

Г. В. Бадалян

## Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

§ 1. Обобщение многочленов Лежандра

§ 2. Обобщение теорем Мюнтца

§ 3. Применение к теории моментов и некоторые экстремальные задачи

§ 4. Применение к функциям класса  $H_2^2(-\infty, \infty)$

§ 5. Применение к функциям класса  $W_0$

§ 6. Оценка максимума модуля квази-многочлена Чебышева  $n$ -ой обобщенной степени

1\*

### Предисловие

Пусть имеем последовательность чисел

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n < \dots$$

и пусть

$$\dots \leq \gamma_{k_m-1} < \gamma_{k_m} = \gamma_{k_m+1} = \dots = \gamma_{k_m} < \gamma_{k_m+1} \leq \dots$$

Введем обозначение

$$\omega_{k_m+\nu}(x) = x^{\gamma_{k_m}} (\ln x)^\nu,$$

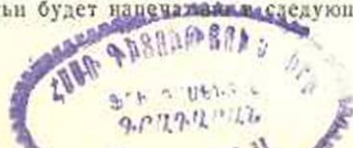
где  $\nu$  — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq \nu \leq k_m - k_m.$$

Ставится задача — из линейной комбинации функций  $\omega_n(x)$  составить систему квази-многочленов, ортонормальную на  $[0,1]$  при весовой функции  $p(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ .

Оказывается, что такая система  $\{p_n(x)\}$  квази-многочленов существует и

\* Продолжение статьи будет напечатано в следующем номере «Известий».



$$P_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n + 1 + \alpha}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{s=0}^n (\zeta + \gamma_s + 1 + \alpha)x^s}{(\zeta + \gamma_n + 1 + \alpha) \prod_{s=0}^n (\zeta - \gamma_s)} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$C_n$  — окружность  $|\zeta - \gamma_n| = \gamma_n + \frac{1}{2}$ .

Используя систему квази-многочленов  $\{P_n(x)\}$ , в параграфе 2 обобщаются известные теоремы Мюнтца для системы функций  $\{\omega_n(x)\}$  и  $\{\omega_n^*(x)\}$  [см. определение (2,3)], причем получаются не только достаточные условия, которые были получены ранее (см. [1] и [3]), но и необходимые условия.

В параграфе 3 ряды Фурье по системе функций  $\{P_n(x) = P_n(e^{-x})\}$  применяются к теории моментов в классе функций  $e^{-\frac{x}{2}}\phi(x) \in L^2(0, \infty)$ , а также к решению ряда экстремальных задач.

В параграфе 4 показывается, что функции

$$\left\{ \Phi_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \frac{1}{2\pi(2\gamma_n + 1)} \frac{\prod_{s=0}^{n-1} (iy - \gamma_s^*)}{\prod_{s=0}^n (iy + \gamma_s^*)} \right\},$$

где  $\gamma_s^* = \gamma_s + \frac{1}{2} > 0$ , составляют ортонормальную систему на  $(-\infty, \infty)$  при весовой функции  $p(y) = 1$ .

Далее рассматривается ряд экстремальных задач для функций класса  $H_{\gamma}^2(-\infty, \infty)$  [см. определение (4.1)], а также задача приближения таких функций рациональными функциями.

В параграфе 5 рассматривается ряд экстремальных задач для функций класса  $W_+$ , причем вводится класс функций, являющийся естественным обобщением известных функций Бесселя, а также изучается вопрос приближения функций класса  $W_+$  линейными агрегатами функций

$$\theta_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{p_k} dx,$$

$$\theta_k^*(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin zx \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{m_k} dx,$$

где  $p_k > 0$  и  $m_k > 0$  соответственно произвольные четные и нечетные числа.

В последнем параграфе рассматриваются квази-многочлены

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 \omega_1(x) + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1}(x) + \omega_n(x),$$

где  $\gamma_1 > 0$ ,  $x \in [0, 1]$  и дается двусторонняя оценка выражения

$$\inf_{Q_n} \left\{ \sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x)| \right\} = M_n.$$

Наконец, формулируется достаточное условие разложения функций в ряд Фурье по системе  $\{p_n(x)\}$  на  $(0, 1)$ .

### § 1. Обобщение многочленов Лежандра

В настоящем параграфе дается обобщение классических многочленов Лежандра на дробные степени аргумента на отрезке  $[0, 1]$ .

Пусть дана последовательность действительных чисел

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \quad (1.1)$$

Ставится задача — построить систему квази-многочленов

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^{\gamma_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

обладающую свойством ортогональности и нормальности на  $[0, 1]$  при весовой функции  $p(x) = 1$ .

Для решения поставленной задачи определим функции

$$p_{sn}(x) = \sum_{k=0}^n a_{sk} x^{\gamma_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

где  $0 < x \leq 1$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_{sn}(x) dx = \begin{cases} c_{sn}, & \text{при } k = s, \\ 0, & \text{при } k \neq s, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

причем  $\{c_{sn}\}$  произвольная последовательность действительных чисел.

Нетрудно заметить, что условия (1.4) определяют  $p_{sn}(x)$  единственным образом, независимо от поведения ряда  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v + 1}$ .

Действительно, условия (1.4) в развернутом виде запишутся так:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_{sk}}{\gamma_k + 1} = c_{sn}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где  $\gamma'_v = \gamma_v + 1$ .

С другой стороны, определитель полученной системы линейных уравнений с неизвестными  $a_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$  равняется

$$D = \frac{\prod_{k < i < n} (\gamma'_i - \gamma'_k) (\gamma_i - \gamma_k)}{\prod_{l, k < n} (\gamma'_l + \gamma_k)}$$

и в силу (1.1) отличен от нуля.

Этим доказывается единственность квази-многочленов

$$P_{sn}(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Постараемся теперь найти выражения этих квази-многочленов в возможно компактном виде.

С этой целью докажем предложение:

*Теорема (1.1). Квази-многочлен  $p_{sn}(x)$  имеет представление:*

$$p_{sn}(x) = \frac{b_{sn}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma'_\nu) x^\zeta}{(\zeta + \gamma'_s) \prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} d\zeta, \quad (1.5)$$

где  $\gamma'_s = \gamma_s + 1$ , простой контур  $C$  охватывает окрестности нулей функции  $\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)$ , а  $b_{sn} = c_{sn} \prod_{\nu=0}^n (\gamma'_s + \gamma_\nu) \prod_{\nu=0}^n (\gamma'_s - \gamma_\nu)^{-1}$ ,

$$\prod_{\nu=0}^n (z - \gamma_\nu)_s = \frac{\prod_{\nu=0}^n (z - \gamma_\nu)}{z - \gamma_s}.$$

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что квази-многочлены

$$p_{sn}^*(x) = \frac{b_{sn}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma'_\nu) x^\zeta}{(\zeta + \gamma'_s) \prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} d\zeta$$

удовлетворяют условиям (1.4), т. е., что

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_{sn}^*(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq s, \\ c_{sn}, & k = s, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_{sn}^*(x) dx = \frac{b_{sn}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v)}{(\zeta + \gamma'_s) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} \frac{\int_0^1 x^{\gamma_k + \zeta} dx}{\zeta} ds, \quad (1.6)$$

где контур  $C$  — окружность  $|\zeta - \gamma_n| = \gamma_n + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  и определяется так, чтобы  $\operatorname{Re}(\zeta) + \gamma'_k > 0$ .

Заметим, что при таком выборе контура  $C$  законность изменения порядка интегрирования в правой части (1.6) очевидна.

После интегрирования получаем

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_{sn}^*(x) dx = \frac{b_{sn}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v) d\zeta}{(\zeta + \gamma'_s) (\zeta + \gamma'_k) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)}. \quad (1.6')$$

Так как при  $k \neq s$  вне контура  $C$  подинтегральное выражение правой части (1.6) не имеет особых точек, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v) d\zeta}{(\zeta + \gamma'_s) (\zeta + \gamma'_k) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} = 0,$$

т. е., что

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_{sn}^*(x) dx = 0, \text{ когда } k \neq s.$$

Рассмотрим теперь

$$\int_0^1 x^{\gamma_s} p_{sn}^*(x) dx = \frac{b_{sn}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v) d\zeta}{(\zeta + \gamma'_s)^2 \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)}, \quad (1.6'')$$

где простой контур  $C$  оставляет точку  $\zeta = -\gamma'_s$  вне ограниченной им области  $\bar{D}$ . Это значит, что

$$\int_0^1 x^{\gamma_s} p_{sn}^*(x) dx = -b_{sn} \frac{\prod_{v=0}^n (\gamma'_v - \gamma'_s)}{\prod_{v=0}^n (-\gamma'_s - \gamma_v)} = b_{sn} \frac{\prod_{v=0}^n (\gamma'_s - \gamma'_v)}{\prod_{v=0}^n (\gamma'_s + \gamma_v)},$$

где

$$\prod_{s=0}^n (z - \gamma'_s) = \frac{\prod_{s=0}^n (z - \gamma_s)}{z - \gamma'_s}.$$

После замечания, что  $\gamma'_s - \gamma_s = \gamma_s - \gamma'_s$  и подстановки значения

$$b_{sn} = c_{sn} \prod_{s=0}^n (\gamma'_s + \gamma_s) \prod_{s=0}^{n-1} (\gamma_s - \gamma'_s)^{-1}$$

получаем, что

$$\int_0^1 x^{\gamma_s} \cdot p_{sn}^*(x) dx = c_{sn}.$$

Этим доказывается, что  $p_{sn}^*(x) = p_{sn}(x)$ , чем и завершается доказательство теоремы.

*Определение (1.1).* Введем обозначения

$$c_{nn} = c_n, \quad b_{nn} = b_n$$

$$p_{nn}(x) = p_n(x) = \frac{b_n}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{s=0}^{n-1} (\zeta + \gamma'_s) x^{\zeta} d\zeta}{\prod_{s=0}^n (\zeta - \gamma_s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

причем

$$p_0(x) = \frac{b_0}{2\pi i} \int_C \frac{x^{\zeta} d\zeta}{\zeta - \gamma_0}.$$

*Теорема (1.2).* Последовательность квази-многочленов  $\{p_n(x)\}$  при весовой функции  $p(x) = 1$  на сегменте  $[0, 1]$  составляет ортогональную систему.

Требуется доказать, что когда  $m \neq n$

$$\int_0^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0. \quad (1.8)$$

Для доказательства достаточно заметить, что для всякого  $k < n$

$$\int_0^1 x^{\gamma_k} p_n(x) dx = 0. \quad (1.4)$$

Допустим теперь, что  $m < n$ , тогда, записав  $p_m(x)$  в развернутом виде и используя равенство (1.4), убедимся в том, что

$$\int_0^1 p_m(x) p_n(x) dx = 0, \quad \text{когда } m < n.$$

*Теорема (1.3).* При  $b_n = \sqrt{\gamma_n + \gamma'_n} = \sqrt{2\gamma_n + 1}$  справедливо равенство

$$\int_0^1 p_n^2(x) dx = 1. \quad (1.9)$$

Обозначим

$$\int_0^1 p_n^2(x) dx = A_n^2. \quad (1.10)$$

Имеем

$$\int_0^1 \gamma_n x^{2n}(x) dx = c_n.$$

С другой стороны очевидно, что

$$\int_0^1 p_n(x)p_n(x) dx = \int_0^1 a_n x^{2n} p_n(x) dx = a_n c_n = A_n^2.$$

Для доказательства теоремы остается определить  $a_n$ .

Имеем

$$p_n(x) = \frac{b_n}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta - \gamma'_v) x^n}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta.$$

В силу условия (1.1) вычислением вычета подынтегральной функции последнего интеграла относительно точки  $\zeta = \gamma_n$  получаем

$$a_n = b_n \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\gamma_n + \gamma'_v)}{\prod_{v=0}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_v)}.$$

Таким образом получаем, что

$$A_n^2 = a_n c_n = b_n c_n \prod_{v=0}^{n-1} \frac{\gamma_n + \gamma'_v}{\gamma_n - \gamma_v}. \quad (1.10')$$

В силу теоремы (1.1) и определения (1.1) имеем

$$b_n = c_n \frac{\prod_{v=0}^n (\gamma'_n + \gamma_v)}{\prod_{v=0}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_v)}$$

или

$$c_n = b_n \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\gamma_v - \gamma'_n)}{\prod_{v=0}^n (\gamma_v - \gamma'_n)}$$

Подставляя значение  $c_n$  в (1.10'), получаем

$$A_n^2 = b_n^2 \frac{1}{\gamma_n + \gamma'_n} = \frac{\gamma_n + \gamma'_n}{\gamma_n + \gamma'_n} = 1.$$

Таким образом доказано, что

$$\int_0^1 p_n^2(x) dx = 1.$$

Из теорем (1.2) и (1.3) следует предложение, устанавливающее ортонормальность системы  $\{p_n(x)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

*Теорема (1.4). На сегменте  $[0, 1]$  квази-многочлены*

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma'_n}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v) x^\zeta}{(\zeta + \gamma'_n) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где простой контур  $C_n$  охватывает окрестности точек  $\{-\gamma_v\}$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots, n$ , при весе  $p(x) = 1$  составляют ортогональную и нормальную систему.

Квази-многочлены  $p_n(x)$  нами получены при условии (1.1); покажем, что условие, наложенное на последовательность чисел  $\{\gamma_v\}$ , можно ослабить не нарушая свойства ортонормальности соответствующей системы квази-многочленов  $p_n(x)$ , а именно, справедливо предложение:

*Теорема (1.4'). Квази-многочлены*

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma'_n}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \alpha + \gamma'_v) x^\zeta d\zeta}{(\zeta + \alpha + \gamma'_n) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

где  $-\frac{1}{2} < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$ ,  $\gamma_n^* = \gamma'_n + \alpha$ ,  $\alpha > 0$  произвольное число, а контур  $C_n$ , как всегда, охватывает окрестности точек  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , составляют ортогональную и нормальную систему на отрезке  $[0, 1]$  при весовой функции  $p(x) = x^\alpha$ .

Действительно, рассмотрим

$$I_{nm} = \int_0^1 x^2 p_n(x) p_m(x) dx \quad (1.12)$$

при предположении  $n \geq m$ .

Имеем

$$p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma_n^*}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_v') x^\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta,$$

где в качестве контура  $C_n$  взята окружность  $|\zeta - \gamma_n| = \gamma_n + \alpha_n$ ,

$$\alpha_n > \frac{1}{2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \int_0^1 x^2 p_n^{(\alpha)}(x) p_m^{(\alpha)}(x) dx = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma_n^*}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_v') d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt{\gamma_m + \gamma_m^*}}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (z + \alpha + \gamma_v') \int_0^1 x^{\zeta + z + \alpha} dx}{\prod_{v=0}^m (z - \gamma_v)} dz = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma_n^*}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_v') d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt{\gamma_m + \gamma_m^*}}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{\prod_{v=0}^{m-1} (z + \alpha + \gamma_v')}{\prod_{v=0}^m (z - \gamma_v)} \cdot \frac{dz}{z + \zeta + \alpha + 1} = \end{aligned}$$

$$= - \frac{V(\gamma_n + \gamma_n^*)(\gamma_m + \gamma_m^*)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_\nu^*)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} \times \\ \times \frac{\prod_{\nu=0}^{m-1} (-\zeta - \alpha - 1 + \gamma_\nu^*)}{\prod_{\nu=0}^m (-\zeta - \alpha - 1 - \gamma_\nu)} d\zeta,$$

или

$$I_{nm} = \frac{V(\gamma_n + \gamma_n^*)(\gamma_m + \gamma_m^*)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_\nu^*)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} \frac{\prod_{\nu=0}^{m-1} (\zeta - \gamma_\nu)}{\prod_{\nu=0}^m (\zeta + \alpha + \gamma_\nu^*)} d\zeta.$$

Рассмотрим три возможных случая.

1)  $n \geq m+1$ , 2)  $n = m+1$ , 3)  $n = m$ .1)  $n \geq m+1$ , тогда

$$I_{nm} = \int_0^1 x^\alpha p_n^{(\alpha)}(x) p_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{V(\gamma_n + \gamma_n^*)(\gamma_m + \gamma_m^*)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=m+1}^{n-1} (\zeta + \alpha + \gamma_\nu^*) d\zeta}{\prod_{\nu=m}^n (\zeta - \gamma_\nu)}.$$

Очевидно, что последний интеграл равен нулю, так как вне области  $\bar{D}$ , ограниченной контуром  $C_n$ , подынтегральная функция не имеет особых точек.2)  $n = m+1$  или  $n-1 = m$ , тогда

$$I_{nm} = \int_0^1 x^\alpha p_n^{(\alpha)}(x) p_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{V(\gamma_n + \gamma_n^*)(\gamma_m + \gamma_m^*)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - \gamma_{n-1})(\zeta - \gamma_n)} = 0.$$

3)  $n = m$ , тогда получаем

$$I_{nn} = \frac{\gamma_n + \gamma_n^*}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - \gamma_n)(\zeta + \gamma_n^*)} = \frac{\gamma_n + \gamma_n^*}{\gamma_n + \gamma_n^*} = 1$$

или

$$I_{nn} = \int_0^1 x^\alpha [p_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = 1.$$

Таким образом доказано, что при условии теоремы имеет место равенство:

$$\int_0^1 x^\alpha p_n^{(\alpha)}(x) p_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{когда } m \neq n, \\ 1 & \text{когда } m = n. \end{cases}$$

Этим теорема доказана.

*Определение (1.2).* Квази-многочлены  $p_n^{(\alpha)}(x)$  будем называть квази-многочленами Лежандра.

Используя большую свободу выбора последовательности чисел  $\{\gamma_n\}$ , мы можем получить ортонормальные системы различных систем функций.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Полагая  $\gamma_n = \gamma$ ,  $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ , получаем систему обычных многочленов

$$\left\{ p_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\sqrt{2n+1+\alpha}}{2\pi i} \int_{\zeta_n} \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha + \nu + 1) x^\zeta d\zeta}{(\zeta + \alpha + n + 1) \prod_{\nu=0}^n (\zeta - \nu)} \right\}, \quad (1.13)$$

которая ортонормальна на  $[0, 1]$  при весовой функции  $p(x) = x^\alpha$ .

Путем линейного преобразования получим систему

$$\left\{ q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\sqrt{2n+1+\alpha}}{2^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_n} \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \alpha + \nu + 1)}{(\zeta + \alpha + n + 1) \prod_{\nu=0}^n (\zeta - \nu)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^\zeta d\zeta \right\}, \quad (1.13')$$

которая ортонормальна на  $[-1, 1]$  при весовой функции  $p(x) = (x+1)^\alpha$ .

Нетрудно заметить, что при  $\alpha = 0$  система (1.13') становится системой классических многочленов Лежандра в новом их представлении.

При  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha > -\frac{1}{2}$  (1.13) получаем известную систему многочленов Якоби  $P_n^{(\alpha, 0)}(x)$ .

2. Положим теперь  $\gamma_n = 0$ ,  $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\alpha = 0$ .

Тогда система

$$\left\{ P_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta+1)^n}{\zeta^{n+1}} t^\zeta d\zeta \right\}$$

после замены  $t = e^{-x}$  превращается в известную систему многочленов Лагерра

$$\left\{ L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta+1)^n e^{-x\zeta}}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right\}. \quad (1.14)$$

Действительно, непосредственное вычисление показывает, что

$$a) L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{kn} x^k,$$

$$б) \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Нетрудно заметить также, что при  $\alpha > -1 \dots$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{(\zeta+1)^{n+\alpha} e^{-x\zeta}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = L_n^{(\alpha)}(x),$$

где  $L_n^{(\alpha)}(x)$  — обобщенный многочлен Лагерра, так как

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n, \end{cases}$$

где  $\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) = k_n L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $k_n = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+1+\alpha)}}$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} Y_{kn} &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} x^k e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{(\zeta+1)^{n+\alpha}}{\zeta^{n+1}} d\zeta \int_0^{\infty} x^{\alpha+k} e^{-x(\zeta+1)} dx = \\ &= \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{(\zeta+1)^{n+\alpha}}{\zeta^{n+1} (\zeta+1)^{k+1+\alpha}} d\zeta = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{(\zeta+1)^{n-1-k}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 0, \end{aligned}$$

когда  $k+1 \leq n$ ,

А

$$I_{nn} = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1} (\zeta+1)} = (-1)^n \Gamma(n+1+\alpha).$$

Непосредственное вычисление показывает, что коэффициент при

$x^n$  в  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ . Это значит, что

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_m^{(\alpha)}(x) dx = 0, \text{ когда } m \neq n$$

и

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = a_n I_{nn} k_n^2 = 1.$$

Таким образом получили известное свойство

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) \tilde{L}_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{когда } m \neq n, \\ 1 & \text{когда } m = n. \end{cases}$$

Используя полученное выражение  $L_m^{(\alpha)}(x)$  и зная, что многочлены Эрмита  $H_{2n}(x)$  и  $H_{2n+1}(x)$  выражаются соответственно через  $L_m^{(-\frac{1}{2})}(x)$  и  $x L_m^{(\frac{1}{2})}(x)$ , получим также представления для многочленов Эрмита.

3. Рассмотрим теперь такой пример

$$\gamma_0 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{2n} = \dots = 0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{2n+1} = \dots = 1$$

(требование  $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$  несущественно), тогда

$$p_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-1|=r} \frac{(\zeta+1)^n (\zeta+2)^n}{\zeta^{n+1} (\zeta-1)^n} x^{\zeta} d\zeta, \quad r > 1,$$

$$p_{2n+1}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi i} \int_{|\zeta-1|=r} \frac{(\zeta+1)^{n+1} (\zeta+2)^n}{\zeta^{n+1} (\zeta-1)^{n+1}} x^{\zeta} d\zeta, \quad r > 1.$$

Непосредственное вычисление показывает, что система  $\{p_m(x)\}$  является линейной комбинацией системы  $\{(\ln x)^k, x (\ln x)^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Очевидно, что аналогичных примеров различных ортонормальных систем функций будет бесконечное множество.

В дальнейшем изложении нам придется использовать некоторые модификации квази-многочленов Лежандра.

**Определение (1.2e).** Квази-многочлены  $p_n(e^{-x}) = P_n(x)$  будем называть  $e$ -квази-многочленами Лежандра.

**Замечание (1.1).**  $e$ -квази-многочлены  $p_n(x)$  на  $(0, \infty)$  при весовой функции  $p(x) = e^{-x}$  составляют ортонормальную систему.

**Определение (1.3).** Обозначим

$$p_n(x, \sigma) = \frac{\sqrt{\frac{\gamma_n + \gamma'_n}{\sigma}}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma'_v)}{(\zeta + \gamma'_n) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\zeta} d\zeta,$$

где  $0 < x \leq \sigma$ .

**Замечание (1.2).** Квази-многочлены  $p_n(x, \sigma)$  на  $[0, \sigma]$  составляют ортонормальную систему (весовая функция  $p(x) = 1$ ).

В этом можно убедиться путем подстановки  $\frac{x}{\sigma} = t$ .

Приведем еще одно определение, которое нам понадобится в параграфах 3 и 4.

*Определение (1.4).* Условимся считать, что  $\psi(x) \in L^2(e^{-x}, (0, \infty))$ , если

$$\psi(x) e^{-\frac{x}{2}} \in L^2(0, \infty).$$

## § 2. Обобщение теорем Мюнтца

Рассмотрим последовательности чисел  $\{\gamma_n\}$  и  $\{\alpha_n\}$ , удовлетворяющих условиям:

$$a) -\frac{1}{2} < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k + \frac{1}{2}} = \infty, \quad (2.1)$$

$$a') 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \quad b') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty. \quad (2.1')$$

*Определение (2.1).* Последовательности, удовлетворяющие условиям (2.1) и (2.1'), соответственно будут называться  $(\mu)$  и  $(\mu')$  последовательностями.

*Определение (2.2).* Систему квази-многочленов

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n + 1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{s=0}^n (\zeta + \gamma_s) x^{\frac{1}{2}}}{(\zeta + \gamma_n) \prod_{s=0}^n (\zeta - \gamma_s)} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\{\gamma_n\}$  является  $(\mu)$  последовательностью, обозначим через  $\{p_n(x), \mu\}$ . Аналогично определяется  $\{P_n(x), \mu'\}$ .

*Определение (2.2').* Систему квази-многочленов

$$p_n^*(x) = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{s=0}^n (\zeta + \alpha_s)}{(\zeta + \alpha_n) \prod_{s=0}^n (\zeta - \alpha_s)} \frac{x^{\frac{1}{2}} d\zeta}{\zeta + \frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2')$$

где  $C_n$  — окружность  $|\zeta - \alpha_n| = \alpha_n$ , а  $\{\alpha_n\}$  является  $(\mu')$  последовательностью, обозначим через  $\{p_n^*(x), \mu'\}$ .

Предварительно докажем два вспомогательных предложения.

Теорема (2.1). Справедливо тождество

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{2\gamma_0+1}{(k+\gamma_0)^2} - \sum_{n=1}^m (2\gamma_n+1) \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (k-\gamma_v)^2}{\prod_{v=0}^n (k+\gamma_v)^2} = \prod_{v=0}^m \left( \frac{k-\gamma_v}{k+\gamma_v} \right)^2 \frac{1}{2k+1}, \quad (2.3)$$

где  $k > -\frac{1}{2}$  произвольное число.

Действительно, в лемме 4 главы II работы [1] получено тождество:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= \sum_{n=1}^m \frac{\prod_{v=1}^{n-1} U_v(\zeta)}{\prod_{v=1}^n U_v(z)} V_n(\zeta, z) + R_m(\zeta, z), \\ R_m(\zeta, z) &= \frac{\prod_{v=1}^m U_v(\zeta)}{\prod_{v=1}^m U_v(z)} \frac{1}{\zeta-z}, \\ V_n(\zeta, z) &= \frac{U_n(z) - U_n(\zeta)}{\zeta-z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая в (2.4)  $U_v(z) = \frac{z+\alpha_v}{z+\beta_v}$ , получаем

$$V_n(\zeta, z) = \frac{\alpha_n - \beta_n}{(z+\beta_n)(\zeta+\beta_n)},$$

$$R_m(\zeta, z) = \prod_{v=1}^m \frac{\zeta+\alpha_v}{\zeta+\beta_v} \prod_{v=1}^m \frac{z+\beta_v}{z+\alpha_v} \frac{1}{\zeta-z};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= \frac{\alpha_1 - \beta_1}{(z+\alpha_1)(z+\beta_1)} + \sum_{n=2}^m (\alpha_n - \beta_n) \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (\zeta+\alpha_v)}{\prod_{v=1}^n (\zeta+\beta_v)} \cdot \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (z+\beta_v)}{\prod_{v=1}^n (z+\alpha_v)} + \\ &+ \prod_{v=1}^m \frac{\zeta+\alpha_v}{\zeta+\beta_v} \prod_{v=1}^m \frac{z+\beta_v}{z+\alpha_v} \frac{1}{\zeta-z}. \end{aligned} \quad (2.4')$$

Полагая в тождестве (2.4')  $\gamma_v = \gamma_{v-1}$ ,  $\beta_v = -\gamma_v$ ,  $\zeta = -k$ ,  $z = k+1$ , получаем

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{2\gamma_0+1}{(k+\gamma_0)^2} \sum_{n=1}^m (2\gamma_n+1) \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (k-\gamma_v)^2}{\prod_{v=1}^n (k+\gamma_v)^2} + \prod_{v=0}^m \left( \frac{k-\gamma_v}{k+\gamma_v} \right)^2 \frac{1}{2k+1}.$$

Этим теорема доказана.

*Теорема (2.2).* Для всякого  $x \in [0,1]$  и  $k > 0$  справедливо неравенство

$$\left| x^k - \sum_{n=0}^m a_n \left( k + \frac{1}{2} \right) p_n^*(x) \right| < \prod_{v=0}^m \left| \frac{k-\alpha_v}{k+\alpha_v} \right| \frac{\left( k + \frac{1}{2} \right)}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{(y^2+k^2) \left( y^2 + \frac{1}{4} \right)}}, \quad (2.5)$$

$$\text{где } a_n = \int_0^1 x^{k-\frac{1}{2}} p_n(x) dx.$$

Действительно, положив в (2.4')  $\zeta = \zeta' + 1$ ,  $z = k' + 1$ ,

где  $k' > \frac{1}{2}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-k'} &= \frac{2\gamma_0+1}{(k'+\gamma_0)^2} + \sum_{u=1}^m (2\gamma_u+1) \frac{\prod_{v=0}^{u-1} (\zeta+\gamma_v)}{\prod_{v=0}^u (\zeta-\gamma_v)} \cdot \frac{\prod_{v=0}^{u-1} (k'-\gamma_v)}{\prod_{v=0}^u (k'+\gamma_v)} + \\ &+ \prod_{v=0}^m \frac{k'-\gamma_v}{k'+\gamma_v} \prod_{v=0}^m \frac{\zeta+\gamma_v}{\zeta-\gamma_v} \cdot \frac{1}{\zeta-k'}. \end{aligned} \quad (2.4'')$$

Помножим обе стороны тождества (2.4'') на  $x^\zeta d\zeta$  и проинтегрируем по окружности  $C_m$   $\left( |\zeta - R| = R + \frac{1}{2} \right)$ , где

$$R > \max(\alpha_n, k).$$

Получаем

$$x^{k'} - \sum_{n=0}^m a_n p_n(x) = \prod_{v=0}^m \frac{k'-\gamma_v}{k'+\gamma_v} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \prod_{v=0}^m \frac{\zeta+\gamma_v}{\zeta-\gamma_v} \cdot \frac{x^\zeta d\zeta}{\zeta-k'},$$

где

$$a_n = \int_0^1 x^{k'} p_n(x) dx.$$

Принтегрировав полученное тождество в пределах от  $t=0$  до  $t=x \leq 1$  и подставив в полученном результате  $\gamma_v + \frac{1}{2} = \alpha_v$ ,  $v=0, 1, 2, \dots$ ,  $k' + \frac{1}{2} = k > 0$ ,  $\zeta + \frac{1}{2} = \zeta'$ , будем иметь

$$x^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^m a_n \left(k + \frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} p_n^*(x) = \\ = \prod_{v=0}^m \frac{k-\alpha_v}{k+\alpha_v} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{C_m} \prod_{v=0}^m \frac{\zeta+\alpha_v}{\zeta-\alpha_v} \frac{x^{\zeta} d\zeta}{(\zeta-k) \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)},$$

где  $C_m$  — окружность  $|\zeta - R| = R$ ,  $R > \max(\alpha_n, k)$ .

Следовательно, заменив интеграл по  $C_m$  на интеграл по прямой  $(-i\infty, i\infty)$ , получим

$$\left| x^k - \sum_{n=0}^m a_n \left(k + \frac{1}{2}\right) p_n^*(x) \right| < \\ < \prod_{v=0}^m \left| \frac{k-\alpha_v}{k+\alpha_v} \right| \frac{k + \frac{1}{2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^2+k^2) \left(y^2 + \frac{1}{4}\right)}}.$$

Этим теорема доказана.

Перейдем теперь к обобщениям теорем Мюнтца.

*Теорема (2.3). Для того, чтобы система квази-многочленов  $\{p_n(x)\}$  в  $L^2([0,1])$  составляла фундаментальную систему, необходимо и достаточно, чтобы она была системой  $\{p_n(x), \mu\}$ .*

Для доказательства теоремы рассмотрим

$$\rho_m^2 = \int_0^1 \left[ x^k - \sum_{n=0}^m a_n p_n(x) \right]^2 dx, \quad (2.6)$$

где

$$a_n = \int_0^1 x^k p_n(x) dx.$$

В силу ортонормальности системы  $\{p_n(x)\}$  на  $[0,1]$  при единичной весовой функции будем иметь

$$\rho_m^2 = \int_0^1 x^{2k} dx - \sum_{n=0}^m a_n^2. \quad (2.6')$$

Найдем теперь числовые значения коэффициентов  $a_n$ .  
Имеем

$$a_n = \int_0^1 x^k p_n(x) dx = \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \gamma'_v) \int_0^1 x^{\zeta+k} dx}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta,$$

причем перестановка интегралов закона и  $\operatorname{Re}(\zeta) + k + 1 > 0$ .  
Производя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \gamma'_v)}{\prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + k + 1} = \\ &= -\sqrt{2\gamma_n+1} \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (-k-1+\gamma'_v)}{\prod_{v=0}^n (-k-1-\gamma_v)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\rho_m^2 = \frac{1}{2k+1} - \sum_{n=1}^m \sqrt{2\gamma_{n-1}+1} \frac{\prod_{v=0}^n (k-\gamma_{v-1})^2}{\prod_{v=1}^n (k+\gamma'_{v-1})^2}.$$

В силу (2.3) будем иметь

$$\rho_m^2 = \prod_{v=0}^{m-1} \left( \frac{k-\gamma_v}{k+\gamma'_v} \right)^2 \frac{1}{2k+1}. \quad (2.6'')$$

Очевидно, что при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\rho_m \rightarrow 0$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\gamma_v\}$  является  $(\mu)$  последовательностью, а  $\{p_n(x)\}$  — системой  $\{p_n(x), \mu\}$ .

Этим теорема доказана.

**Определение (2.3).** Пусть последовательность  $\{\gamma_v\}$  удовлетворяет условиям

$$\dots \leq \gamma_{k_{m-1}} < \gamma_{k_m} = \gamma_{k_{m+1}} = \gamma_{k_{m+2}} = \dots = \gamma_{k_{m'}} < \gamma_{k_{m'+1}} \leq \dots$$

Введем обозначение

$$\omega_{k_{m+v}}(x) = x^{\gamma_{k_m}} (\ln x)^v,$$

где  $v$  — целое число и удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq v \leq k_{m_i} - k_m.$$

**Определение (2.3).** Пусть последовательность  $\{\alpha_i\}$  удовлетворяет условиям

$$\dots \leq \alpha_{k_{m+1}} < \alpha_{k_m} = \alpha_{k_{m+1}} = \alpha_{k_{m+2}} = \dots = \alpha_{k_{m_i}} < \alpha_{k_{m_i+1}} < \dots$$

Обозначим через

$$\omega_{k_{m+v}}^*(x) = x^{\alpha_{k_m}} (\ln x)^v,$$

где целое число  $v$  удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq v \leq k_{m_i} - k_m.$$

**Определение (2.3e).** Обозначим

$$\omega_{k_{m+v}}(e^{-x}) = \Omega_{k_{m+v}}(x).$$

**Замечание (2.1).** При  $\gamma_i = \alpha_i$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\omega_i(x) = \omega_i^*(x).$$

**Замечание (2.2).** В частном случае, когда

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots, (\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots)$$

$$\omega_n(x) = x^{\gamma_n}, (\omega_n^*(x) = x^{\alpha_n}).$$

**Замечание (2.3).** Непосредственное вычисление показывает, что  $p_n(x)$  ( $p_n^*(x)$ ) является линейной комбинацией функций  $\{\omega_k(x)\}$  ( $\{\omega_k^*(x)\}$ ),  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Как следствие теоремы (2.3), в силу замечания (2.3) получаем предложение:

**Теорема (2.3).** Система функций  $\{\omega_n(x)\}$  фундаментальна в  $L^2([0,1])$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\gamma_i\}$  является  $(\mu)$  последовательностью.

Справедливо также предложение:

**Теорема (2.4)** Система функций  $\{1, \omega_n^*(x)\}$  фундаментальна в  $C([0,1])$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\alpha_i\}$  является  $(\mu')$  последовательностью.

Достаточность условия теоремы следует из неравенства (2.5).

Докажем необходимость условия теоремы путем обратного допущения.

Пусть, несмотря на то, что  $\{\alpha_i\}$  не является  $(\mu')$  последователь-

ностью, для всякого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  при  $m \geq N(\varepsilon)$  выполняется неравенство:

$$\left| x^k - \sum_{n=0}^m b_n \omega_n^*(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in [0, 1].$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что при

$$q_n(x) = \frac{\sqrt{2\alpha_n+1}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \alpha_v + 1) x^\zeta}{(\zeta + \alpha_n + 1) \prod_{v=0}^n (\zeta - \alpha_v)} d\zeta,$$

где  $C_n$  — окружность  $|\zeta - \alpha_n| = \alpha_n$  и

$$a_n = \int_0^1 x^k q_n(x) dx,$$

справедливо соотношение:

$$\rho_m^2 = \int_0^1 \left[ x^k - \sum_{n=0}^m a_n q_n(x) \right]^2 dx \leq \int_0^1 \left[ x^k - \sum_{n=0}^m b_n \omega_n^*(x) \right]^2 dx < \varepsilon^2.$$

Записав (2.3) для последовательности  $\{\alpha_v\}$ , получаем

$$0 < \rho_m^2 = \prod_{v=0}^m \left( \frac{k - \alpha_v}{k + \alpha_v + 1} \right)^2 \frac{1}{2k+1} < \varepsilon^2.$$

Полученное неравенство противоречит нашему допущению о том, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} < \infty.$$

Необходимость включения единицы в систему совершенно очевидна.

Этим теорема доказана.

Нетрудно заметить, что теоремы (2.3) и (2.4) являются непосредственными обобщениями известных теорем Мюнтца (см. [2], стр. 303—312), а также теоремы 7 главы II работы [1], которая другим способом доказана А. О. Гельфондом (см. [3], стр. 117).

### § 3. Применение к теории моментов и некоторые экстремальные задачи

В настоящем параграфе мы применим систему квази-многочленов Лежандра к теории моментов, а также к решению некоторых экстремальных задач.

*Теорема (3.1).* Система квази-многочленов  $\{p_n(x), \mu\}$  замкнута на  $[0, 1]$  при весовой функции  $p(x) = 1$ .

Справедливость утверждения теоремы следует из теоремы (2.3) и из известного предложения Стеклова, которое гласит:

Если  $A$  есть класс функций, всюду плотный в  $L^2$ , и если равенство Парсеваля выполняется для всех функций, входящих в  $A$ , то рассматриваемая ортогональная система замкнута (см. [4], стр. 313).

Заметим, что из теоремы (3.1) следует ее аналог для системы  $e$ -квази-многочленов Лежандра, а именно:

*Теорема (3.1').* Система  $e$ -квази-многочленов Лежандра  $\{P_n(x), \mu\}$  замкнута на  $(0, \infty)$  при весовой функции  $p(x) = e^{-x}$ .

*Замечание (3.1).* Всякий  $e$ -квази-многочлен Лежандра  $P_n(x)$  является линейной комбинацией функций  $\Omega_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  (см. определение (2.3e)) и, следовательно, может быть представлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \Omega_k(x). \quad (3.1)$$

*Теорема (3.2).* Среди всевозможных  $e$ -квази-многочленов

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Omega_k(x) + \Omega_n(x),$$

$$\min \int_0^{\infty} e^{-x} |Q_n(x)|^2 dx \quad (3.2)$$

осуществляет  $e$ -квази-многочлен

$$\frac{P_n(x)}{\alpha_{nn}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{nk}}{\alpha_{nn}} \Omega_k(x) + \Omega_n(x). \quad (3.1')$$

Действительно, нетрудно заметить, что всякий  $e$ -квази-многочлен  $Q_n(x)$  может быть представлен в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k P_k(x) + \frac{P_n(x)}{\alpha_{nn}}.$$

Это значит, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |Q_n(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2 + \frac{1}{\alpha_{nn}^2}.$$

Следовательно,

$$\min_{Q_n} \int_0^{\infty} e^{-x} |Q_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\alpha_{nn}^2}. \quad (3.2')$$

т. е.  $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$

$$\text{и} \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{\alpha_n}.$$

Этим теорема доказана.

*Определение (3.1).* Последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  (конечная или бесконечная) называется последовательностью обобщенных моментов функции  $\psi(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  ( $\varphi(x) \in L^2([0, 1])$ ), при весе  $p(x) = e^{-x}$  ( $p(x) = 1$ ), если выполняются условия

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \Omega_n(x) \psi(x) dx &= \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \left( \int_0^1 \omega_n(x) \varphi(x) dx &= \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим три возможных случая:

1. Последовательность  $\{\mu_k\}$  конечная.
2. Последовательность  $\{\mu_k\}$  бесконечная

$$\text{и} \quad \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\gamma + 1} = \infty.$$

3. Последовательность  $\{\mu_k\}$  бесконечная,

$$\text{но} \quad \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\gamma + 1} < \infty.$$

Эти последовательности соответственно обозначим через

$$\{\mu_k, n\}, (M) \text{ и } (\bar{M}).$$

*Теорема (3.3).* Среди всевозможных функций  $\phi(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  с заданной последовательностью  $(\mu_k, n)$  обобщенных моментов

$$\min \int_0^\infty e^{-x} |\phi(x)|^2 dx \quad (3.4)$$

осуществляет функция

$$\phi_0(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x),$$

$$\text{где} \quad a_k = \sum_{\gamma=0}^k \alpha_{k,\gamma} \mu_\gamma, \quad \text{а } \alpha_k, \text{ определяется из}$$

$$P_k(x) = \sum_{\gamma=0}^k \alpha_{k,\gamma} \Omega_\gamma(x).$$

Действительно, дополним последовательность  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  до бесконечной  $(\mu)$  последовательности, тогда, согласно теореме (3.1), система  $e$ -квази-многочленов  $\{P_n(x), \mu\}$  замкнута на  $(0, \infty)$  при весовой функции  $\rho(x) = e^{-x}$  и всякая функция  $\psi(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  представляется своим рядом Фурье по системе  $\{P_n(x), \mu\}$

$$\psi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x), \quad A_k = \int_0^{\infty} e^{-x} P_k(x) \psi(x) dx,$$

причем

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2.$$

Заметим еще, что при  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $A_k = a_k$  для всех функций изучаемого класса, так как

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^{\infty} e^{-x} P_k(x) \psi(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \psi(x) \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k} \Omega_{\nu}(x) dx = \\ &= \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k} \mu_{\nu} = a_k. \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|^2. \quad (3.4')$$

Из равенства (3.4') следует, что

$$\min_{\psi} \int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^n |a_k|^2. \quad (3.4'')$$

Этим доказывается единственность минимизирующей интеграл функции (согласно известной теореме Ресса-Фишера), а также устанавливается ее явное выражение, а именно:

$$\psi_0(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

*Теорема (3.4).* Для того, чтобы  $(M)$  последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  была последовательностью обобщенных моментов функции  $\psi(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2, \quad \text{где } a_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_k, \text{ а числа } \alpha_{nk} \text{ определяются из}$$

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu n} \Omega_{\nu}(x).$$

*Необходимость.* Составим

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\infty} e^{-x} P_n(x) \psi(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} Q_k(x) \psi(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_k. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу фундаментальности системы функций  $\{P_n(x), \mu\}$  в теореме (3.1) убеждаемся в сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ .

*Достаточность.* Из условия сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ , согласно известной теореме Рисса-Фишера, примененной к системе функций  $\{P_n(x), \mu\}$ , следует существование единственной функции  $\psi(x) \in L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$  при весовой функции  $p(x) = e^{-x}$ , для которой

$$a_n = \int_0^{\infty} e^{-x} P_n(x) \psi(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

а это значит, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} Q_n(x) \psi(x) dx = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Этим теорема доказана.

Рассмотрим теперь частный случай  $(\mu)$  последовательности чисел  $\{\gamma_n\}$ , когда

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \quad (3.5)$$

Тогда из теоремы (3.4) следует:

*Теорема (3.4').* Для того, чтобы  $(M)$  последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  была последовательностью обобщенных моментов функции  $\psi(x) \in L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$  при весовой функции  $p(x) = e^{-x}$ , когда выполняется условие (3.5), необходимо и достаточно, чтобы сходилась

ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ , где

$$a_n = \sqrt{2\gamma_n + 1} \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{s=0}^n (\gamma_k + \gamma_s)}{(\gamma_k + \gamma_n) \prod_{s=0, s \neq k}^n (\gamma_k - \gamma_s)} \mu_k.$$

$$a \quad \prod_{v=0}^n (\gamma_k - \gamma_v)_k = \lim_{z \rightarrow \gamma_k} \left[ \prod_{v=0}^n (z - \gamma_v) \right]'$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что в данном случае

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} Q_k(x) = \sqrt{2\gamma_n + 1} \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{v=0}^n (\gamma_k + \gamma_v)}{(\gamma_k + \gamma_n) \prod_{v=0}^n (\gamma_k - \gamma_v)_k} e^{-\gamma_k x}.$$

*Замечание (3.2).* Как нам известно, утверждение теоремы (3.4) устанавливается впервые, а условие, полученное в теореме (3.4'), будучи эквивалентным уже известному условию, от него отличается по виду и, как нам кажется, получено более естественным путем.

Рассмотрим теперь тот случай, когда последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  является  $(\overline{M})$  последовательностью.

Очевидно, что в этом случае последовательность  $\{\mu_n\}$  не определяет единственную функцию  $\psi(x)$ , поэтому естественно поставить задачу отыскания функции  $\psi_0(x)$ , осуществляющей

$$\min_{\psi} \int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx,$$

среди всех функций  $\psi(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  при весе  $p(x) = e^{-x}$ .

Очевидно также, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2. \quad (3.6)$$

где

$$a_n = \sum_{v=0}^n x_{nv} \mu_v.$$

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$\{S_n(x)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ где}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

Из условия (3.6) следует, что последовательность  $\{S_n(x)\} \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  при весе  $p(x) = e^{-x}$  сходится в себе (см. [4], стр. 292).

Это значит, что в силу теоремы Э. Фишера (см. [4], стр. 293) последовательность  $\{S_n(x)\}$  сходится почти всюду на  $(0, \infty)$  к функции  $\psi_0(x) \in L^2[e^{-x}, (0, \infty)]$  при весе  $p(x) = e^{-x}$ .

Следовательно, при достаточно большом  $n$  по-прежнему  $\|S_n(x) - \phi_0(x)\| < \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  число сколь угодно малое.

Таким образом устанавливается равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\phi_0(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2. \quad (3.6')$$

Сравнивая (3.6) и (3.6'), получаем, что

$$\min_{\phi} \int_0^{\infty} e^{-x} |\phi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-x} |\phi_0(x)|^2 dx. \quad (3.6)$$

Таким образом доказана:

*Теорема (3.5). Среди всех функций  $\phi(x) \in L^2(e^{-x}, (0, \infty))$  при весовой функции  $p(x) = e^{-x}$  с заданной  $(\bar{M})$  последовательностью обобщенных моментов  $\{\mu_n\}$*

$$\min_{\phi} \int_0^{\infty} e^{-x} |\phi(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

осуществляет функция

$$\phi_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

$$\text{где} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x), \quad a_k = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} \mu_k,$$

которая существует почти всюду на  $(0, \infty)$ .

Аналоги теорем (3.3), (3.4) и (3.5) могут быть сформулированы также для функции  $\varphi(x) \in L^2([0, \sigma])$ .

*Теорема (3.3\*). Среди всевозможных функций  $\varphi(x) \in L^2([0, \sigma])$  с заданной последовательностью  $\{\mu_k, n\}$  обобщенных моментов*

$$\min_{\varphi} \int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx$$

осуществляет функция

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x, \sigma).$$

$$\text{где} \quad a_k = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n}(\sigma) \mu_k, \quad \alpha_{k,n}(\sigma) \text{ определяются из}$$

$$p_n(x, \sigma) = \frac{\sqrt{2\gamma_n + 1}}{\sqrt{\sigma} 2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v) \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\zeta}}{(\zeta + \gamma_n) \prod_{v=0}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta = \sum_{v=0}^n \alpha_{nv}(\sigma) \omega_v(x).$$

*Теорема (3.4\*).* Для того, чтобы  $(M)$  последовательность чисел  $\{p_n\}$  была последовательностью обобщенных моментов функции  $\varphi(x) \in L^2([0, \sigma])$ , необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2, \quad \text{где} \quad a_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}(\sigma) p_k, \quad \text{а числа } \alpha_{nk}(\sigma) \text{ определяются из}$$

$$p_n(x, \sigma) = \sum_{v=0}^n \alpha_{nv}(\sigma) \omega_v(x).$$

*Теорема (3.5\*).* Среди всех функций  $\varphi(x) \in L^2([0, \sigma])$  с заданной  $(M)$  последовательностью обобщенных моментов

$$\min_{\varphi} \int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

осуществляет функция  $\varphi_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , где

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x, \sigma), \quad a_k = \sum_{v=0}^k \alpha_{kv}(\sigma) p_v, \quad \text{которая существует почти}$$

всюду на  $[0, \sigma]$ .

Сектор математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 26 IV 1955

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян Г. В. Обобщенные факториальные ряды. Сообщения Института математики и механики АН Армянской ССР, выпуск 5, Ереван, 1950.
2. Muntz Ch. Über den Approximationssatz von Weierstrass. Schwarz Festschrift. Berlin, 1914.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей, Москва, 1952.
4. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.

## 2. Վ. Քաղալյան

ԼԵԺԱՆԴՐԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ  
ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք ունենք

$$-\frac{1}{2} < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$$

թվերի հաջորդականությունը և դիցուք

$$\dots \leq \gamma_{k_m-1} < \gamma_{k_m} = \gamma_{k_m+1} = \dots = \gamma_{k_{m+1}} < \gamma_{k_{m+1}+1} \leq \dots$$

Սահմանենք  $\omega_n(x)$  ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝

$$\omega_{k_m+\nu}(x) = x^{\gamma_{k_m}} (\ln x)^\nu,$$

որտեղ  $\gamma$ -ն ամբողջ թիվ է և բավարարում է

$$0 \leq \nu \leq k_{m+1} - k_m$$

անհավասարություններին:

Խնդիր է դրվում  $\omega_n(x)$  ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաներից կազմել  $[0,1]$  հատվածի վրա օրտոնորմալ սխեմով՝ կշռային ֆունկցիա  $p(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$  ստեղծելը:

Պարզվում է, որ կվազի-բազմանդամների ադպտի սխեմով գոյություն ունի և

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n+1+\alpha}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu + 1 + \alpha) x^\zeta}{(\zeta + \gamma_n + 1 + \alpha) \prod_{\nu=0}^n (\zeta - \gamma_\nu)} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

որտեղ  $C_n$ -ը  $|\zeta - \gamma_n| = \gamma_n + \frac{1}{2}$  շրջանագիծ է:Օգտագործելով այդ կվազի-բազմանդամները, ընդհանրացվում են Մյունտ-ցի հայտնի թեորեմները, լուծվում են մի շարք խնդիրներ  $H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ և  $W_2$  դասի ֆունկցիաների վերաբերյալ, ինչպես նաև ճշգրտվում է Ս. Օ. Դելֆոնդի մի արդյունքը: