

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян

О температурных напряжениях в прямоугольных
бетонных блоках

Задача о температурных напряжениях в бетонных блоках имеет существенное значение в связи с вопросами определения размеров блока при бетонировании.

Впервые этот вопрос был рассмотрен Г. Н. Масловым [1] на основе методов теории упругости. В дальнейшем эта работа была продолжена А. З. Басевичем [2] и Г. С. Шапиро [2], Ю. А. Нилендером [3] и самим Г. Н. Масловым [4—5].

Во всех этих исследованиях вопрос о влиянии размеров блока на температурные напряжения рассматривался без учета ползучести бетона и при допущении жесткой заделки блока с основанием.

В работе С. В. Александровского [6] приводится решение этой задачи с учетом ползучести бетона, при условии отсутствия горизонтальных перемещений вдоль линии контакта блока с основанием.

Следует отметить, что допущение об отсутствии горизонтальных перемещений по линии контакта бетонного блока с основанием не отражает действительной картины температурных напряжений в бетонных блоках, так как в этом случае не учитываются должным образом силы сопротивления $\tau(x)$, возникающие вдоль плоскости контакта блока с основанием вследствие его продольных перемещений и характера связности с основанием.

Такая постановка задачи не может ответить на вопрос — как определить рациональную длину блока, в котором возникают наименьшие температурные напряжения, если задана высота блока, так как значения максимальных температурных напряжений при таком решении получаются практически постоянными и равными $E\alpha T$, независимо от геометрических размеров блока.

Вместе с тем наблюдения, произведенные над существующими бетонными блоками, показывают, что в действительности напряжения существенно зависят от размеров блока, при этом они значительно меньше, чем напряжения, найденные в результате такого расчета.

В недавно опубликованной работе Б. Л. Абрамян [7] дан решение этой задачи, пользуясь линейной теорией ползучести бетона и предположении, что по линии контакта бетонного блока с основанием действуют постоянные тангенциальные напряжения τ , величины ко-

торых не зависят от термонапряженного состояния блока и равны максимальному значению сопротивления бетона сцеплению.

В работе А. Ю. Ишлинского и А. В. Думанского [8] рассматривается задача о растягивании упругой полосы с приклеенным к ней хрупким слоем из материала типа глины или гипса, когда между этими двумя связывающими слоями действуют касательные напряжения, величины которых в каждой точке контакта пропорциональны относительным перемещениям этих точек.

В настоящей работе рассматривается задача о термонапряженном состоянии прямоугольного бетонного блока, расположенного на сплошном основании и находящегося под действием стационарной температуры, с учетом ползучести бетона и силы сопротивления $\tau(x)$, действующей вдоль плоскости контакта блока с его основанием. При этом величина и закон распределения этих сил вдоль поверхности контакта блока с основанием зависят как от термонапряженного состояния его, так и от характера связности нижней грани блока с основанием.

В главе I дается решение термоупругой задачи для такого блока, основываясь на гипотезе плоских сечений. Глава II посвящена исследованию термонапряженного состояния такого блока без гипотезы плоских сечений как в стадии его упругой работы, так и с учетом ползучести бетона.

На основании результатов, полученных в этой главе, указываются пределы применимости гипотезы плоских сечений в данной задаче, в зависимости от геометрических размеров блока.

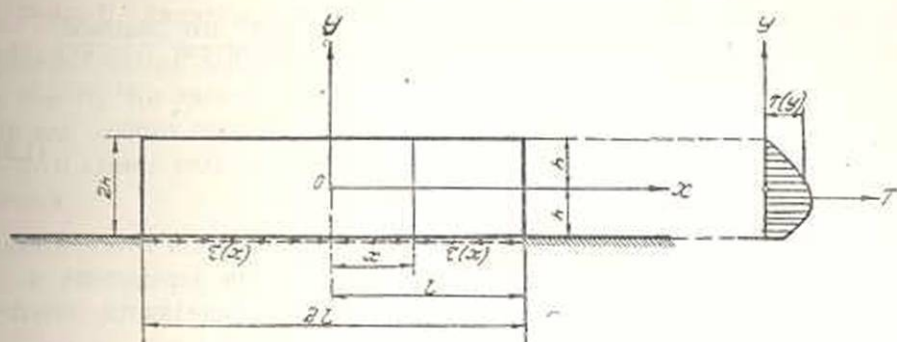
ГЛАВА I

НАЧАЛЬНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕТОННОГО БЛОКА

§ 1. Постановка задачи и основные предпосылки

Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ своей продольной стороной $y = -h$ (фиг. 1) лежит на сплошном основании и находится под воздействием стационарной температуры T , зависящей только от координаты y . Ширину блока принимаем равной единице.

Основание такого блока будет оказывать сопротивление его продольным температурным перемещениям. Это сопротивление будет выражаться появлением силы сопротивления, действующей по нижней грани блока $y = -h$ в виде горизонтальных тангенциальных напряжений $\tau(x)$, которую будем называть *силой связности блока с основанием*. Очевидно, что величина и закон распределения этих сил вдоль оси x будут обуславливаться поверхностной структурой этих двух тел и характером их контакта.



Фиг. 1.

Однако современная физика не дает какой-нибудь законченной теории поверхностной структуры твердого тела.

Поэтому в настоящем параграфе при решении задачи о термонапряженном состоянии бетонного блока будем исходить из предположения, что между силами связности $\tau(x)$ в данной точке контакта блока с соответствующими перемещениями $u(x)$ имеет место зависимость, которая в общем случае может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) &= f[u(x)] \quad \text{при } u \leq u_s, \\ \tau(x) &= \tau_s \quad \text{при } u > u_s, \end{aligned} \quad (1.1)$$

причем $\tau_s = f[u_s]$ и $f(0) = 0$.

В случае, если $u_s = u_b$, то $\tau = f[u_b] = \tau_0 = \text{const}$.

Здесь

$u(x)$ — продольные перемещения точек нижней грани блока;

$f[u]$ — некоторая, определяемая из опыта, функция от u , характеризующая связь между силами связности τ и соответствующими перемещениями u ;

τ_s и u_s — значения силы связности τ и перемещения u , при которых в данной точке контакта блока с основанием наступает предельное состояние;

u_b — значение перемещения, при котором наступает разрушение связности в данной точке контакта блока с основанием.

Таким образом, предельное состояние в данной точке контакта блока с основанием, описываемое соотношением (1.1), характеризуется тем, что, когда в этой точке величина силы связности τ достигает некоторого предельного значения τ_s , то, несмотря на дальнейший рост продольных перемещений u ($u < u_b$), в этой точке τ остается постоянным, равным τ_s .

Вначале рассмотрим термонапряженное состояние таких блоков, для которых имеет место соотношение $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{3}$, обычно встречающееся в гидротехническом строительстве.

Положим также, что $u \leq u_0$ для всех значений $0 \leq x \leq l$. Тогда, как будет показано далее, справедлива гипотеза плоских сечений, выражающаяся зависимостью [3]

$$\frac{du(x, y)}{dx} = A(x) + B(x)y, \quad (1.2)$$

где

$u(x, y)$ — горизонтальные перемещения произвольной точки блока, $A(x)$ и $B(x)$ — некоторые, пока неизвестные, функции переменной x .

Нормальные напряжения в блоке $\sigma_x(x, y)$ определяются зависимостью

$$\sigma_x(x, y) = E \frac{du}{dx} - E\alpha T(y). \quad (1.3)$$

Здесь

E — модуль мгновенной деформации бетона,

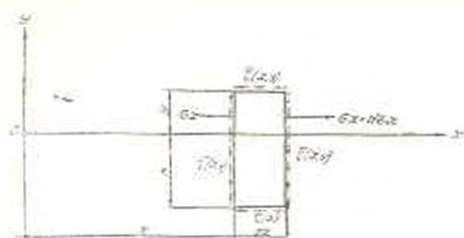
$T(y)$ — температурная функция.

Если обозначить тангенциальные напряжения в произвольной точке блока (фиг. 1) через $\tau(x, y)$, то очевидно будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(x, -h) &= \tau(x), \\ \bar{\tau}(x, h) &= 0, \\ \bar{u}(x, -h) &= u(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

§ 2. Уравнения задачи и определение напряжения

Рассмотрим условия равновесия элемента блока, расположенного между произвольным поперечным сечением x и торцевым сечением $x=l$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Имеем

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) dy + \int_x^l \tau(x) dx = 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) y dy - h \int_x^l \tau(x) dx = 0,$$

$$\int_{-h}^{+h} \bar{\tau}(x, y) dy = 0 \quad \text{для всех значений } x. \quad (2.2)$$

Или, дифференцируя равенства (2.1) по x , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) dy - \tau(x) &= 0, \\ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) y dy + \tau(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнения (2.3) выражают условие равновесия бесконечно малого элемента блока, расположенного между сечениями x и $x + dx$. Что касается условия (2.2), то оно выполняется тождественно для любого значения x .

В самом деле, из условия равновесия элемента блока (фиг. 2) имеем

$$\bar{\tau}(x, y) = \tau(x) - \frac{d}{dx} \int_{-h}^y \sigma_x dy. \quad (2.4)$$

Пользуясь соотношениями (2.3), выражение (2.4) для $\bar{\tau}(x, y)$ приведем к виду

$$\bar{\tau}(x, y) = - \frac{d}{dx} \int_h^y \sigma_x(x, y) dy, \quad (2.5)$$

который удовлетворяет граничным условиям (1.4).

Обозначим величину перерезывающей силы в произвольном поперечном сечении блока через Q_x .

Тогда будем иметь

$$Q_x = - \int_{-h}^{+h} \bar{\tau}(x, y) dy \quad (2.6)$$

или, согласно (2.5), находим

$$Q_x = \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} dy \int_h^y \sigma_x(x, \xi) d\xi. \quad (2.7)$$

Меняя порядок интегрирования в (2.7), имеем

$$Q_x = \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) [h + \xi] d\xi \quad (2.8)$$

или

$$Q_x = h \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) d\xi + \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) \xi d\xi. \quad (2.9)$$

Пользуясь уравнениями равновесия (2.3), получим

$$Q_x = h\tau(x) - h\tau(x) = 0. \quad (2.10)$$

Таким образом, условие (2.2) выполняется тождественно для всех значений $0 \leq x \leq l$.

Переходим к определению $\sigma_x(x, y)$ и $\bar{\tau}(x, y)$. Для этого предварительно напомним выражение для $\sigma_x(x, y)$ в следующем виде

$$\sigma_x(x, y) = E[A(x) + B(x)y] - E\alpha T(y). \quad (2.11)$$

Подставляя это выражение для $\sigma_x(x, y)$ в (2.1), получим

$$2EhA(x) - Ez \int_{-h}^{+h} T(y) dy + \int_x^l \tau(x) dx = 0 \quad (2.12)$$

и

$$\frac{2Eh^3}{3} B(x) - Ez \int_{-h}^{+h} T(y)y dy - h \int_x^l \tau(x) dx = 0$$

или

$$A(x) = -\frac{1}{2Eh} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy,$$

$$B(x) = \frac{3}{2Eh^2} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{3z}{2h^2} \int_{-h}^{+h} T(y)y dy. \quad (2.13)$$

С другой стороны, из (1.2) имеем

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x) - hB(x). \quad (2.14)$$

Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (2.13) в (2.14), получим

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{2}{Eh} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left[1 - \frac{3y}{h} \right] dy. \quad (2.15)$$

Дифференцируя (2.15) по x , находим

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{2}{Eh} \tau(x). \quad (2.16)$$

Пользуясь соотношениями (1.1) и (2.16), для определения $u(x)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2}{Eh} f[u] \quad (2.17)$$

или

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{2}{Eh} f[u(x)] = 0. \quad (2.18)$$

Краевые условия для $u(x)$ в силу (1.1) и (2.15) будут следующие:

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (2.19)$$

$$u'(x) = \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left[1 - \frac{3y}{h} \right] dy \quad \text{при} \quad x = l.$$

Таким образом, решение задачи о термонапряженном состоянии данного блока свелось к определению функции $u(x)$ из нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (2.18) с крайними условиями (2.19).

Пользуясь уравнением (2.16) и условиями (2.19), выражения (2.13) для $A(x)$ и $B(x)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{4} \int_x^l \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^h T(y) dy, \\ B(x) &= \frac{3}{4h} \int_x^l \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^h T(y) y dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

или

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{4} [u'(l) - u'(x)] + \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^h T(y) dy, \\ B(x) &= \frac{3}{4h} [u'(l) - u'(x)] + \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^h T(y) y dy. \end{aligned} \quad (2.21)$$

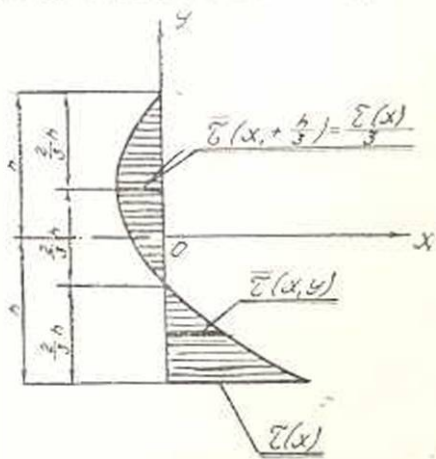
Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (2.21) в (2.11) и пользуясь соотношениями (2.19), для $\sigma_x(x, y)$ получим следующую формулу

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{3E}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) u'(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2h} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \int_{-h}^h T(y) \left(1 + \frac{y}{h} \right) dy \right\} - E\alpha T(y). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подставляя значения $\sigma_x(x, y)$ из (2.22) в (2.5), после интегрирования и некоторых преобразований получим для тангенциального напряжения $\tau(x, y)$ следующее выражение

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= -\frac{E[u(x)]}{2h} \left[(y-h) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2h} (y^2 - h^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Как видно из соотношения (2.23), тангенциальные напряжения $\tau(x, y)$ по толщине блока изменяются по параболическому закону (фиг. 3), причем наибольшее их значение получается на нижней грани, у торцов блока.



Фиг. 3.

В середине блока, т. е. при $x = 0$, $\tau(0, x) = 0$, так как $f(0) = 0$.

Прежде чем перейти к приложению полученных здесь результатов к конкретным задачам по определению температурных напряжений в бетонных блоках, отметим, что в дальнейшем связь между интенсивностью сил связности τ и соответствующими перемещениями u , определяемую зависимостью (1.1), будем называть характеристикой сил связности.

§ 3. Температурные напряжения в бетонном блоке при линейной характеристике сил связности

Положим, что сила связности $\tau(x)$, действующая в данной точке контакта блока с основанием, пропорциональна соответствующему перемещению $u(x)$ и выражается зависимостью

$$\tau(x) = \beta u = \beta u(x), \quad (3.1)$$

где

β — коэффициент пропорциональности, характеризующий меру связности данного бетонного блока с основанием, зависящий от их поверхностной структуры и упругих свойств бетона, с размерностью кг/см^2 .

В этом параграфе будем полагать, что $\tau(l) \leq \tau_s$ или $u(l) \leq \frac{\tau_s}{\beta}$.

Это соответствует такому термонапряженному состоянию бетонного блока, при котором только его крайевые точки ($x = l$, $y = -h$) могут находиться в предельном состоянии.

Тогда, согласно (2.17), дифференциальное уравнение для определения $u(x)$ примет вид

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2\beta}{Eh} u(x) = 0 \quad (3.2)$$

или

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \lambda^2 u(x) = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{2\beta}{Eh}, \quad (3.4)$$

при краевых условиях

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

и

$$u'(x) = \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy \quad \text{при} \quad x = l. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.3) есть

$$u(x) = c_1 \text{sh} \lambda x + c_2 \text{ch} \lambda x. \quad (3.6)$$

В силу условия (3.5) имеем:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{\alpha}{2h\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy. \quad (3.7)$$

Подставляя значения c_1 и c_2 из (3.7) в (3.6), получим

$$u(x) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \lambda x}{2\lambda h \operatorname{ch} \lambda l} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy. \quad (3.8)$$

Введем обозначения

$$\Omega_T = \int_{-h}^{+h} T(y) dy, \quad S_T = \int_{-h}^{+h} T(y) y dy. \quad (3.9)$$

Тогда

$$u(x) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right]. \quad (3.10)$$

Очевидно, что Ω_T представляет площадь, ограниченную температурной кривой в пределах толщины блока, а величина S_T — статический момент этой площади относительно срединной плоскости блока.

Для нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$, согласно (3.10) и (2.22), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & \frac{3E\alpha}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) \left(\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(\frac{\Omega_T}{2h} + \frac{S_T}{2h^2} \right) \right\} - E\alpha T(y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для тангенциальных напряжений $\tau(x, y)$ из соотношения (2.23) имеем:

$$\tau(x, y) = - \frac{\beta u(x)}{2h} \left[(y-h) - \frac{3}{2h} (y^2 - h^2) \right] \quad (3.12)$$

или, подставляя значения $u(x)$ из (3.8) в (3.12), приведем его к виду

$$\tau(x, y) = \frac{3\alpha\beta \operatorname{sh} \lambda x}{4\lambda h \operatorname{ch} \lambda l} (y-h) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right]. \quad (3.13)$$

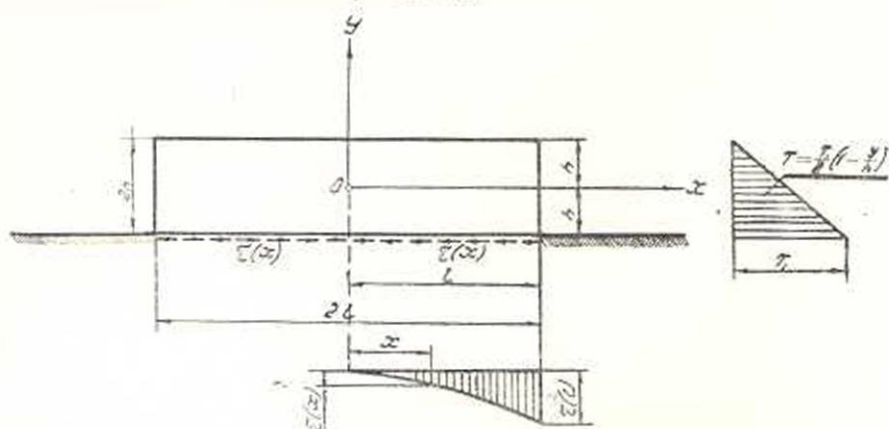
Горизонтальное перемещение $\bar{u}(x, y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & \frac{\alpha}{4\lambda} \left(1 - 3 \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} + \\ & + \frac{3\alpha x}{4} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} + \frac{S_T}{2h^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В качестве конкретного приложения результатов, полученных в настоящем параграфе, рассмотрим задачу об определении температурных напряжений в прямоугольном бетонном блоке при линейном

распределении температуры по толщине блока с учетом сил связности $\tau(x)$, действующих в плоскости его контакта с основанием.

1°. Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ (фиг. 4) лежит на сплошном основании, при полной свободе перемещений торцевых сечений, и подвергается воздействию температуры, изменяющейся по линейному закону.



Фиг. 4.

$$T(y) = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right). \quad (3.15)$$

Так как в плоскости контакта блока с основанием действуют силы связности, то он будет находиться в термонапряженном состоянии.

Из соотношений (3.9) и (3.11) для нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ получим:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{3\alpha E T_1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\text{ch } \lambda x}{\text{ch } \lambda l} - 1 \right]. \quad (3.16)$$

Тангенциальные напряжения $\bar{\tau}(x, y)$ и $\tau(x)$, согласно (3.9) и (3.14), будут

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(x, y) &= \frac{3\alpha\beta T_1 \text{sh } \lambda x}{4\lambda h \text{ch } \lambda l} (y - h) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right), \\ \tau(x) &= \bar{\tau}(x, -h) = \frac{\alpha\beta T_1 \text{sh } \lambda x}{\lambda \text{ch } \lambda l}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для перемещения $u(x)$ в силу (3.9) и (3.10) имеем

$$u(x) = \frac{\alpha T_1 \text{sh } \lambda x}{\lambda \text{ch } \lambda l}. \quad (3.18)$$

Из соотношения (3.16) следует, что наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения получаются вдоль плоскости контакта блока с основанием:

$$\sigma_x(x, -h) = -E\alpha T_1 \left(1 - \frac{\text{ch } \lambda x}{\text{ch } \lambda l} \right). \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) видно, $\sigma_x(x, -h)$ знакопостоянно по всей длине блока и достигает максимума в середине блока, т. е. при $x=0$,

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = -E\alpha T_1 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda l}\right), \quad (3.20)$$

и по мере приближения к торцам блока $\sigma_x(x, -h)$ убывает и стремится к нулю при $x=l$

$$\sigma_x(l, -h) = 0. \quad (3.21)$$

При $y=h$, т. е. у верхней грани блока, нормальные напряжения $\sigma_x(x, h)$ обратного знака, но также знакопостоянны по длине блока и равны

$$\sigma_x(x, h) = \frac{E\alpha T_1}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l}\right). \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что нормальные напряжения на верхней грани блока достигают максимума также в середине блока, т. е. при $x=0$, и равны

$$\sigma_{x \max}(x, h) = \sigma_x(0, h) = \frac{E\alpha T_1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda l}\right) \quad (3.23)$$

и по мере приближения к торцам блока убывают, причем, когда $x=l$,

$$\sigma_x(l, h) = 0. \quad (3.24)$$

По толщине блока $\sigma_x(x, y)$ меняется по линейному закону, причем, согласно (3.16), нейтральная плоскость, где $\sigma_x(y, x) = 0$, находится на расстоянии $y = \frac{h}{3}$ от срединной плоскости блока.

Из полученных соотношений (3.19), (3.20), (3.22) и (3.23) следует, что при охлаждении блока, т. е. когда $T_1 < 0$, по всей плоскости основания блока возникают растягивающие напряжения, причем они достигают наибольшего значения, определяемого формулой (3.20), в середине блока, а наименьшего, равного нулю, — у его торцов.

У верхней грани блока возникают сжимающие напряжения, наибольшие значения которых, определяемые формулой (3.23), также достигаются в середине блока, и по мере приближения к торцам блока они уменьшаются, принимая у торцов значения, равные нулю.

При нагревании блока имеет место обратная картина, т. е. у верхней грани блока возникают растягивающие напряжения, а у нижней — сжимающие.

Тангенциальные напряжения $\tau(x, y)$, согласно (3.17), достигают наибольшего значения у торцов блока при $x=l$ и $y=-h$,

$$\tau_{\max}(x, -h) = \tau(l) = \frac{\alpha \dot{p} T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l \quad (3.25)$$

и по мере приближения к середине блока они, монотонно убывая, стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$.

Максимальные значения перемещений $u(x)$ также имеют место у торцов блока и в силу (3.18) равны

$$u_{\max}(x) = u(l) = \frac{\alpha T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l. \quad (3.26)$$

2°. Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$ при охлаждении блока в зависимости от изменения его геометрических размеров.

Для этого предварительно перепишем формулы (3.19) и (3.20) в следующей форме

$$\sigma_x(x, -h) = E\alpha T_1 \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}} \right], \quad (3.27)$$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = E\alpha T_1 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}} \right],$$

где

T_1 — абсолютное значение температуры нижней грани блока.

Из формул (3.27) следует, что:

а) с увеличением длины блока $2l$, при сохранении его высоты $2h = \text{const}$ и прочих равных условиях, нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$ растут;

б) с увеличением высоты блока $2h$ при $2l = \text{const}$, нормальные напряжения в блоке убывают и, наоборот, при уменьшении высоты они возрастают.

Таким образом, в длинных блоках температурные напряжения значительно больше, чем в коротких и высоких блоках. В длинных блоках значения максимального нормального напряжения $\sigma_{x \max}(x, -h)$ могут быть определены с достаточной точностью по формуле

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) \approx E\alpha T_1 \left[1 - 2e^{-\sqrt{\frac{2\beta}{E}} \cdot \frac{l}{\sqrt{h}}} \right], \quad (3.28)$$

а в коротких блоках

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) \approx \frac{E\alpha T_1}{1 + \frac{Eh}{2\beta l^2}}. \quad (3.29)$$

Из соотношений (3.27) и (3.28) следует, что при увеличении длины блока нормальные напряжения в нем растут гораздо интенсивнее, чем при соответствующем уменьшении высоты блока h .

в) при сохранении постоянного отношения длины блока к его высоте $\frac{l}{h} = \text{const}$, максимальное нормальное напряжение $\sigma_x(0, -h)$

возрастает при увеличении высоты блока $2h$ и убывает при его уменьшении. Таким образом, в геометрически подобных блоках максимальное нормальное напряжение $\sigma_x(0, -h)$ больше у высоких блоков.

Заметим, что в достаточно длинных блоках нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$, как видно из соотношения (3.19), сохраняют значительную величину на большом протяжении длины блока и только близ торцов начинают быстро убывать, стремясь к нулю при $x \rightarrow l$.

Тангенциальные напряжения при охлаждении блока в плоскости его контакта с основанием, согласно (3.17), могут быть представлены в виде

$$\tau(x) = \frac{E\alpha T_1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{x}{h}}{\cosh \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}}. \quad (3.30)$$

Максимальное тангенциальное напряжение $\tau_{\max}(x)$ получается у торцов блока при $x = l$:

$$\tau_{\max}(x) = \tau(l) = \frac{E\alpha T_1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \tanh \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}. \quad (3.31)$$

Для достаточно длинных блоков, как следует из соотношения (3.31),

$$\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}}, \quad (3.32)$$

а для коротких и высоких блоков

$$\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1} \approx \frac{\beta l}{E}. \quad (3.33)$$

В случае нагревания блока аналогичная картина распределения имеет место для $\sigma_x(x, h)$ и $\sigma_x(0, h)$.

Сделаем некоторые предположения по отношению к коэффициенту β , определяющему меру связности бетонного блока с основанием и характер их контакта.

При идеально податливом основании, т. е. когда силы связности между бетонным блоком и его основанием отсутствуют, $\beta = 0$ и, следовательно, $\lambda = 0$.

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= 0, \\ \bar{\tau}(x, y) &= \tau(x) = 0, \\ \bar{u}(x, y) &= \frac{\alpha T_1 x}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \\ u(x) &= \alpha T_1 x. \end{aligned} \quad (3.34)$$

При больших значениях β , а следовательно и λ , будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, -h) &= Ez T_1 [e^{-\lambda(I-x)} - 1], \\ \tau(x) &= \frac{\alpha \beta T_1}{\lambda} e^{-\lambda(I-x)}, \\ u(x) &= \frac{\alpha T_1}{\lambda} e^{-\lambda(I-x)}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

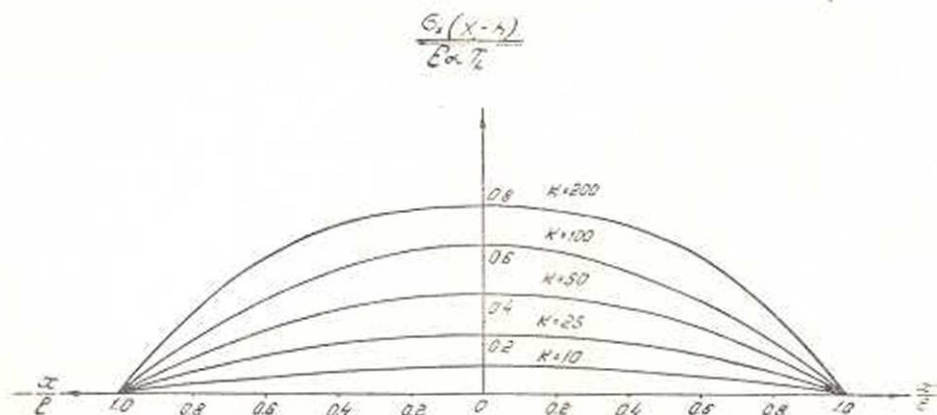
Когда горизонтальные перемещения u вдоль линии контакта блока с основанием отсутствуют, т. е. $\beta = \lambda = \infty$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, -h) &= -Ez T_1, \\ \tau(x) &= 0, \\ u(x) &= 0\end{aligned}$$

для всех значений x , за исключением $x = l$.

Для иллюстрации картины распределения нормальных и касательных температурных напряжений вдоль основания бетонного блока ниже, в таблицах 1, 2 и 3, приводятся соответствующие значения напряжений $\sigma_x(0, -h)$, $\sigma_x(0, h)$, а также $\tau(l)$, для различных значений коэффициента β и отношений $\frac{h}{l}$.

На фигуре 5 показана эпюра распределения нормального напряжения $\sigma_x(0, -h)$ по длине блока.



Фиг. 5.

Таблица 1

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_x(0, -h)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.27), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
10	200	0,141	0,084	0,060	0,039	0,022
25	80	0,299	0,189	0,138	0,092	0,054
50	40	0,477	0,326	0,248	0,171	0,103
100	20	0,675	0,511	0,409	0,299	0,189
200	10	0,842	0,707	0,605	0,477	0,326

Таблица 2

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_x(0, h)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.23), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
10	200	0,070	0,042	0,030	0,019	0,011
25	80	0,150	0,095	0,069	0,046	0,027
50	40	0,238	0,163	0,124	0,086	0,052
100	20	0,338	0,256	0,205	0,150	0,095
200	10	0,421	0,354	0,303	0,239	0,163

Таблица 3

Значения температурных напряжений $\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.31), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
10	200	0,018	0,014	0,012	0,01	0,007
25	80	0,040	0,033	0,028	0,024	0,018
50	40	0,067	0,058	0,052	0,044	0,035
100	20	0,106	0,097	0,090	0,080	0,065
200	10	0,156	0,151	0,145	0,135	0,117

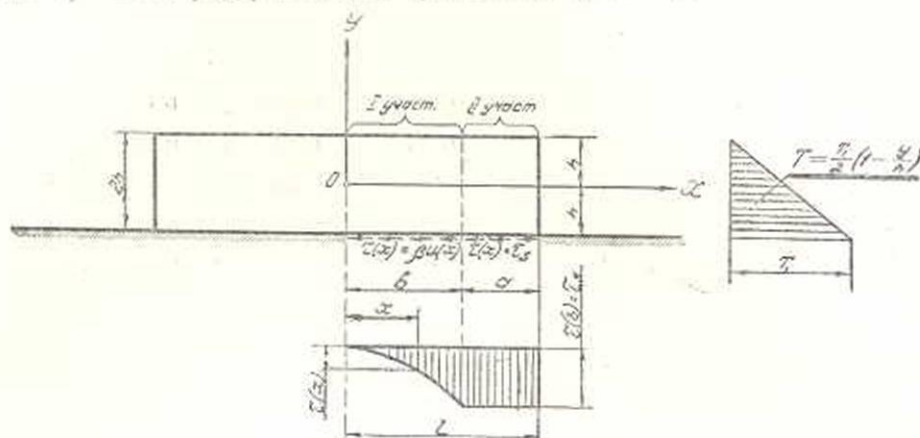
§ 4. Температурные напряжения в бетонном блоке при линейной характеристике сил связности и наличии зоны предельного состояния

Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ подвергается температурному воздействию, которое для простоты

примем изменяющимся по линейному закону (фиг. 6)

$$T = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (4.1)$$

где T_1 — температура нижней грани блока $y = -h$.



Фиг. 6.

В предыдущем параграфе было показано, что если между силой связности $\tau(x)$ и соответствующим перемещением $u(x)$ в данной точке контакта блока с основанием существует линейная зависимость вида (3.1), то их наибольшее значение получается у краевых точек основания блока $x = \pm l$ и $y = -h$ и определяется формулами

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(x) = \tau(l) &= Ez T_1 \frac{\lambda h}{2} \operatorname{th} \lambda l, \\ u_{\max}(x) = u(l) &= \frac{z T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как видно из выражения (4.2), с повышением температуры T_1 значения $\tau(l)$ и $u(l)$ возрастают.

При некотором значении $T_1 = T_{1*}$ крайняя точка основания блока $x = l$ и $y = -h$ придет в предельное состояние, т. е. для этой точки будет иметь место условие

$$\tau_{\max}(x) = \tau(l) = \tau_*,$$

Очевидно, что значение $T_1 = T_{1*}$ определится, согласно (4.2), следующей формулой

$$T_{1*} = \frac{2\tau_*}{Ez\lambda h} \operatorname{cth} \lambda l. \quad (4.3)$$

Таким образом, при $T_1 \leq T_{1*}$ между силой связности $\tau(x)$ и соответствующим перемещением $u(x)$ имеет место зависимость

$$\tau(x) = \beta u(x), \quad (4.4)$$

справедливая для всех точек контакта блока с основанием, включая и $x=l$.

При дальнейшем увеличении T_1 , т. е. когда $T_1 > T_{1s}$, на линии контакта блока с основанием появится некоторый участок, все точки которого будут находиться в предельном состоянии.

Обозначим длину этого участка, которая подлежит определению, через a (фиг. 6).

Тогда, в силу (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \beta u(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq b, \\ \tau(x) &= \tau_s \quad \text{при } b \leq x \leq l,\end{aligned}\quad (4.5)$$

где $a = l - b$.

Рассмотрим термонапряженное состояние I и II участков блока отдельно.

Уравнения равновесия для I участка блока будут

$$E \int_{-h}^{+h} [A(x) + B(x)y] dy - E\alpha \int_{-h}^{+h} T(y) dy + \int_x^b \tau(x) dx + \tau_s(l-b) = 0, \quad (4.6)$$

$$E \int_{-h}^{+h} [A(x) + B(x)y] y dy - E\alpha \int_{-h}^{+h} T(y) y dy - h \int_x^b \tau(x) dx - \tau_s h(l-b) = 0,$$

или, после интегрирования, находим

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy - \frac{1}{2Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{\tau_s(l-b)}{2Eh}, \\ B(x) &= \frac{3\alpha}{2h^3} \int_{-h}^{+h} T(y) y dy + \frac{3}{2Eh^3} \int_x^b \tau(x) dx + \frac{3\tau_s(l-b)}{2Eh^3}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Для второго участка будем иметь

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy - \frac{\tau_s(l-x)}{2Eh}, \\ B(x) &= \frac{3\alpha}{2h^3} \int_{-h}^{+h} T(y) y dy + \frac{3\tau_s(l-x)}{2Eh^3}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Подставляя значения $T = T(y) = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$ в соотношения (4.8),

после интегрирования получим

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{\alpha T_1}{2} - \frac{\tau_s(l-x)}{2Eh}, \\ B(x) &= -\frac{\alpha T_1}{2h} + \frac{3\tau_s(l-x)}{2Eh^2}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Таким образом, функции $A(x)$ и $B(x)$ в интервале $b \leq x \leq l$ полностью определяются уравнением (4.9). Чтобы определить значения этих функций в интервале $0 \leq x \leq b$, необходимо к уравнению (4.7) присоединить условие связности блока с основанием для этого участка, выражающееся зависимостью

$$\tau(x) = \beta u(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq b, \quad (4.10)$$

при этом

$$\begin{aligned} \tau(b) &= \beta u(b) = \tau_s, \\ \tau(0) &= u(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тогда, согласно (4.7) и (4.1), будем иметь

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\alpha T_1}{2} - \frac{1}{2Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{\tau_s(l-b)}{2Eh}, \\ B(x) &= -\frac{\alpha T_1}{2h} + \frac{3}{2Eh^2} \int_x^b \tau(x) dx + \frac{3\tau_s(l-b)}{2Eh^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

С другой стороны, условия (4.10) можно представить в виде

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \beta [\Lambda(x) - hB(x)]. \quad (4.13)$$

Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (4.12) в (4.13), находим

$$\frac{d\tau(x)}{dx} - \beta \left[\alpha T_1 - \frac{2}{Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right] = 0. \quad (4.14)$$

Дифференцируя (4.14) по x , получим следующее дифференциальное уравнение для определения $\tau(x)$,

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda^2\tau(x) = 0, \quad (4.15)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{2\beta}{Eh} \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq b.$$

Краевые условия для $\tau(x)$, в силу (4.11) и (4.14), будут следующие

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'(b) = \beta \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right]. \quad (4.16)$$

Решение уравнения (4.15) при условии (4.16) будет

$$\tau(x) = \frac{\beta}{\lambda} \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right] \frac{\text{sh } \lambda x}{\text{ch } \lambda b}, \quad (4.17)$$

при $0 \leq x \leq b$.

Выражение (4.17) определяет закон распределения сил связности $\tau(x)$ на первом участке контакта блока с основанием. На втором участке контакта блока, т. е. когда $b \leq x \leq l$,

$$\tau(x) = \tau_s. \quad (4.18)$$

Пользуясь выражением (4.17) и условием $\tau(b) = \tau_s$, получим следующее трансцендентное уравнение для определения a , т. е. длины того участка контакта блока, все точки которого находятся в предельном состоянии.

$$\frac{\lambda \tau_s}{\beta} = \left(\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right) \operatorname{th} \lambda(l-a). \quad (4.19)$$

После того, как из уравнения (4.19) определено значение $a = l - b$, пользуясь соотношениями (4.12), (4.17) и (1.3), получим следующие выражения для нормальных напряжений

$$\sigma_x(x, -h) = E \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) - \frac{2\tau_s a}{h}, \quad (4.20)$$

когда $0 \leq x \leq b$ и

$$\sigma_x(x, -h) = -\frac{2\tau_s(l-x)}{h}, \quad (4.21)$$

при $b \leq x \leq l$.

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{x \max}(x, -h)$ на первом участке блока будут при $x = 0$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = -E \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right] \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) - \frac{2\tau_s a}{h}, \quad (4.22)$$

а на втором участке — при $x = b$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(b, -h) = -\frac{2\tau_s a}{h}. \quad (4.23)$$

§ 5. Температурные напряжения в бетонном блоке при нелинейной характеристике сил связности

Положим, что сила сопротивления $\tau(x)$, действующая в данной точке контакта блока с основанием, и перемещение $u(x)$ связаны зависимостью

$$\tau(x) = f[u(x)]. \quad (5.1)$$

Будем полагать, что $\tau(l) \leq \tau_s$, а температура по толщине блока меняется по линейному закону (3.15).

Тогда температурные напряжения в бетонном блоке определятся через функцию $u(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{E}{4} \left(1 - \frac{3y}{h} \right) \left\{ u'(x) - \alpha T_1 \right\}, \\ \bar{\tau}(x, y) &= -\frac{f[u(x)]}{2h} \left\{ (y-h) - \frac{3}{2h} (y^2 - h^2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где функция $u(x)$, согласно (2.18), определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2}{Eh} [u(x)] = 0 \quad (5.3)$$

с краевыми условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = \alpha T_1. \quad (5.4)$$

Такая постановка задачи предполагает, что известен вид нелинейной характеристики сил связности, который определяется из опыта и характеризует степень связности контакта блока с основанием.

Одновременно следует отметить, что даже в том случае, когда опытные кривые $\tau(x) = [u(x)]$ могут быть аппроксимированы с достаточной точностью степенной функцией или полиномом, то и тогда нахождение эффективного решения уравнения (5.3) с краевыми условиями (5.4) связано с большими математическими трудностями.

Покажем это на простом примере.

Положим, что характеристика сил связности τ имеет нелинейность вида

$$\tau = [u] = \beta_1 u + \beta_2 u^3, \quad (5.5)$$

где β_1 и β_2 — некоторые параметры, подобранные так, чтобы соотношение (5.5) наилучшим образом описывало экспериментальные кривые $\tau \sim u$.

В этом случае дифференциальное уравнение (5.3) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 u - \mu^2 u^3 = 0, \quad (5.6)$$

где введены обозначения

$$\lambda^2 = \frac{2\beta_1}{Eh} \quad \text{и} \quad \mu^2 = \frac{2\beta_2}{Eh}. \quad (5.7)$$

Для нахождения точного решения уравнения (5.6), удовлетворяющего краевым условиям (5.4), предварительно запишем его в форме

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \lambda^2 u^2 - \frac{\mu^2 u^4}{2} \right] = 0 \quad (5.8)$$

или

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2} + c_1. \quad (5.9)$$

Интегрируя, находим

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2}}} + c_2. \quad (5.10)$$

Замечая, что при $x = 0$ $u(0) = 0$, получим

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2}}} \quad (5.11)$$

Полученный эллиптический интеграл (5.11) может быть приведен к нормальному виду следующим образом [9]:

Введем обозначение

$$I = c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2} \quad (5.12)$$

Из уравнения $I = 0$ получим

$$u^2 = \frac{-\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\mu^2} \quad (5.13)$$

Пользуясь значениями (5.13), из (5.12) находим

$$I = \frac{\mu^2}{2} \left(u^2 - \frac{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\mu^2} \right) \left(u^2 - \frac{-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\mu^2} \right) \quad (5.14)$$

Подставляя значение I из (5.14) в (5.11), имеем

$$\frac{\mu}{\sqrt{2}} x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\mu^2} - u^2 \right) \left(\frac{-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\mu^2} - u^2 \right)}} \quad (5.15)$$

или

$$cx = \int_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{(1 - u_1^2)(1 - k^2 u_1^2)}} \quad (5.16)$$

где введены обозначения

$$u_1 = \frac{\mu u}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}} \quad (5.17)$$

$$k^2 = \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}} \quad (5.18)$$

$$c = \frac{\mu c_1}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}} \quad (5.19)$$

Обращая интеграл (5.16) и пользуясь обозначениями (5.17)–(5.19) для функции $u(x)$, получим следующее выражение

$$u(x) = \frac{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}}{\mu} \operatorname{sn} \left(\frac{\mu \sqrt{c_1}}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1\mu^2}}} x \right) \quad (5.20)$$

Для определения постоянной c_1 воспользуемся краевым условием

$$u'(l) = \alpha T_1. \quad (5.21)$$

Дифференцируя (5.20) по x , из (5.21) для определения c_1 получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\alpha T_1 = \sqrt{c_1} \operatorname{sn} \left(\frac{\mu \sqrt{c_1}}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \right) \operatorname{dn} \left(\frac{\mu \sqrt{c_1}}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \right), \quad (5.22)$$

где $\operatorname{sn}(x)$, $\operatorname{cn}(x)$ и $\operatorname{dn}(x)$ — эллиптические функции Якоби, а λ и μ — известные параметры, определяемые соотношением (5.7).

Затруднения, которые возникают при применении полученных формул (5.20) и (5.22) к решению конкретных задач по определению температурных напряжений в прямоугольных бетонных блоках с нелинейной характеристикой сил связности, вызывают необходимость отыскания более эффективных приближенных способов решения уравнения (5.3).

Наиболее простой и естественный прием приближенного решения нелинейных уравнений вида (5.3) заключается в замене нелинейной характеристики прямолинейным отрезком или системой отрезков. Такой способ прямой линеаризации удобен тем, что с его помощью могут быть использованы те результаты, которые получаются при решении многих линейных задач. Способ прямой линеаризации использован в работах Я. Г. Пановко [10], Н. К. Куликова [11], Л. Г. Лойцанского [12], Ю. А. Голпа [13] и других при решении некоторых задач теории упругих колебаний.

Способ прямой линеаризации можно применить к уравнению (5.3) следующим образом [10]. Заменяем нелинейную характеристику $f(u)$ в интервале $0 \leq u \leq u(l)$ ее приближенной линейной характеристикой βu .

Коэффициент β подчиним условию минимума интегрального квадратичного отклонения, взвешенного по величине u . Это условие усиливает приближение при больших значениях u , что очень важно, так как при малых значениях $u(x)$ сила связности $\tau(x)$ также мала и не может сильно влиять на термонапряженное состояние блока.

Таким образом, ищем значение β из условия минимума интеграла

$$I = \int_0^{u(l)} \{ (f(u) - \beta u) u \}^2 du, \quad (5.23)$$

т. е. определяем β из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{u(l)} \{ (f(u) - \beta u) u \}^2 du = 0 \quad (5.24)$$

или

$$\beta = \frac{5}{u^5(l)} \int_0^{u(l)} f(u) u^5 du, \quad (5.25)$$

После того, как величина параметра β определена, задача сводится к решению линейного уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 u = 0 \quad (5.26)$$

с краевыми условиями (5.4), которое было подробно рассмотрено в предыдущих параграфах настоящей главы.

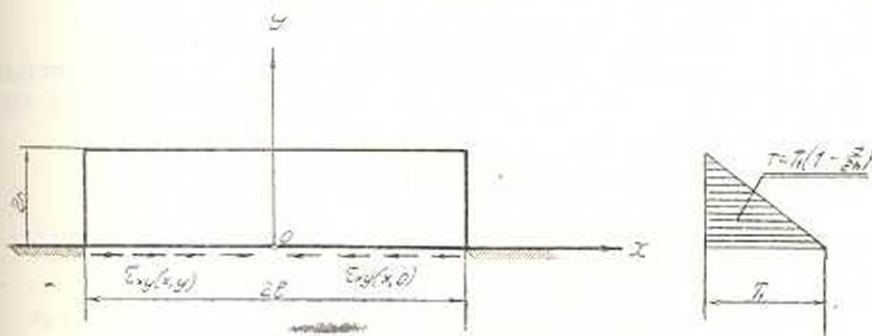
Глава II

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БЕТОННЫХ БЛОКАХ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Упруго-мгновенные напряжения в прямоугольном блоке от воздействия температуры и сил связности

Пусть прямоугольный бетонный блок (фиг. 7) высотой $2h$ и длиной $2l$, находясь под воздействием стационарной температуры $T(y)$, своей продольной стороной $y=0$ связан со сплошным основанием так, что на нижней грани блока отсутствуют нормальные напряжения

$$\sigma_x(x, 0) = 0, \quad (1.1)$$



Фиг. 7.

а действующие вдоль этой грани силы связности $\tau(x)$ распределены по закону

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau(x) - \beta u(x, 0), \quad (1.2)$$

где β — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность кг/см^2 ,

$u(x, 0)$ — горизонтальное перемещение точек нижней грани блока по направлению оси x .

Продольную сторону блока $y=2h$ считаем свободной от внешних напряжений

$$\sigma_y(x, 2h) = \tau_{xy}(x, 2h) = 0, \quad (1.3)$$

а на торцах блока выполняются условия

$$\sigma_x(\pm l, y) = \int_0^{2h} \tau_{xy} dy \Big|_{x=\pm l} = 0, \quad (1.4)$$

В силу симметрии граничных условий, на оси $x = 0$ будут иметь место

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (1.5)$$

Для простоты положим, что температура изменяется по линейному закону

$$T = T(y) = T_1 \left(1 - \frac{y}{2h} \right), \quad (1.6)$$

где T_1 — температура нижней грани блока.

Исследования термонапряженного состояния в рассматриваемом бетонном блоке будем проводить в рамках плоской задачи, решение которой, как известно, сводится к нахождению функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей внутри области поперечного сечения блока (фиг. 7) дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -E\alpha \nabla^2 T, \quad (1.7)$$

а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1), (1.3) и (1.4).

Здесь E — модуль мгновенной деформации блока,

а α — коэффициент линейного расширения с размерностью $\frac{1}{\text{град}}$.

При плоском напряженном состоянии имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Перемещения u и v определяются из формул

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Из (1.8) и (1.9) получим

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \alpha T(y)x + f_1(y), \quad (1.10)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} + \alpha \int_0^y T(y) dy + f_2(x).$$

Неизвестные функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ можно определить из условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx - 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dy \right\} + \alpha T'(y)x + f_1'(y) + f_2'(x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

откуда следует, что

$$f_1(y) = -ay + b, \quad f_2(x) = \frac{\alpha T_1 x^2}{4h} + ax + c. \quad (1.12)$$

В нашем случае, согласно (1.6), имеем $\nabla^2 T = 0$.

Решение уравнения (1.7) ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \{ A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y) \}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где введено обозначение

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}. \quad (1.14)$$

Пользуясь формулами (1.8), (1.10), (1.12) и (1.13), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x \{ (A_k + 2D_k) \operatorname{ch} \alpha_k y + (B_k + 2C_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y) \}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x \{ A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y) \}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \sin \alpha_k x \{ (A_k + D_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + (B_k + C_k) \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{sh} \alpha_k y + D_k \operatorname{ch} \alpha_k y) \}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x \{ & [(1+\nu) A_k + 2D_k] \operatorname{ch} \alpha_k y + \\
 & + [(1+\nu) B_k + 2C_k] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y] + \\
 & + z T_1 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) x - ay + b,
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = -\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x \{ & [(1+\nu) A_k - (1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 & + [(1+\nu) B_k - (1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k \operatorname{sh} \alpha_k y + D_k \operatorname{ch} \alpha_k y] + \\
 & + z T_1 \left(1 - \frac{y}{4h} \right) y + z T_1 \frac{x^2}{4h} + ax + c.
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям (1.1)–(1.5), из соотношений (1.15)–(1.18) для определения неизвестных коэффициентов A_k , B_k , C_k и D_k получим следующие уравнения:

$$A_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h + B_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h (C_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h + D_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h) = 0, \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
 (A_k + D_k) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + (B_k + C_k) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h (C_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h + \\
 + D_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h) = 0,
 \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$A_k = 0, \quad (1.21)$$

$$a = b = 0, \quad (1.22)$$

$$B_k + C_k - \frac{\beta}{E\alpha_k} [(1+\nu) A_k + 2D_k] + z_k = 0, \quad (1.23)$$

При этом использованы обозначения (1.14),

$$z_k = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k-1)\alpha_k^3} \alpha_k^3 T_1, \quad (1.24)$$

и следующее разложение

$$x = \frac{\delta l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \alpha_k x \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.25)$$

Решая уравнения (1.19)–(1.20), находим

$$\begin{aligned}
 B_k &= -\frac{4(\alpha_k h)^2}{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k h - 2\alpha_k h} D_k, \\
 C_k &= -\frac{\operatorname{sh}^2 2\alpha_k h}{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k h - 2\alpha_k h} D_k.
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Подставляя эти значения в (1.23), получим

$$D_k = \frac{2\alpha_k \alpha_k h \chi_k}{\psi_k + \frac{4\beta h}{E} \chi_k}, \quad (1.27)$$

где

$$\chi_k = \frac{\operatorname{th} 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h}, \quad (1.28)$$

$$\psi_k = \operatorname{th}^2 2\alpha_k h - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2.$$

Тогда из (1.26) находим

$$\begin{aligned} B_k &= - \frac{2 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2}{\alpha_k h \chi_k} D_k, \\ C_k &= - \frac{\operatorname{th}^2 2\alpha_k h}{2\alpha_k h \chi_k} D_k, \\ B_k + C_k &= - \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Пользуясь этими выражениями для определения напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ и перемещения $u(x, y)$, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x(x, y)}{E\alpha T_1} &= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2\operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y - \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right\}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y(x, y)}{E\alpha T_1} &= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}(x, y)}{E\alpha T_1} &= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{ch} \alpha_k y - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{2\alpha_k h} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{u(x, y)}{\alpha T_1 l} &= \frac{x}{l} \left(1 - \frac{y}{2h} \right) - \\
 &- \frac{l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1)^2 \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - \right. \\
 &- \frac{4\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - (1+\nu) \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + \\
 &\left. + 4(1+\nu) \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\}. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Для нормальных напряжений σ_x в точке $(0, 0)$ получим следующее значение:

$$\frac{\sigma_x(0, 0)}{E \alpha T_1} = - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + 1 \right]}. \quad (1.34)$$

Оценим отношение $\frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$, где $z = \frac{(2k-1)\pi h}{l}$.

Согласно (1.28) имеем

$$\frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = \frac{\operatorname{th}^2 z + \left(\frac{z}{\operatorname{ch} z} \right)^2}{\frac{\operatorname{th} z}{z} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}} = z \frac{\operatorname{sh}^2 z - z^2}{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - z} = z \operatorname{th} z \frac{1 - \left(\frac{z}{\operatorname{sh} z} \right)^2}{1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}} < z \operatorname{th} z. \quad (1.35)$$

При этом использовано неравенство

$$\frac{1 - \left(\frac{z}{\operatorname{sh} z} \right)^2}{1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}} < 1, \quad (0 < z < \infty).$$

Из (1.35) получим

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = \infty, \quad (1.36)$$

так как при $z \rightarrow 0$ $1 - \frac{z}{\operatorname{sh} z}$ стремится к нулю быстрее, чем $1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}$ и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 1. \quad (1.37)$$

Таким образом функции $\frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$ и $\frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$ с возрастанием аргумента z монотонно растут и для них имеют место неравенства

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) \leq \infty, \\ \left(1 - \frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z)\right) \leq 1, \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 \leq z \leq \infty. \quad (1.38)$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1°. $h = \text{const}$; тогда из (1.34) получим

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t=0, \\ -1 & \text{и в } t=\infty, \end{cases} \quad (1.39)$$

при этом использованы значения (1.36) и равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, с увеличением длины блока $2l$ и при сохранении его высоты $2h = \text{const}$ и прочих равных условиях абсолютное значение нормального напряжения в блоке $\sigma_x(0,0)$ растет, стремясь в пределе к $|E\alpha T_1|$.

2°. $l = \text{const}$; тогда

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 1 & \text{при } h=0 \\ -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1) \left[(2k-1)\pi \frac{E}{4\rho l} + 1 \right]} = -\delta & \text{при } h=\infty, \end{cases} \quad (1.40)$$

где $0 < \delta < 1$.

При этом использованы соотношения (1.37). Из (1.40) следует, что с увеличением высоты блока $2h$ и при сохранении его длины $2l = \text{const}$, абсолютное значение нормального напряжения блока $\sigma_x(0,0)$ убывает, оставаясь все время больше некоторого числа δ ($0 < \delta < 1$), значения которого зависят от величины $\frac{E}{4\rho l}$.

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const}$, имеем

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ -1 & \text{при } h=\infty, \end{cases} \quad (1.41)$$

откуда следует, что при сохранении постоянного отношения длины блока к его высоте $\frac{l}{h} = \text{const}$, нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0,0)$ возрастает с увеличением его высоты $2h$ и убывает при ее уменьшении.

Для нормальных напряжений σ_x в точке $(0, 2h)$ получаем следующее значение

$$\frac{\sigma_k(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]}, \quad (1.42)$$

где введено обозначение

$$\varphi_k(z) = \frac{z - \text{th}z}{z \text{ch} z \chi_k} = \frac{z \text{ch} z - \text{sh}z}{\text{sh}z \text{ch} z - z}. \quad (1.43)$$

Сравнивая формулы (1.34) и (1.42), мы видим, что напряжения $\sigma_x(0, 0)$ и $\sigma_x(0, 2h)$ имеют разные знаки.

Легко видеть, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_k(z) = \left[\frac{1 - \frac{\text{th}z}{z}}{\frac{\text{sh}z}{z} - \frac{1}{\text{ch}z}} \right]_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (1.44)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi_k(z) = \left[\frac{zs \text{h}z}{\text{ch}^2 z + \text{sh}^2 z - 1} \right]_{z=0} = \frac{1}{2}. \quad (1.45)$$

Пользуясь формулой (1.42), получим следующие предельные случаи

1°. $h = \text{const.}$

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } l = \infty, \end{cases} \quad (1.46)$$

при этом использованы значения (1.36), (1.44) и (1.45).

Таким образом, при увеличении длины блока $2l$ и сохранении его высоты $2h = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ растет, стремясь в пределе к $\frac{E\alpha T_1}{2}$.

2°. $l = \text{const.}$, тогда

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } h = 0, \\ 0 & \text{при } h = \infty. \end{cases} \quad (1.47)$$

Здесь использованы значения (1.37), (1.44) и (1.45).

Следовательно, с увеличением высоты блока и при сохранении его длины $2l = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ убывает, стремясь при $h \rightarrow \infty$ к нулю.

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const.}$ имеет место

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{2k-1} - \gamma, & \text{при } h=\infty, \end{cases} \quad (1.48)$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Таким образом, с увеличением высоты блока и при сохранении $\frac{h}{l} = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ растет, оставаясь все время меньше некоторого положительного числа $\gamma \left(\frac{h}{l} \right) < \frac{1}{2}$.

Таким образом, в геометрически подобных блоках нормальное напряжение $\sigma_x(0, 2h)$ больше у высоких блоков.

В таблицах 4 и 5 приводятся некоторые значения нормальных напряжений $\sigma_x(0, 0)$ и $\sigma_x(0, 2h)$, вычисленные согласно гипотезе плоских сечений, т. е. по формулам (3.23) и (3.27) первой главы, и без этой гипотезы — по формулам (1.34) и (1.42) настоящей главы.

Из этих таблиц видно, что результаты, полученные на основании гипотезы плоских сечений, отличаются от результатов, полученных без этой гипотезы незначительно. Для блоков с отношением их высоты к длине, равным $\frac{1}{2}$, разница между этими результатами составляет примерно 5%. Разница эта сильно уменьшается, когда отношение $\frac{h}{l}$ убывает.

Таблица 4

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_x(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$, вычисленные по формулам (1.327)

и (П. 1.34) при $E = 2.10^6 \text{ кг/см}^2$, $2h = 1,00 \text{ м}$ и $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$.

β	$\frac{E}{4\beta h}$	$\frac{h}{l}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{8}$		
			a	b	c	a	b	c	a	b	c
25	40		0,0537	0,0567	5,3	0,0923	0,0950	2,8	0,299	0,301	0,66
50	20		0,103	0,108	4,6	0,171	0,176	2,8	0,477	0,479	0,42
100	10		0,189	0,198	4,5	0,299	0,306	2,3	0,675	0,676	0,15
200	5		0,326	0,338	3,6	0,477	0,483	1,2	0,841	0,841	—

a — значения, вычисленные по гипотезе плоских сечений по формуле (3.27) первой главы;

b — значения, вычисленные без этой гипотезы по формуле (1.34) настоящей второй главы;

c — ошибка в процентах.

Таблица 5

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_x(0, 2h)}{E \alpha T_1} \right|$, вычисленные по формуле (1.3.23)

и (1.1.43) при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $2h = 1,00 \text{ м}$ и $\frac{h}{l} = 1/4$ и $1/5$.

β	$\frac{E}{4\beta h}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{5}$		
		a	b	c	a	b	c
10	100	0,0193	0,01898	1,68	0,0705	0,07012	0,54
25	40	0,0461	0,04532	1,72	0,1435	0,14366	0,57
50	20	0,0855	0,08397	1,82	0,2385	0,23858	0,81
100	10	0,150	0,14654	2,23	0,3375	0,33428	0,98
200	5	0,239	0,23227	2,90	0,421	0,41660	1,03

a — значения, вычисленные по гипотезе плоских сечений по формуле (3.23) первой главы;

b — значения, вычисленные без этой гипотезы по формуле (1.43) настоящей главы;

c — ошибка в процентах.

Для определения значений сил связности $\tau(x)$ или касательных напряжений на нижней грани блока получаем следующую формулу:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{E \alpha T_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{\phi_k}{\alpha_k h \chi_k} \quad (1.49)$$

Пользуясь этой формулой, получим следующие значения 1°. При $h = \text{const}$,

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \frac{\phi_k}{\alpha_k h \chi_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } l=0, \\ 0 & \text{при } l=\infty, \end{cases} \quad (1.50)$$

при этом использованы значения (1.3.6) и (1.3.7).

2°. При $l = \text{const}$, имеем

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \left[(2k-1) \pi \frac{E}{4\beta l} + 1 \right]} = \pi & \text{при } h=\infty. \end{cases} \quad (1.51)$$

Здесь использованы значения (1.3.7).

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const}$, получим

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \begin{cases} 0 & h=0, \\ \infty & h=\infty, \end{cases} \quad (1.52)$$

§ 2. Температурные напряжения в прямоугольном бетонном блоке с учетом ползучести бетона при линейной характеристике сил связности

Пусть прямоугольный бетонный блок в некотором возрасте $\tau = \tau_1$ бетона подвергается воздействию стационарного потока тепла, определяющемуся зависимостью (1.6).

Тогда составляющие упруго-мгновенного напряжения $\sigma_x(x, y; \tau_1)$, $\sigma_y(x, y; \tau_1)$ и $\tau_{xy}(x, y; \tau_1)$ определяются соотношениями (1.30)–(1.32) и не будут зависеть от времени t .

Термонапряженное состояние в бетонном блоке от воздействия стационарного теплового потока, вызванного в возрасте бетона $\tau = \tau_1$, под влиянием ползучести бетона с течением времени будет изменяться.

В этом случае температурные напряжения в бетонном блоке определяются через функцию напряжений $\varphi(x, y; t)$, которая должна удовлетворять следующему интегральному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; t) = E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} c(t, \tau) d\tau = -E\alpha \nabla^2 T(x, y; t), \quad (2.1)$$

где $C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$ — мера ползучести [14]

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

C_0 , A_1 и γ — некоторые параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

В данном случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T(x, y; t) = 0. \quad (2.3)$$

Тогда для определения функции $\varphi(x, y; t)$ получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое, как известно [15], в регулярных случаях не имеет другого решения, кроме тождественного нуля, т. е.

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; t) = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, функция напряжений $\varphi(x, y; t)$ будет иметь такой же вид, как и функция напряжений $\varphi(x, y)$ и, в упругом решении (1.13), только в выражении для функции $\varphi(x, y; t)$ коэффициенты A_k , B_k , C_k и D_k будут зависеть от времени t .

При решении задачи о температурных напряжениях в прямоугольном бетонном блоке с учетом ползучести бетона будем исходить из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^*(x, 2h; t) &= \tau_{xy}^*(x, 2h; t) = 0, \\
 u(0, y; t) &= \tau_{xy}^*(0, y; t) = 0, \\
 \sigma_x^*(l, y; t) &= \int_0^{2h} \tau_{xy}^*(x, y; t) dy \Big|_{x=l} = 0, \\
 \sigma_y^*(x, 0; t) &= 0, \quad \tau_{xy}^*(x, 0; t) = \tau(x, t) = \beta u(x, 0; t).
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Напряжения $\sigma_x^*(x, y; t)$, $\sigma_y^*(x, y; t)$ и $\tau_{xy}^*(x, y; t)$ выражаются через функцию $\varphi(x, y; t)$ следующими формулами

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^*(x, y; t) &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial y^2}, \\
 \sigma_y^*(x, y; t) &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x^2}, \\
 \tau_{xy}^*(x, y; t) &= - \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Перемещения $u(x, y; t)$ и $v(x, y; t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 z_x = \frac{\partial u(x, y; t)}{\partial x} - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_x^*(x, y; t) - \nu \sigma_y^*(x, y; t)] - \\
 &- \int_{\tau_1}^t [\sigma_x^*(x, y; \tau) - \nu \sigma_y^*(x, y; \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau,
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
 z_y = \frac{\partial v(x, y; t)}{\partial y} - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_y^*(x, y; t) - \nu \sigma_x^*(x, y; t)] - \\
 &- \int_{\tau_1}^t [\sigma_y^*(x, y; \tau) - \nu \sigma_x^*(x, y; \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 u(x, y; t) - \alpha T x - f_1(y) &= \frac{1}{E} f(x, y; t) - \int_{\tau_1}^t f(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \\
 v(x, y; t) - \alpha \int T(y) dy - f_2(x) &= \frac{1}{E} \psi(x, y; t) - \int_{\tau_1}^t \psi(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом использовано значение $T = T(y)$ и введены обозначения

$$\begin{aligned}
 f(x, y; t) &= \int [\sigma_x^*(x, y; t) - \nu \sigma_y^*(x, y; t)] dx = \int \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \varphi(x, y; t)}{\partial y}, \\
 \psi(x, y; t) &= \int [\sigma_y^*(x, y; t) - \nu \sigma_x^*(x, y; t)] dy = \int \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \varphi(x, y; t)}{\partial x}.
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функцию $\varphi(x, y; t)$ ищем в виде:

$$\varphi(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x [A_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y]], \quad (2.10)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}.$$

Подставляя (2.10) в (2.6) и (2.8), получим

$$\sigma_x^*(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [A_k(t) + 2D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + [B_k(t) + \\ + 2C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y], \quad (2.11)$$

$$\sigma_y^*(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [A_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y]], \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy}^*(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [A_k(t) - D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + [B_k(t) + \\ + C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y - D_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y], \quad (2.13)$$

$$u(x, y; t) = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [(1-\nu) A_k(t) + 2D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + [(1+\nu) B_k(t) + 2C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y] - \\ - \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [(1+\nu) A_k(\tau) + 2D_k(\tau)] \operatorname{ch} \alpha_k y + [(1+\nu) B_k(\tau) + \\ + 2C_k(\tau)] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + D_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k y] \frac{d}{d\tau} C(t, \tau) d\tau + \alpha T_1 \left(1 - \frac{y}{2h}\right) x - ay + b, \quad (2.14)$$

$$v(x, y; t) = -\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x [(1+\nu) A_k(t) - (1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + [(1+\nu) B_k(t) - (1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1-\nu) \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y +$$

$$\begin{aligned}
 + D_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y] + \int_{\tau_1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x \{ [(1+\nu) A_k(\tau) - (1-\nu) D_k(\tau)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 + [(1+\nu) B_k(\tau) - (1-\nu) C_k(\tau)] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 + D_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k y] \} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau + \alpha T_1 \left(1 - \frac{y}{4h} \right) y + \alpha T_1 \frac{x^2}{4h} + ay + c. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

При этом использованы значения

$$f_1(y) = -ay + b, \quad (2.16)$$

$$f_2(x) = \alpha T_1 \frac{x^2}{4h} + ax + c.$$

Удовлетворив граничным условиям (2.5), из (2.10)–(2.15) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 A_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + B_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h [C_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + \\
 + D_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h] = 0, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [A_k(t) + D_k(t)] \operatorname{sh} 2\alpha_k h + [B_k(t) + C_k(t)] \operatorname{ch} 2\alpha_k h + \\
 + 2\alpha_k h [C_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + D_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h] = 0, \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

$$A_k(t) = 0, \quad (2.19)$$

$$a = b = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 B_k(t) + C_k(t) - \frac{\beta}{E\alpha_k} [(1+\nu) A_k(t) + 2D_k(t)] + \alpha_k + \\
 + \frac{\beta}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^1 [(1+\nu) A_k(\tau) + 2D_k(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = \psi'(\tau) - [\psi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (2.22)$$

При этом использовано обозначение (1.24) и разложение (1.25).

Из (2.17)–(2.19) находим

$$A_k(t) = 0,$$

$$B_k(t) = - \frac{4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2}{\operatorname{th} 2\alpha_k h - \frac{2\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h}} D_k(t), \quad (2.23)$$

$$C_k(t) = - \frac{\operatorname{th}^2 2\alpha_k h}{\operatorname{th} 2\alpha_k h - \frac{2\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h}} D_k(t).$$

$$B_k(t) + C_k(t) = - \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k(t), \quad (2.24)$$

где использованы обозначения (1.28).

Подставляя эти значения в (2.21), получим

$$- \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k(t) - \frac{2\beta h}{E\alpha_k h} D_k(t) + \alpha_k + \\ + \frac{2\beta h}{\alpha_k h} \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.25)$$

или, подставляя сюда (2.22), будем иметь

$$D_k(t) \left[\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E} \right] - 2\alpha_k h \alpha_k = \\ = 4\beta h \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau. \quad (2.26)$$

Отсюда имеем

$$D_k(\tau_1) = \frac{2\alpha_k h \alpha_k}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E}}. \quad (2.27)$$

Пользуясь соотношениями (2.26) и (2.27), получим для определения $D_k(t)$ следующее интегральное уравнение

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau, \quad (2.28)$$

где

$$b_k = \frac{4\beta h}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E}} = \frac{E}{4\beta h \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} > 0, \quad (2.29)$$

Дифференцируя (2.28) по t , получим

$$D_k'(t) = -\gamma b_k D_k(t) \varphi(t) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau, \quad (2.30)$$

откуда следует, что

$$D_k'(\tau_1) = -\gamma b_k D_k(\tau_1) \varphi(\tau_1). \quad (2.31)$$

Подставляя в (2.30) значение интеграла

$$\gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \\ = -\gamma D_k(t) + \gamma D_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

имеем

$$D_k'(t) = -\gamma b_k D_k(t) \varphi(t) - \gamma D_k(t) + \gamma D_k(\tau_1) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Дифференцируя это уравнение по t , приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$D_k'(t) + \gamma D_k(t)[1 + b_k \varphi(t)] = 0 \quad (2.34)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} D_k(\tau_1) &= \frac{2\alpha_k h \alpha_k}{\frac{\psi_k}{\lambda_k} + \frac{4\beta l r}{E}}, \\ D_k'(\tau_1) &= -\gamma b_k D_k(\tau_1) \varphi(\tau_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Решение уравнения (2.34) при начальных условиях (2.35) имеет вид

$$D_k(t) - D_k(\tau_1) = D_k(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz, \quad (2.36)$$

или

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left[1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz \right]. \quad (2.37)$$

Подставляя сюда $\varphi(\tau) = \frac{\Lambda_1}{\tau} + C_0$ из соотношения (2.37) получим

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left\{ 1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1} \tau_1^{p_k} \int_{\tau_1}^t z^{-p_k} e^{-\gamma k z} dz \right\}, \quad (2.38)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma(1 + b_k C_0) &= \gamma_k, \\ \gamma b_k \Lambda_1 &= p_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Пользуясь введенным ранее понятием функции влияния $\Phi(\xi, p)$ [14]

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \quad (2.40)$$

будем иметь

$$\int_{\tau_1}^t z^{-p_k} e^{-\gamma_k z} dz = \gamma_k^{-(1-p_k)} [\Phi(\gamma_k t, p_k) - \Phi(\gamma_k \tau_1, p_k)]. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.38), получим

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma b_k}{r_k^{1-p_k}} \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{p_k} e^{-r_k \tau_1} [\Phi(r_k t, p_k) - \Phi(r_k \tau_1, p_k)] \right\}. \quad (2.42)$$

Введем обозначение

$$H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right) = 1 - \frac{\gamma}{r_k^{1-p_k}} \cdot \frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{p_k} e^{-r_k \tau_1} [\Phi(r_k t, p_k) - \Phi(r_k \tau_1, p_k)]; \quad (2.43)$$

тогда

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \quad (2.44)$$

Заметим, что

$$H_k \left(\tau_1, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right) = 1. \quad (2.45)$$

Для определения температурных напряжений и перемещений в прямоугольных бетонных блоках с учетом ползучести бетона получим следующие формулы

$$\frac{\sigma_x^*(x, y; t)}{E \alpha T_1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \left\{ 2 \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ \left. - \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y - \right. \\ \left. - 4 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{\sigma_y^*(x, y; t)}{E \alpha T_1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ \left. - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right), \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^*(x, y; t) = & \frac{E \alpha T_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ & \left. - \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{ch} \alpha_k y - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{2\alpha_k h} \right] \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y; t)}{l \alpha T_1} = & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{y}{2h} \right) - \\ & - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1)^2 \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - \right. \\ & - 4 \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k y}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - (1 + \nu) \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + \\ & \left. + 4(1 + \nu) \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Из соотношений (2.46)–(2.48) видно, что термоупругие напряжения в бетонных блоках: $\sigma_x(x, y; \tau_1)$, $\sigma_y(x, y; \tau_1)$ и $\tau_{xy}(x, y; \tau_1)$, вызванные в начальный момент $t = \tau_1$ действием стационарного теплового потока, под влиянием ползучести бетона с течением времени затухают, причем интенсивность этого затухания определяется функциями $H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right)$. Поэтому функции $H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right)$ могут быть названы коэффициентами затухания.

Следует отметить, что здесь рассматривается своего рода контактная задача теории ползучести применительно к исследованию термонапряженного состояния бетонных блоков. Поэтому влияние ползучести бетона на термонапряженное состояние бетонного блока имеет ряд характерных особенностей, которыми оно отличается от тех задач теории ползучести, когда на поверхности исследуемого тела заданы только напряжения или перемещения.

Как видно из соотношений (2.43), (2.46)–(2.48), в этом случае закон изменения напряжений в бетонном блоке $\sigma_x^*(x, y; t)$, $\sigma_y^*(x, y; t)$ и $\tau_{xy}^*(x, y; t)$ во времени существенно зависит не только от меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ и возраста τ_1 , но также и от геометрических размеров блока (l и h), от степени связности нижней грани блока с основанием $\frac{E}{4\beta h}$ и от координаты точки (x, y) .

Ниже, в таблице 6, приводятся ряд значений максимальных нормальных напряжений $\sigma_x^*(x, y, t)$ в точке $(0, 0)$, вычисленных в начальный момент воздействия температуры и в последующие моменты времени t , при различных отношениях $\frac{h}{l}$ и величины $\frac{E}{4\beta h}$.

Характеристики для меры ползучести бетона в данном случае приняты следующие

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026;$$

$$E = 2,10^5 \text{ кг/см}^2 \text{ и } \tau_1 = 14 \text{ дней.}$$

Таблица 6

Закон изменения температурных напряжений $\frac{\sigma_x^*(0, 0, t)}{\sigma_x(0, 0)}$ во времени t при различных отношениях $\frac{h}{l}$ и $\frac{E}{4\beta h}$

t в днях	$\frac{E}{4\beta h}$	40		20	
	$\frac{h}{l}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
14		1,0	1,0	1,0	1,0
45		0,703	0,895	0,604	0,815
60		0,600	0,845	0,465	0,738
360		0,583	0,832	0,452	0,722
∞		0,578	0,828	0,449	0,715

$\sigma_x(0, 0)$ — начальное упругое напряжение, вычисленное по формуле (1.34).

В заключение отметим, что аналогичным путем может быть решена также и задача о термонапряженном состоянии бетонных блоков с учетом ползучести бетона, при воздействии нестационарного теплового потока.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 29 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Г. Н. Температурные напряжения и деформации в бетонных массивах на основах теории упругости. Известия НИИГ, том XIII, 1934.
2. Басевич А. З. и Шалиро Г. С. Сборник „Свирьстрой“, 1937.
3. Ниландер Ю. А. Расчет разгрузки массивных бетонных сооружений. Труды IV Всесоюзной конференции по бетону и железобетонным конструкциям, ч. II. Стройиздат, 1949.
4. Маслов Г. Н. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Известия НИИГ, том XXIII, 1938.

6. Маслов Г. Н. Элементарные статические расчеты сооружений на температурные изменения. Известия НИИГ, том XXVI, 1940.
7. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных блоках от экзотермии цемента. Сборник НИИ по строительству, «Исследования, массивные и стержневые конструкции» Министерства строительства предприятий машиностроения, М., 1952.
8. Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольном бетонном блоке. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том VII, № 3, 1954.
9. Индинский А. Ю. и Думанский А. В. О закономерностях растрескивания коры деревьев. ДАН СССР, том 84, № 1, 1952.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, том III, часть 2, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
11. Пановко И. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний. Инженерный сборник АН СССР, том XIII, 1952.
12. Куликов Н. К. Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы. Инженерный сборник АН СССР, том XIII, 1952.
13. Лойцанский Л. Г. Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законами сопротивления. Инженерный сборник АН СССР, том XVIII, 1954.
14. Гопп Ю. А. Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной аппроксимации. Инженерный сборник АН СССР, том XVIII, 1954.
15. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползуещей. Гостехиздат, М., 1952.
16. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, том I, ГТТИ, 1934.

Ն. Խ. Արուտյունյան, Բ. Լ. Աբրահամյան

ՈՒՂԱՆԿՑՈՒՆԱԶԵՎ ԲԵՏՈՆՅԱ ԲԼՈՂՆԵՐՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում քննության է տանված սղղանկյունաձև բետոնյա բլոկի ջերմային լարված վիճակի փերաբերյալ մի խնդիր, երբ բլոկը գրված է միասին հիմնատակի վրա և զանվում է սառցիանար ջերմության սղղանկյուն տակ: Թնդրում հաշվի են առնված սղղի և բլոկի հիմնատակի հետ միացման հարվածության վրա գործող կապակցության ուժերը, բնդ սրում կապակցության ուժերի մեծությունը և բաշխման օրենքը բլոկի ու հիմնատակի միացման հարվածության վրա կախված են խնդրի բլոկի ջերմային վիճակից, աշնդիս էլ նրա հիմնատակի հետ միացման բնույթից:

Առաջին գլխում արվում է ջերմ-առաձգական խնդրի լուծումը աշնդի բլոկի համար, հիմնվելով հարթ հատվածքների հիպոթեզի վրա: Երկրորդ գլխից նվիրված է նույն բլոկի ջերմային լարվածության վիճակի հետազոտման խնդրին, առանց հարթ հատվածքների հիպոթեզի օգտագործման՝ խնդրի բլոկի առաձգական վիճակի դեպքում, աշնդիս էլ բետոնի սղղի ակնասումով: Սառցված արդյունքների հիման վրա ցույց են տրվում հարթ հատվածքների հիպոթեզի կիրառման նախադրությունները տվյալ խնդրի համար, կախված բլոկի չափերից: