинского

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Поступило 20 II 1956

Բ. Մ. Լևիտան և Ի. Ս. Սարգսյան

ԹԵՈՐԵՄԱ ԸՍՏ ՇՏՈՒՐՄ — ԼԻՈՒՎԻԼԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՏԻՆԱԼԵՐԻ ԿՐԿՆԱԿԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԿԱԾ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՋՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Շառւրժ — Լիուվիլի հալասարման տեսության կարևոր խնդիրներից մեկը հանդիսանում է քառակուսու հետ մեկտեղ հանրագումարելի ֆունկցիայի վերլուծության խնդիրն ըստ այդ հալասարման սեփական ֆունկցիաների:

$$\{y'' + (\lambda - g(x))y = 0, \quad (0 \leq x < \infty), \quad (1)$$

$$\{y'(0)\sin\alpha + y(0)\cos\alpha = 0; \quad (2)$$

Ինչպես հայտնի է, միշտ տեղի ունի Պարսևալի հավասարումը, այսինքն վերոհիշյալ խնդրին համապատասխանող Ֆուրյեի ինտեգրալի միջին քառակուսային զուգամիտությունը: Կետային զուգամիտություն ստանալու համար վերլուծվող ֆունկցիայի վրա մինչև վերջին ժամանակներս դրվում էին բավական ծանր պայմաններ: Այս ուղղությամբ հայտնի է Գ. Վեյլի թեորեման [1]:

Վերջերս մեզանից մեկը [2] ցույց տվեց, որ (1)–(2) խնդրին համապատասխանող Ֆուրյեի ինտեգրալի կետային զուգամիտությունը տեղի ունի նույն պայմաններում, ինչ որ ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության դեպքում:

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է, որ էսպերս նույն ենթադրությունների դեպքում, ինչ որ Գ. Վեյլի թեորեմայում, տեղի ունի ոչ միայն $f(x)$ ֆունկցիայի վերլուծության կետային զուգամիտությունը, զուգամիտում է (բայց արդեն ոչ բացարձակ) գեյլի $f''(x)$ նաև կրկնակի դիֆերենցիալ վերլուծությունը:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեման՝

Թեորեմա. Դիցուք $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի երկրորդ կարգի ածանցյալ և բավարարված են հետևյալ պայմանները՝

1. $f(x) \in L_2(0, \infty)$,
2. $f''(x) \in L_2(0, \infty)$,
3. $\{f'' - q(x)f\} \in L_2(0, \infty)$,
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$,

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)E'_\lambda(x) - f'(x)E_\lambda(x)\} = 0, \quad E_\lambda(x) = \int_{+0}^x \varphi(x, \nu) d\nu, \quad (\lambda \neq 0),$$

որտեղ $\varphi(x, \nu)$ (1)–(2) խնդրի լուծումն է:

$$\text{Եթե } g(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) E_\lambda(x) dx,$$

$$\text{ապա } f''(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_x^*(x, \lambda) dg(\lambda).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям, М.—Л., 1950.
2. Левитан Б. М. Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений. Доклады АН СССР, т. 73, № 4 (1950) 651—654.
3. Саргсян И. С. Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма—Ливуилля. Доклады АН СССР, т. 104, № 6 (1955), 821—824.
4. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Известия АН СССР, серия мат., 19 (1955), 33—58.