

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Термонапряженное состояние в круглых бетонных блоках с учетом ползучести бетона

Задача определения температурных напряжений в круглых блоках была предметом многих исследований. Особенно нужно отметить работу Г. Н. Маслова [1], который подробно исследовал термонапряженное состояние круглого бетонного блока на основе методов теории упругости. В этой работе он рассматривает термонапряженное состояние тела без учета ползучести бетона и при допущении жесткой заделки блока в основании.

В недавно опубликованной работе Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [2] рассматривалось термонапряженное состояние прямоугольного бетонного блока, находящегося под действием стационарной температуры. При решении задачи учитывались ползучесть бетона и силы сопротивления, действующие вдоль плоскости контакта блока с основанием. В этой статье авторы показывают, что допущение отсутствия горизонтальных перемещений по линии контакта блока с основанием не отражает действительной картины температурных напряжений в таких блоках.

В настоящей работе рассматривается задача о термонапряженном состоянии круглого бетонного блока, расположенного на сплошном основании и находящегося под действием стационарной и нестационарной температуры, с учетом ползучести бетона и силы сопротивления, действующей вдоль плоскости контакта блока с его основанием.

1. Упруго-мгновенные напряжения в круглом блоке от воздействия стационарной температуры и сил связности

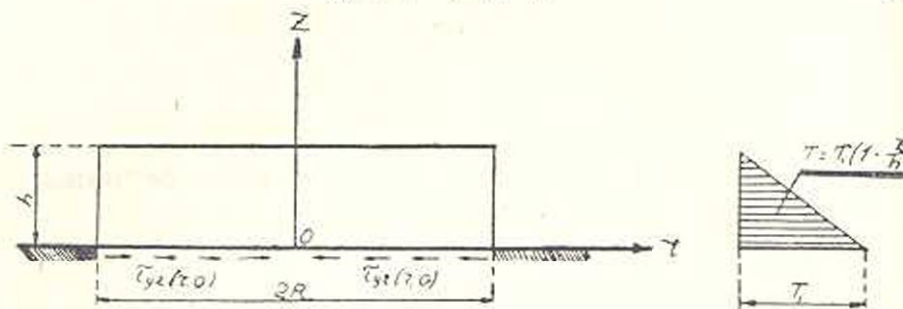
Пусть круглый бетонный блок высотой h и диаметром основания $2R$ (фиг. 1) находится под воздействием стационарной температуры T , зависящей только от координаты z , а в своем нижнем основании $z=0$ связан со сплошным основанием. Тогда появляются силы сопротивления, действующие по нижнему основанию блока в виде горизонтальных тангенциальных напряжений τ_{rz} (r — направление радиуса, z — направление оси вращения), которые называются силами связности блока с основанием.

На нижнем основании блока отсутствуют нормальные напряжения

$$\sigma_z(r, 0) = 0, \quad (1.1)$$

а действующие вдоль этого основания силы связности, при линейной характеристике, согласно [2], будут

$$\tau_{rz}(r, 0) = \beta u(r, 0), \quad (1)$$



Фиг. 1.

где β — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность кг/см^2 .
 $u(r, 0)$ — горизонтальное перемещение точек нижнего основания блока по направлению оси r .

Верхнюю границу блока $z = h$ считаем свободной от внешних напряжений

$$\sigma_z(r, h) = \tau_{rz}(r, h) = 0, \quad (2)$$

а на цилиндрической поверхности блока выполняются условия

$$\sigma_r(\pm R, z) = 0, \quad \int_0^h \tau_{rz} dz / r = \pm R = 0. \quad (3)$$

В силу симметрии граничных условий на оси $r = 0$ будут иметь место равенства

$$u(0, z) = \tau_{rz}(0, z) = 0. \quad (4)$$

Допустим, что температура изменяется по линейному закону:

$$T = T(z) = T_1 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (5)$$

где T_1 — температура нижнего основания блока.

Решение задачи о термоупругом состоянии рассматриваемого бетонного блока сводится к нахождению функции напряжений $\varphi(r, z)$, удовлетворяющей, согласно [3], следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \\ &= -E \alpha \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (6)$$

а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1), (1.3) и (1.4), где E — модуль мгновенной деформации блока, а α — коэффициент линейного расширения, имеющий размерность $\frac{1}{\text{град}}$.

При этом напряжения и перемещения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right],\end{aligned}\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz},\end{aligned}\quad (1.9)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Из (1.8) и (1.9) получим

$$u = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \alpha T r. \quad (1.10)$$

В нашем случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1.11)$$

Тогда (1.7) примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.12) ищем в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + B_k \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} + C_k \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + \right. \\ &\quad \left. + D_k \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} \right) J_0 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right),\end{aligned}\quad (1.13)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя i -го порядка первого рода с действительным аргументом; γ_k — корни уравнения

$$\frac{d}{dx} J_1(x) = 0. \quad (1.14)$$

Из (1.13) получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \varphi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (C_k \operatorname{ch} \alpha_k z + D_k \operatorname{sh} \alpha_k z) J_0(\alpha_k r), \quad (1.15)$$

где

$$\alpha_k = \gamma_k / R.$$

Интегрируя уравнение (1.15), найдем:

$$\nabla^2 \varphi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (C_k \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \operatorname{ch} \alpha_k z) J_0(\alpha_k r) + i(r), \quad (1.16)$$

где $i(r)$ — произвольная функция.

Пользуясь формулами (1.8), (1.10), (1.13) и (1.15), получим выражения для температурных напряжений и перемещения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [(A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \alpha_k z + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k - 2(1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k - 2(1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k - (1-2\nu) D_k] \operatorname{ch} \alpha_k z + [B_k - (1-2\nu) C_k] \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z \} J_1(\alpha_k r) + (1-\nu) f'(r) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} u(r, z) = & \frac{1+\nu}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k \operatorname{sh} \alpha_k z + B_k \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ & + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r) + \alpha \operatorname{Tr}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Удовлетворив условиям (1.1)–(1.5), из соотношений (1.17)–(1.20), для определения неизвестных коэффициентов A_k , B_k , C_k , D_k , получим следующие уравнения:

$$B_k - 2(1-\nu) C_k = 0, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} [A_k - 2(1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k h + [B_k - 2(1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k h + \\ + C_k \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} [A_k - (1-2\nu) D_k] \operatorname{ch} \alpha_k h + [B_k - (1-2\nu) C_k] \operatorname{sh} \alpha_k h + \\ + C_k \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h + D_k \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$A_k - (1-2\nu) D_k - \frac{1+\nu}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} B_k = 2\alpha \beta T_1 R^3 \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k (\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}, \quad (1.24)$$

$$\bar{i}(r) = 0. \quad (1.25)$$

При этом использовано следующее разложение функции r по бесселевым функциям [5]:

$$r = 2R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right), \quad (1.26)$$

$$0 \leq r < R$$

Решив уравнения (1.21)–(1.24), получим значения неизвестных коэффициентов A_k , B_k , C_k и D_k :

$$A_k = \frac{\left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 - 2(1-\nu) \operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k,$$

$$B_k = 2(1-\nu) C_k,$$

$$D_k = \frac{\operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k, \quad (1.27)$$

$$C_k = \frac{H_k \alpha_k h \chi_k}{\psi_k + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \chi_k},$$

где введены следующие обозначения:

$$H_k = -2\alpha \beta T_1 R^3 \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k (\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}, \quad (1.28)$$

$$\chi_k = \frac{\operatorname{th} \alpha_k h}{\alpha_k h} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h},$$

$$\psi_k = \operatorname{th}^2 \alpha_k h - \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2.$$

Пользуясь выражениями (1.27) и (1.28), для определения напряжений $\sigma_r(r, z)$, $\sigma_z(r, z)$, $\tau_{rz}(r, z)$ и перемещения $u(r, z)$, получим следующие формулы:

$$\frac{\sigma_r(r, z)}{E \alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \frac{1}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left(2 \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{sh} \alpha_k z - 2 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k z}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right) J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right). \quad (1.29)$$

$$\frac{\sigma_z(r, z)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times \\ \times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} J_0 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right), \quad (1.30)$$

$$\frac{\tau_{rz}(r, z)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times \\ \times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{ch} \alpha_k z - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k z}{\alpha_k h} \right] \right\} J_1 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right), \quad (1.31)$$

$$\frac{u(r, z)}{\alpha T_1 R} = - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times \\ \times \left\{ 2(1-\nu) \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - (1-2\nu) \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k z}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h} - \right. \\ \left. - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} J_1 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right) + \\ + \frac{r}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right). \quad (1.32)$$

Из выражения (1.29), для нормальных напряжений σ_r в точке $(0, 0)$, получим следующее значение

$$\frac{\sigma_r(0, 0)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1}, \quad (1.33)$$

где использовано значение

$$J_1'(0) = \frac{1}{2}. \quad (1.34)$$

Пользуясь формулой

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x), \quad (1.35)$$

выражению (1.26) можно дать следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \left[J_0 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right) - J_1 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right) \right], \quad (1.36)$$

Если в (1.36) подставить $\gamma=0$, то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} = 1. \quad (1.37)$$

В таблицах 1 и 2 приводятся некоторые значения нормальных напряжений $\frac{\sigma_r(r, z)}{E\alpha T_1}$. При этом использованы формулы (1.33) и

$$\frac{\sigma_r(0, h)}{E\alpha T_1} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{\varphi_k(x)}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1}, \quad (1.38)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{x - \text{th} x}{\chi_k x \text{ch} x} = \frac{x \text{ch} x - \text{sh} x}{\text{sh} x \text{ch} x - x}. \quad (1.39)$$

Таблица 1

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_r(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$ при

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, h = 1,00 \text{ м}, \nu = \frac{1}{6}$$

β	$\frac{E}{2\beta h}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
10	100		0,10979	0,34738
25	40		0,24291	0,60843
50	20		0,40525	0,77737
100	10		0,59865	0,90722
200	5		0,80770	0,96635

Таблица 2

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_r(0, h)}{E\alpha T_1} \right|$ при

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, h = 1,00 \text{ м}, \nu = \frac{1}{6}$$

β	$\frac{E}{2\beta h}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
10	100		0,05328	0,17312
25	40		0,12027	0,30420
50	20		0,20108	0,38807
100	10		0,29662	0,44907
200	5		0,40061	0,47950

Из данных, приведенных в таблицах 1 и 2, видно, что: 1) с увеличением отношения $\frac{h}{R}$ нормальные напряжения в блоке $\sigma_r(0, 0)$ и $\sigma_r(0, h)$ по абсолютным значениям растут; 2) с увеличением значения

коэффициента β , при сохранении отношения $\frac{h}{R}$, абсолютные значения $\sigma_r(0,0)$ и $\sigma_r(0,h)$ также возрастают. Сравнивая эти таблицы с таблицами, помещенными в работе [2], видим, что при круглом бетонном блоке $\sigma_r(0,0)$ и $\sigma_r(0,h)$ по абсолютным значениям получаются гораздо большими, чем при прямоугольном бетонном блоке.

Из выражения (1.31), для определения сил связности или касательных напряжений на нижнем основании блока, получаем следующую формулу:

$$\frac{\tau_{rz}(r,0)}{E\alpha T_1} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \cdot \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} \cdot \frac{\psi_k}{\alpha_k h \chi_k} \quad (1.40)$$

2. Температурные напряжения в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона и сил связности

Пусть круглый бетонный блок в некотором возрасте $\tau = \tau_1$ подвергается воздействию стационарного потока тепла, определяемого зависимостью (1.6).

Тогда составляющие упруго-мгновенного напряжения $\sigma_r(r, z, \tau_1)$, $\sigma_z(r, z, \tau_1)$ и $\tau_{rz}(r, z, \tau_1)$ определяются уравнениями (1.29)–(1.31) и не будут зависеть от времени.

Термонапряженное состояние, вызванное в круглом бетонном блоке воздействием стационарного теплового потока в возрасте $\tau = \tau_1$, под влиянием ползучести бетона с течением времени затухает.

В этом случае температурные напряжения в круглом бетонном блоке определяются функцией напряжений $\varphi(r, z, t)$, которая удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} - E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -E\alpha \nabla^2 T(r, z, t), \quad (2.1)$$

где

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести, $\varphi(\tau)$ — некоторая функция возраста бетона определяемая из опыта. C_0 , A_1 , γ — параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

Для учета ползучести бетона используем теорию ползучести бетона, развитую в работе [6].

В нашем случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.3)$$

Тогда для определения функции $\varphi(r, z, t)$ получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} - E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, t, \tau)}{\partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0, \quad (2.4)$$

однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Из теории интегральных уравнений известно, что однородное интегральное уравнение в регулярных случаях не имеет другого решения, кроме тождественного нуля, т. е. из (2.4) следует:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Функция $\varphi(r, z, t)$ будет иметь такой же вид, как функция напряжений $\varphi(r, z, t)$ при упругом решении (1.13), только в выражении функции $\varphi(r, z, t)$ коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k будут зависеть от времени t .

Решим задачу о температурных напряжениях в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, h, t) = \tau_{rz}(r, h, t) &= 0, \\ u(0, z, t) = \tau_{rz}(0, z, t) &= 0, \\ \sigma_r(R, z, t) = \int_0^h \tau_{rz}(r, z, t) dz \Big|_{r=R} &= 0, \\ \sigma_z(r, 0, t) = 0, \quad \tau_{rz}(r, 0, t) &= \beta u(r, 0, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

аналогичных граничным условиям упругой задачи.

Напряжения $\sigma_r(r, z, t)$, $\sigma_z(r, z, t)$, $\sigma_\theta(r, z, t)$ и $\tau_{rz}(r, z, t)$ выражаются через функцию $\varphi(r, z, t)$ следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial r^2} \right], \\ \sigma_\theta(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial r} \right], \\ \sigma_z(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz}(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Перемещения $u(r, z, t)$ и $w(r, z, t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_r(r, z, t) - \nu [\sigma_\theta(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)] - \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \sigma_r(r, z, \tau) - \nu [\sigma_\theta(r, z, \tau) + \sigma_z(r, z, \tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u(r, z, t)}{r} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta(r, z, t) - \nu [\sigma_r(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)] - \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \{ \sigma_\theta(r, z, \tau) - \nu [\sigma_r(r, z, \tau) + \sigma_z(r, z, \tau)] \} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial z} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_z(r, z, t) - \nu [\sigma_r(r, z, t) + \sigma_\theta(r, z, t)] - \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \{ \sigma_z(r, z, \tau) - \nu [\sigma_r(r, z, \tau) + \sigma_\theta(r, z, \tau)] \} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz}(r, z, t) - \\ &\quad - 2(1+\nu) \int_{\tau_1}^t \tau_{rz}(r, z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) получим

$$u(r, z, t) = \alpha T r - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial r \partial z} - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t \frac{\partial^2 \varphi(r, z, \tau)}{\partial r \partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k(t) \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + B_k(t) \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} + C_k(t) \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + \right. \\ &\quad \left. + D_k(t) \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} \right] J_0 \left(\gamma_k \frac{r}{R} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где γ_k — корни уравнения (1.14).

Пользуясь формулами (2.7), (2.9) и (2.10), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) + 2D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k(t) + 2C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ &\quad + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_2(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\sigma_z(r, z, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) - 2(1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_0(\alpha_k r), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(t, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + [B_k(t) - (1-2\nu) C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_1(\alpha_k r) + \\ + (1-\nu) \frac{d}{dr} f(r, t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} u(r, z, t) = \alpha T r + \frac{1+\nu}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k z + B_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ + B_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k(\tau) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ + D_k(\tau) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\alpha_k = \frac{\gamma_k}{R}$, $f(r, t)$ — произвольная функция.

Удовлетворив граничным условиям (2.6), из соотношений (2.11) — (2.14) для определения неизвестных коэффициентов $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, получим следующие уравнения:

$$B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t) = 0, \quad (2.15)$$

$$[A_k(t) - 2(1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k h + [B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k h + C_k(t) \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k(t) \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h = 0, \quad (2.16)$$

$$[A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k h + [B_k(t) - (1-2\nu) C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k h + C_k(t) \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h + D_k(t) \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t) - \frac{1+\nu}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} B_k + H_k + \\ + \frac{\beta(1+\nu)}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^t B_k(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$f(r, t) = 0. \quad (2.19)$$

При этом использовано обозначение (1.28) и разложение (1.26).

Решив уравнения (2.15)–(2.17), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_k(t) &= \frac{\left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 - 2(1-\nu) \operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k(t), \\ B_k(t) &= 2(1-\nu) C_k(t), \\ D_k(t) &= -\frac{\operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где использованы обозначения (1.28).

Подставив значения $A_k(t)$, $B_k(t)$ и $D_k(t)$ в (2.18), получим

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\psi_k}{\alpha_k h \chi_k} + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} \right] C_k(t) + H_k + \\ + \frac{2\beta(1-\nu^2)}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \frac{dC(t, \tau)}{d\tau} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставив сюда значение $C(t, \tau)$ из (2.2), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \right] C_k(t) - \alpha_k h H_k = 2\beta(1-\nu^2)h \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - \\ - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Отсюда следует, что

$$C_k(\tau_1) = \frac{\alpha_k h H_k}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}}. \quad (2.23)$$

Пользуясь соотношением (2.23), из (2.22) получим для определения $C_k(t)$ следующее интегральное уравнение

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau, \quad (2.24)$$

где

$$b_k = \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}} = \frac{E}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} > 0. \quad (2.25)$$

Дифференцируя (2.24) по t , получим

$$C_k'(t) = -\gamma b_k C_k(t) \varphi(t) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau, \quad (2.26)$$

откуда

$$C_k'(\tau_1) = -\gamma b_k C_k(\tau_1) \varphi(\tau_1). \quad (2.27)$$

Определив из уравнения (2.26), значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$$

и подставив в исходное уравнение (2.24), получим

$$C_k'(t) = -\gamma b_k C_k(t) \varphi(t) - \gamma C_k(t) + \gamma C_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Дифференцируя выражение (2.28) еще раз по t , приведем его к следующему виду

$$C_k''(t) + \gamma[1 + b_k \varphi(t)] C_k'(t) = 0. \quad (2.29)$$

Решение этого дифференциального уравнения с начальными условиями (2.23) и (2.27) имеет вид

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) [1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1)] \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz. \quad (2.30)$$

Если в уравнении (2.30) $\varphi(\tau)$ заменить значением

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0,$$

то оно примет следующий вид:

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \left\{ 1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1} \tau_1^{p_k} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\gamma_k z}}{z^{p_k}} dz \right\}; \quad (2.31)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma(1 + b_k C_0) &= \gamma_k, \\ \gamma b_k A_1 &= p_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Пользуясь понятием функции влияния $\Phi(\xi, p)$ [6]

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \quad (2.33)$$

будем иметь

$$\int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\gamma_k z}}{z^{p_k}} dz = \gamma_k^{-(1-p_k)} [\Phi(\gamma_k t, p_k) - \Phi(\gamma_k \tau_1, p_k)]. \quad (2.34)$$

Подставив это выражение в (2.31), получим

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma b_k}{r_k^{1-p_k}} \left(C_0 + \frac{\Lambda_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{p_k} e^{\gamma_k \tau_1} [\Phi(r_k t, p_k) - \Phi(r_k \tau_1, p_k)] \right\}. \quad (2.35)$$

Если ввести обозначение

$$H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) = 1 - \frac{\gamma E r_k^{p_k-1}}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} \left(C_0 + \frac{\Lambda_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{p_k} e^{\gamma_k \tau_1} [\Phi(r_k t, p_k) - \Phi(r_k \tau_1, p_k)], \quad (2.36)$$

то (2.35) примет следующий вид

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right). \quad (2.37)$$

Из (2.36) следует, что

$$H_k \left(\tau_1, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) = 1. \quad (2.38)$$

Таким образом, для определения температурных напряжений и перемещения в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^*(r, z, t)}{E z T_1} = & - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{1}{\alpha_k h \chi_k} \times \\ & \times \left\{ 2th \alpha_k h \frac{ch \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} - \alpha_k z th \alpha_k h \frac{sh \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} + \left(\frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) sh \alpha_k h - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \frac{ch \alpha_k z}{ch \alpha_k h} \right\} H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z^*(r, z, t)}{E z T_1} = & - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_0\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{1}{\alpha_k h \chi_k} \times \\ & \times \left\{ \alpha_k z th \alpha_k h \frac{sh \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) sh \alpha_k z \right\} H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{rz}^*(r, z, t)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\gamma_k} + 1\right] \alpha_k h \gamma_k} \times \\ \times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{ch} \alpha_k z - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k z}{\alpha_k h} \right] \right\} H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.41)$$

$$\frac{u^*(r, z, t)}{\alpha T_1 R} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\gamma_k} + 1\right] \alpha_k h \gamma_k} \times \\ \times \left\{ 2(1-\nu) \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - (1-2\nu) \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k z} - \right. \\ \left. - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} \times \\ \times H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) + \frac{r}{R} \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (2.42)$$

Из уравнений (2.39)–(2.41) следует, что термоупругие напряжения в круглых бетонных блоках $\sigma_r(r, z, t)$, $\sigma_z(r, z, t)$ и $\tau_{rz}(r, z, t)$, вызванные в начальный момент времени $t = \tau_1$ действием стационарного теплового потока, под влиянием ползучести бетона в течение времени затухают, причем интенсивность затухания определяется функцией $H_k \left(t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right)$. Эта последняя функция называется коэффициентом затухания.

Нужно отметить, что здесь рассматривается контактная задача теории ползучести круглых бетонных блоков, поэтому влияние ползучести бетона на термонапряженное состояние блока имеет ряд характерных особенностей, отличающих данную задачу от тех задач теории ползучести, когда на поверхности исследуемого тела заданы только напряжения или перемещения.

Как видно из (2.38) и (2.39)–(2.41), в этом случае закон изменения температурных напряжений $\sigma_r^*(r, z, t)$, $\sigma_z^*(r, z, t)$ и $\tau_{rz}^*(r, z, t)$ в бетонном блоке во времени зависит не только от меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ и возраста τ , но также и от геометрических размеров блока (R и h), от характера контакта (β) нижнего основания блока с основанием и от координаты точки (r, z) .

Ниже, в табл. 3, приводятся ряд значений температурных нормальных напряжений $\sigma_r(r, z, t)$ в точке $(0, 0)$, вычисленных в начальный момент воздействия температуры и в последующие моменты времени τ , при различных $\frac{h}{R}$ и $\frac{e}{2\beta h}$.

Характеристики для меры ползучести бетона приняты следующие:

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026;$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad \nu = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \tau_1 = 14 \text{ дням.}$$

Таблица 3

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_r^*(0, 0; t)}{\sigma_r(0, 0)}$
во времени, при различных $\frac{h}{R}$ и $\frac{E}{2\beta h}$

$\frac{E}{2\beta h}$		40		20	
t в днях	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
14		1,0	1,0	1,0	1,0
45		0,41047	0,74283	0,29577	0,58729
90		0,20903	0,62097	0,10736	0,41451
360		0,16014	0,57143	0,08031	0,35003
∞		0,16003	0,57058	0,08016	0,35887

Из данных, приведенных в табл. 3, видно, что: 1) начальные температурные напряжения $\sigma_r(0, 0, \tau_1)$ с течением времени быстро затухают, причем величина затухания доходит до 92%; 2) величина затухания зависит от отношения $\frac{h}{R}$ и от характера контакта (коэффициента β).

Сравнивая эту таблицу с таблицей, помещенной в работе [2], видим, что при круглом бетонном блоке затухание температурных напряжений σ_r происходит быстрее, чем при прямоугольном блоке.

3. Упруго-мгновенные напряжения в круглом блоке от воздействия нестационарной температуры и сил связности

Пусть рассмотренный в первом параграфе круглый блок находится под действием нестационарной температуры, определяемой законом

$$T(t, z) = T_1 \left(1 - \frac{z}{h} \right) (1 - e^{-st}) \quad (3.1)$$

где T_1 — температура нижнего основания блока в момент времени $t = \infty$, s — показатель, характеризующий изменение температуры в

блоке во времени. Температура нижнего основания блока в данный момент времени t будет

$$T_{1,s} = T_1 (1 - e^{-st}). \quad (3.2)$$

Заметим, что, как показывают опытные данные, соотношением вида (3.1) достаточно хорошо описываются законы изменения усадки бетона как по толщине блока, так и во времени.

Решение задачи о термоупругом состоянии рассматриваемого бетонного блока сводится к нахождению функции $\varphi(r, z)$, удовлетворяющей уравнению (1.7), а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1)–(1.4).

Согласно (3.1) имеем

$$\nabla^2 T(t, z) = 0. \quad (3.3)$$

Тогда (1.7) примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) ищем в виде (1.13). Аналогично рассуждениям, сделанным в первом параграфе, для напряжений и перемещения при нестационарной температуре, которые обозначим соответственно через $\sigma_{rs}(r, z)$, $\sigma_{zs}(r, z)$, $\tau_{rz}(r, z)$ и $u_s(r, z)$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \sigma_r(r, z), \\ \sigma_{zs}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \sigma_z(r, z), \\ \tau_{rz}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \tau_{rz}(r, z), \\ u_s(r, z) &= (1 - e^{-st}) u(r, z), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\sigma_r(r, z)$, $\sigma_z(r, z)$, $\tau_{rz}(r, z)$ и $u(r, z)$ вычисляются по формулам (1.29)–(1.32).

Нормальное напряжение σ_{rs} в точке $(0, 0)$ будет

$$\sigma_{rs}(0, 0) = (1 - e^{-st}) \sigma_r(0, 0), \quad (3.6)$$

а в точке $(0, h)$:

$$\sigma_{rs}(0, h) = (1 - e^{-st}) \sigma_r(0, h), \quad (3.7)$$

где $\sigma_r(0, 0)$ и $\sigma_r(0, h)$ определяются по формулам (1.33) и (1.38).

В таблицах 4 и 5 приводятся некоторые значения нормальных напряжений $\sigma_{rs}(r, z)$ в точках $(0, 0)$ и $(0, h)$.

4. Температурные напряжения в круглом бетонном блоке от воздействия нестационарной температуры с учетом ползучести бетона и сил связности

В этом случае функция напряжений $\varphi(r, z, t)$ опять удовлетворяет уравнению (2.5):

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Таблица 4

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_{rs}(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$ при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $h = 1,00 \text{ м}$, $\nu = \frac{1}{6}$, $s = 0,0085$.

$\frac{E}{2\beta h}$		100		40		20		10		5	
$\frac{t}{\text{в днях}}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
14		0,01112	0,03897	0,02725	0,06826	0,04546	0,03721	0,05716	0,10178	0,03032	0,10342
45		0,03429	0,11029	0,07712	0,19318	0,12867	0,31065	0,19007	0,28804	0,25646	0,30631
90		0,05774	0,18573	0,12998	0,32531	0,21667	0,415 4	0,32008	0,48506	0,43207	0,51663
360		0,08461	0,27216	0,19031	0,47648	0,31750	0,60904	0,46902	0,71077	0,63283	0,75710
∞		0,10979	0,31738	0,24291	0,60843	0,40525	0,77737	0,54865	0,90722	0,80773	0,96635

Таблица 5

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_{rs}(0, h)}{E\alpha T_1} \right|$ при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $h = 1,00 \text{ м}$, $\nu = \frac{1}{6}$, $s = 0,0085$.

$\frac{E}{2\beta h}$		100		40		20		10		5	
$\frac{t}{\text{в днях}}$	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
14		0,00598	0,01942	0,01342	0,03413	0,02251	0,01354	0,03328	0,05033	0,04494	0,05380
45		0,01692	0,05497	0,03819	0,09658	0,06334	0,12321	0,09418	0,14258	0,12719	0,15224
90		0,02849	0,09 56	0,06430	0,16265	0,10751	0,20749	0,15859	0,24010	0,21419	0,25637
360		0,04174	0,13563	0,09423	0,23333	0,15754	0,30 04	0,23239	0,35183	0,31386	0,37567
∞		0,05328	0,17312	0,12027	0,30420	0,20103	0,38807	0,29662	0,44107	0,40061	0,47950

Решим уравнение (2.5) с контурными условиями (2.6). Решение будем искать в виде (2.10). Тогда получим значения $\sigma_r(r, z, t)$, $\sigma_z(r, z, t)$, $\tau_{rz}(r, z, t)$ и $u(r, z, t)$ в виде (2.11)–(2.14). Значения $A_k(t)$, $B_k(t)$, $D_k(t)$, выраженные через $C_k(t)$, получим в виде (2.20), причем $C_k(t)$ в этом случае будет удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \right] C_k(t) - \alpha_k h H_{ks}(t) = \\ = 2\beta(1-\nu^2)h \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau, \quad (4.1)$$

где

$$H_{ks}(t) = -2\alpha_k R^3 T_1 (1 - e^{-st}) \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}. \quad (4.1')$$

Отсюда следует, что

$$C_k(\tau_1) = \frac{\alpha_k h H_{ks}(\tau_1)}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}}, \quad (4.2)$$

где

$$H_{ks}(\tau_1) = -2\alpha_k R^3 T_1 (1 - e^{-s\tau_1}) \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}. \quad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.3) следует что

$$H_{ks}(t) = H_{ks}(\tau_1) \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}}. \quad (4.4)$$

Пользуясь соотношениями (4.2) и (4.4), из (4.1) получим для определения $C_k(t)$ следующее интегральное уравнение

$$C_k(t) = \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + \\ + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau. \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) по t , получим

$$C_k'(t) = \frac{se^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) - \gamma b_k \varphi(t) C_k(t) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что

$$C_k'(\tau_1) = \frac{se^{-s\tau_1}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) - \gamma b_k \varphi(\tau_1) C_k(\tau_1). \quad (4.7)$$

Определив из (4.6) значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \quad (4.8)$$

и подставив в исходное интегральное уравнение (4.5), получим:

$$C_k'(t) = \gamma \frac{1-e^{-st}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau - b_k \gamma \varphi(t) C_k(t) - \\ - \gamma C_k(t) + \frac{se^{-st}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1). \quad (4.9)$$

Дифференцируя выражение (4.9) по t , приведем его к следующему виду:

$$C_k''(t) + \gamma[1 + b_k \varphi(t)] C_k'(t) - \frac{s(\gamma-s)}{1-e^{-s\tau_1}} e^{-s\tau_1} C_k(\tau_1). \quad (4.10)$$

При $s \rightarrow \infty$, (4.10) совпадает с (2.29).

Решение дифференциального уравнения (4.10) с начальными условиями (4.2) и (4.7) имеет вид:

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) F_k \left[t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h}, s \right], \quad (4.11)$$

где

$$F_k \left[t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h}, s \right] = 1 - \left\{ \gamma b_k \varphi(\tau_1) - \right. \\ \left. - \frac{se^{-s\tau_1}}{1-e^{-s\tau_1}} \right\} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^x [1+b_k \varphi(x)] dx} d\tau + \\ + \frac{s(\gamma-s)}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{\tau_1}^t \left\{ e^{-\gamma \int_{\tau_1}^x [1+b_k \varphi(x)] dx} \int_{\tau_1}^x e^{-sx-\gamma \int_{\tau_1}^z [1+b_k \varphi(z)] dz} dx \right\} d\tau. \quad (4.12)$$

Если в этом случае напряжения и перемещение обозначим соответственно через $\sigma_{rs}^*(r, z, t)$, $\sigma_{zs}^*(r, z, t)$, $\tau_{rz}^*(r, z, t)$, и $u_s^*(r, z, t)$, то получим

$$\frac{\sigma_{rs}^*(r, z, t)}{E \alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} (1-e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) F_k \left[t, \tau_1 \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} s \right], \quad (4.13)$$

где

$$M_k(r, z) = \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_k^1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\gamma_k}{\gamma_k} + 1 \right] \alpha_k h \gamma_k} \times \\ \times \left\{ 2 \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k h - 2 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k z}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right\}. \quad (4.14)$$

Аналогично можно написать выражения для $\sigma_{rs}^*(r, z, t)$, $\tau_{rs}^*(r, z, t)$ и $\sigma_s^*(r, z, t)$.

5. Применение метода Крылова-Боголюбова

Для определения $C_k(t)$ применим метод Крылова-Боголюбова [7]. Выражение (4.5) можно написать в следующем виде

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \frac{1-e^{-st}}{1-e^{-s\tau_1}} + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.1)$$

Как известно, метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова состоит в том, что в интегральном уравнении (5.1) нужно верхнему пределу t дать последовательно возрастающие конкретные значения $t_1, t_2, \dots, t_n$. Тогда уравнение (5.1) может быть переписано для каждого значения t_n в следующем виде

$$C_k(t_1) = \frac{1-e^{-st_1}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (5.2)$$

$$C_k(t_2) = \frac{1-e^{-st_2}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + b_k \int_{t_1}^{t_2} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.3)$$

$$C_k(t_n) = \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \left\{ \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\}. \quad (5.4)$$

Если интегрировать (5.2) по частям и иметь в виду, что $C(t_1, t_1) = 0$, то получим

$$C_k(t_1) - C_k(\tau_1) \left[\frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k C(t_1, \tau_1) \right] = -b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C(t_1, \tau) \frac{\partial C_k(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.5)$$

Применив к интегралу в правой части полученного выражения теорему о среднем и делая некоторые преобразования, найдем:

$$C_k(t_1) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_1, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) \right] \right\}. \quad (5.6)$$

Символом $C(t_m, \xi \left|_{t_{k-1}}^{t_k} \right.)$ здесь обозначено среднее значение функции $C(t_m, \tau)$ в интервале (t_{k-1}, t_k) .

Аналогичным образом из (5.3) и (5.4) получим:

$$C_k(t_2) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] - \right. \\ \left. - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[C(t_2, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] \right\}, \quad (5.7)$$

$$C_k(t_n) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_n, \xi \left|_{t_{n-1}}^{t_n} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) \right] - \right. \\ \left. - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[C(t_n, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) - C(t_n, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] - \right. \\ \left. - \dots - b_k \frac{C_k(t_{n-1})}{C_k(\tau_1)} \left[C(t_n, \xi \left|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \right.) - C(t_n, \xi \left|_{t_{n-1}}^{t_n} \right.) \right] \right\}. \quad (5.8)$$

Формулы (5.6), (5.7) и (5.8) в общем виде являются точным решением уравнения (4.5). Для определения численных значений $C_k(t)$

необходимо применить приближенный метод определения средней величины

$$C(t_n, \xi \Big|_{t_{k-1}}^{t_k}).$$

В практических расчетах эту величину можно определить с помощью следующего приближенного равенства:

$$C(t_n, \xi \Big|_{t_{k-1}}^{t_k}) = C\left(t_n, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right).$$

Подставив это выражение в (5.6), (5.7) и (5.8), получим решение интегрального уравнения (4.5) в следующем виде:

$$C_k(t_1) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.9)$$

$$C_k(t_2) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.10)$$

$$C_k(t_n) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_n, \tau_1) - \right. \right. \\ \left. - C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] - \\ \left. - \dots - b_k \frac{C_k(t_{n-1})}{C_k(\tau_1)} \left[C\left(t_n, \frac{t_{n-2} + t_{n-1}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.11)$$

Если ввести обозначения

$$G_k(t_1) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.12)$$

$$G_k(t_2) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - b_k G_k(t_1) \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.13)$$

$$G_k(t_n) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[C(t_n, \tau_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k G_k(t_1) \left[C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - \dots - b_k G_k(t_{n-1}) \left[C\left(t_n, \frac{t_{n-2} + t_{n-1}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) \right] \right\}, \quad (5.14)$$

то выражения (5.9), (5.10) и (5.11) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} C_k(t_1) &= C_k(\tau_1) G_k(t_1) \\ C_k(t_2) &= C_k(\tau_1) G_k(t_2) \\ C_k(t_n) &= C_k(\tau_1) G_k(t_n) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Из (5.12)–(5.14) следует, что

$$G_k(\tau_1) = 1. \quad (5.16)$$

Если в этом случае напряжения и перемещение обозначим через $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$, $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$, $\tau_{rs}^{**}(r, z, t)$ и $u_s^{**}(r, z, t)$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_1)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1-\nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_1), \\ \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_2)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1-\nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_2), \\ \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_n)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1-\nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_n). \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Аналогично получим выражения для $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_1)$, $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_2)$, $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_n)$, $\dots$, $u_s^{**}(r, z, t_n)$.

Ниже, в табл. 6, приводятся ряд значений температурных напряжений $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$ в точке (0,0).

Характеристики меры ползучести бетона принимаем те же, как и при составлении табл. 3.

Таблица 6

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_{\text{тс}}(0, 0, t)}{\sigma_{\text{тс}}(0, 0)}$ во времени t , при различных $\frac{h}{R}$ и $\frac{E}{2\beta h}$.

$\frac{E}{2\beta h}$		40		20	
t в днях	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
14		1	1	1	1
45		0,64815	0,84653	0,58176	0,75717
90		0,52180	0,76250	0,44141	0,64320
360		0,47631	0,71874	0,40864	0,59613
∞		0,47392	0,71371	0,40612	0,59435

Сравнивая эту таблицу с таблицей 3, видим, что при нестационарной температуре затухание температурных напряжений σ_t происходит медленнее, чем при стационарной температуре.

Ереванский государственный
университет им. В. М. Мозагова

Поступило 6 VII 1955

Մ. Մ. Մանուկյան

ՋԵՐՄԱԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ԿԼՈՐ ԲԵՏՈՆՅԱ ԲԼՈԿՆԵՐՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ շԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում են կլոր բետոնյա բլոկների ջերմային լարումները, երբ բլոկը գրված է միասին չիմքի վրա և գտնվում է ստացիոնար ու ոչ ստացիոնար ջերմության աղբյուրային տակ: Թնդրում հաշվի են առնված սողքի և բլոկի չիմնատակի հետ միացման շարժական վրա գործող կապակցության ուժերը: Որոշված են ջերմային լարումները և տեղափոխումները կազմված են համապատասխան աղյուսակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Г. Н. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Изв. НИИГ, том 23, 1938.
2. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VIII, № 4, 1955.
3. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
4. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН Армянской ССР, т. XIX, № 1, 1954.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госизондат, М., 1949.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостелиздат, М., 1952.
7. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 6, 1954.