Г. М. Гарибян

К микроскопическому выводу формулы Ферми

1. Ферми [1] была выведена классическая формула для полных потерь энергии заряженной частицей на расстояниях b , превышающих радиусы атомов, при движении с постоянной скоростью в среде. Потери энергии отождествляются с потоком вектора Пойтинга через цилиндрическую поверхность радиуса b вокруг траектории частицы. В дальнейшем этот способ расчета был значительно усовершенствован многими авторами, причем в основном они занимались более точным учетом диэлектрических свойств среды и разделением потерь на ионизацию и возбуждение атомов и на черенковское излучение.

Кроме этого, Будини [2] был дан также микроскопический вывод формулы Ферми. Идея этого метода заключается в том, что поле движущейся заряженной частицы в среде при скорости частицы, близкой к скорости света, разлагается на поле псевдофотонов. Вводя затем классический коэффициент поглощения фотонов в веществе, получают потери энергии заряженной частицей, отождествляя их с энергией поглощенных псевдофотонов. Выведенная таким образом формула совпадает с формулой Ферми. При этом Будини брал в качестве классического коэффициента поглощения фотонов в веществе выражение, справедливое для разряженных сред.

Настоящим мы хотим показать, что формулу Ферми можно получить и с коэффициентом поглощения фотонов для плотных сред, если выражение для числа псевдофотонов брать в более точном виде.

2. Как известно [3], электрическое поле заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси x в среде, дается следующими формулами

$$E_x = -\frac{ie}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(k(\omega)\rho) e^{i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)} \omega d\omega, \quad (1)$$

$$E_\rho = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} k(\omega) K_1(k(\omega)\rho) e^{i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)} d\omega,$$

где E_x и E_ρ — компоненты электрического поля частицы вдоль и

поперек пути частицы, $k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon(\omega))$, $\text{Re}k(\omega) \geq 0$, K_0 и K_1 —

видоизмененные функции Ганкеля, а $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая постоянная среды. Действием магнитного поля на электроны атомов среды, как это обычно делается в методе Вейцекера-Вильямса [4], мы будем пренебрегать*. Электрические поля E_x и E_p мы можем рассматривать как суперпозиции электрических полей псевдофотонов.

Вектор Пойтинга каждого из таких псевдофотонов равен $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \mathbf{H}$. В

среде электрическое и магнитное поля фотона связаны друг с другом [5] согласно формуле $\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \mathbf{H}$ или, так как мы рассматривали немагнитные среды,

$$\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \mathbf{H}. \quad (2)$$

Поэтому мы добавляем к имеющемуся магнитному полю такую величину, чтобы оно по абсолютной величине определялось бы формулой (2) и вектор Пойтинга полученных таким образом фотонов был бы направлен вдоль и перпендикулярно траектории частицы. Таким образом, поток энергии, связанный с каждым из фотонов, будет равен $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}$.

Заметим, что дисперсия учитывается тем, что

$$\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{если } \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega.$$

Итак, полный поток энергии псевдофотонов, соответствующих причесельным параметрам $\rho, \rho + d\rho$, за все время пролета частицы равен

$$\begin{aligned} 2 \pi \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_p \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_x \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}_x) = \\ = \rho d\rho \frac{2e^2 c}{\pi v^4} \int_0^\infty \frac{\omega^2 \text{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{[\varepsilon(\omega)]^2} |1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)| \cdot \\ \cdot (|K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2) d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Подсчет потока вектора Пойтинга, направленного вдоль траектории (электрический вектор $\mathbf{E}_p$), в формуле (3) не представляет затруднений. Что же касается вектора Пойтинга, направленного перпендикулярно траектории частицы (электрический вектор $\mathbf{E}_x$), то для его подсчета мы должны представить себе цилиндрическую поверх-

* Действие магнитного поля в $\frac{v}{c}$ раз меньше действия электрического поля, где v — скорость валентных электронов атома.

ность, сжимающуюся со скоростью v к траектории частицы. Тогда поток электромагнитной энергии, который пройдет через эту поверхность при сжатии ее от радиуса $\rho + d\rho$ до ρ , будет равен

$$S_1 = \frac{d\rho}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} E_x \sqrt{\epsilon} E_x 2\pi\rho dx.$$

Но из (1), ввиду специальной зависимости полей от x и t , следует, что

$$S_1 = d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} E_x \sqrt{\epsilon} E_x 2\pi\rho dt.$$

Число псевдофотонов, соответствующих прицельным параметрам $\rho, \rho + d\rho$, мы получим, разделив (3) на $h^*\omega$:

$$\begin{aligned} \Omega d\omega d\rho = \\ = \rho \frac{2e^2c}{h\pi v^4} \frac{\operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}{|\epsilon(\omega)|^2} \omega |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)|. \end{aligned}$$

$$\{ |K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2 \} d\omega d\rho. \quad (14)$$

Потери энергии заряженной частицей на прицельных расстояниях $\rho, \rho + d\rho$ на единице длины пути равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} d\rho = d\rho \int_0^{\infty} \Omega h\omega N \delta(\omega) d\omega, \quad (5)$$

где N — число атомов в единице объема, а $\sigma(\omega)$ — поперечник взаимодействия фотона частоты ω с атомом среды. Подставляя в (5) различные сечения взаимодействия фотонов, мы можем получить соответствующие потери энергии.

Классический коэффициент поглощения фотонов в веществе равен [6]:

$$N\sigma(\omega) = -\frac{2\omega\kappa}{c}, \quad (6)$$

где $\epsilon = \epsilon' - i\kappa$, или $\epsilon^2 = \epsilon'^2 - \kappa^2 - 2\pi i\kappa$. Отсюда следует, что

$$\kappa = -\frac{\operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{2\operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}.$$

Таким образом

$$N\sigma(\omega) = \frac{\omega \operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{c \operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}. \quad (7)$$

Подставим это выражение в формулу (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} d\rho = d\rho \int_0^{\infty} \frac{2e^2\rho}{\pi v^4} \cdot \frac{\omega^2 \operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{|\epsilon(\omega)|^2} |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot \\ \cdot \{ |K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2 \} d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

* Здесь и в последующем под h следует понимать $\frac{h}{2\pi}$.

Если теперь произвести интегрирование по ρ от b до ∞ , воспользовавшись формулами Ломмеля [7], то получим известное выражение Ферми.

$$\frac{dW}{dx} = \int_b^{\infty} \frac{\partial W}{\partial x} d\rho = \frac{2e^2 b}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K^* K_1 (K^* \rho) K_0 (K \rho) i \omega d\omega. \quad (9)$$

3. Как уже было отмечено выше, Будини брал выражение для коэффициента поглощения фотонов в разреженной среде, т. е.

$$N\sigma(\omega) = \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{c},$$

полагая $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sim 1$. Подсчитывая же число псевдофотонов, Будини не учитывал, что $H = V \sqrt{\varepsilon} E$, а это привело к отсутствию $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ в числителе формулы (4). Как видно из вышесказанного, формула Ферми получится в случае любых сред, если брать в качестве числа псевдофотонов выражение [4] и не делать никаких приближений для классического коэффициента поглощения фотонов.

Институт физики АН
Армянской ССР

Поступило 7 X 1955

Գ. Մ. Գարիբյան

ՖԵՐՄԻԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՄԻԿՐՈՍԿՈՊԻԿ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեծ հետազոտությունների վրա մասնիկների էներգիայի կորուստների՝ ֆերմիի բանաձևը միկրոսկոպիկ կերպով ստացված է կամավոր խառնված միջավայրերի համար: Նշված են անճշտություններ Բուդինի արտածման մեջ, որը վերանշխյալ բանաձևը միկրոսկոպիկ կերպով ստացել էր միայն նուր միջավայրերի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Fermi E. Phys. Rev., 57, 485, 1940.
2. Budini P. Nuovo Cimento, 10, 236, 1953.
3. См. например, Schönberg M., Nuovo Cim., 8, 159, 1951.
4. Williams E. J. Det. Kgl. Danske Viden. Selsk. Math-Fys. Med., 13, № 4, 1935.
5. Тамм И. Е. Теория электричества, М.—Л., 1946, стр. 501.
6. Беккер Р. Теория электричества, М.—Л., 1941, стр. 139.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций, М.—Л., 1948, стр. 237.