ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VIII, № 4, 1955 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

К теории некоторых классов целых функций многих переменных

В настоящей работе строится теория некоторых специальных классов целых функций многих переменных и дается их интегральное представление. Для простоты записи изложение результатов проводится для целых функций двух переменных.

1°. Степенной ряд целой функции двух переменных. Если z_1 и z_2 комплексные переменные, то выражение вида

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $\{a_{nm}\}$ — некоторые комплексные числа, называется формальным степенным рядом. Говорят, что формальный степенной ряд (1.1) представляет целую функцию двух переменных z_1 и z_2, если он сходится при всех значениях $|z_1| < +\infty$ и $|z_2| < +\infty$.

Известна следующая простая лемма, доказательства которой мы приводим для полноты изложения.

Лемма 1. Для того, чтобы ряд (1.1) представлял целую функцию от переменных z_1 и z_2, необходимо и достаточно, чтобы имели

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|} = 0. \tag{1.2}$$

Доказательство. Если (1.2) имеет место, то для любого произвольно большого $R > 0$ существует целое число $N(R)$, такое, что

$$\sqrt[n+m]{|a_{nm}|} \leqslant \frac{1}{2R}, \text{ при } n+m \geqslant N(R). \tag{1.3}$$

Но тогда при $|z_1| \leqslant R$ и $|z_2| \leqslant R$ будем иметь

$$\left| \sum_{n+m>N}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m \right| \leqslant \sum_{n+m>N}^{\infty} |a_{nm}| R^{n+m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n+m>N}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} < \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} = 4. \tag{1.4}$$

Далее, имеем

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m = \sum_{n+m<N} a_{nm} z_1^n z_2^m + \sum_{n+m>N} a_{nm} z_1^n z_2^m,$$

откуда, в силу (1.4), следует, что ряд (1.1) абсолютно сходится при $|z_1| < R$ и $|z_2| < R$. Но $R > 0$ — произвольно большое число, поэтому ряд (1.1) представляет целую функцию от переменных z_1 и z_2.

Обратно, пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$$

есть целая функция от переменных z_1 и z_2, тогда, очевидно, имеем:

$$a_{nm} = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|z_1|=R} \int\limits_{|z_2|=R} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} dz_1 dz_2, \ (R > 0),$$

откуда следует оценка

$$|a_{nm}| \leq \frac{M(R)}{R^{n+m}},$$

где

$$M(R) = \max_{|z_1|=|z_2|=R} |f(z_1, z_2)|. \tag{1.5}$$

Из (1.5) вытекает

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|} \leq \frac{1}{R},$$

откуда при $R \to +\infty$ получим утверждение (1.2) леммы.

2°. *Целые функции конечного порядка. Функции порядка* (ρ_1, ρ_2).

Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция от двух переменных z_1 и z_2. Рассмотрим функцию

$$M_f(r_1, r_2) = \max_{|z_1|=r_1, |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|, \tag{2.1}$$

называя ее модуль-максимумом целой функции $f(z_1, z_2)$.

Из принципа максимума для аналитических функций многих переменных следует, что если функция $f(z_1, z_2)$ не постоянна относительно какой-либо из переменных z_1 или z_2, то

1) $M_f(r_1', r_2) > M_f(r_1, r_2)$, если $r_1' > r_1$,

2) $M_f(r_1, r_2') > M_f(r_1, r_2)$, если $r_2' > r_2$,

и, следовательно, (2.1')

3) $M_f(r_1', r_2') > M_f(r_1, r_2)$, если $r_1' > r_1$ и $r_2' > r_2$.

Определение 1. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ *имеет конечный порядок (по обеим переменным* z_1 *и* z_2 *), если существуют постоянные числа* $k_1>0$, $\mu_1>0$ *и* $k_2>0$ $\mu_2>0$, *такие, что*

1. Для любого фиксированного значения $r_2 \geqslant 0$ *существует число* $R_1=R_1(k_1, \mu_1, r_2)$, *такое, что*

$$M_f(r_1, r_2)<e^{k_1 r_1^{\mu_1}}, \quad при \quad r_1 \geqslant R_1. \tag{2.2}$$

2. Для любого фиксированного значения $r_1 \geqslant 0$ *существует число* $R_2=R_2(k_2, \mu_2, r_1)$, *такое, что*

$$M_f(r_1, r_2)<e^{k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad при \quad r_2 \geqslant R_2. \tag{2.3}$$

Заметим, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок, т. е. если для нее при некоторых значениях $\mu_1>0$, $k_1>0$ и $\mu_2>0$, $k_2>0$ имеют место оценки вида (2.2) и (2.3), то при $\mu_1'>\mu_1$ и $\mu_2'>\mu_2$ одновременно будем иметь также

а) при любом $r_2 \geqslant 0$

$$M_f(r_1, r_2)<e^{r_1^{\mu_1'}}, \quad при \ r_1 \geqslant R_1'(\mu_1', r_2); \tag{2.2'}$$

б) при любом $r_2 \geqslant 0$

$$M_f(r_1, r_2)<e^{r_2^{\mu_2'}}, \quad при \ r_2 \geqslant R_2'(\mu_2', r_1). \tag{2.3'}$$

Из семейства целых функций конечного порядка выделим специальный подкласс целых функций конечного порядка класса A.

Определение 2. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ *конечного порядка принадлежит к классу A, если всегда из оценок вида (2.2) и (2.3) следует, что существует число* $R=R(k_1, \mu_1, k_2, \mu_2)$, *такое, что*

$$M_f(r_1, r_2)<e^{k_1 r_1^{\mu_1}+k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad при \quad r_1, r_2 \geqslant R. \tag{2.4}$$

Следует отметить, что целые функции класса A составляют собственную часть класса целых функций конечного порядка. Действительно, рассмотрим целую функцию $f(z_1, z_2)=e^{z_1 z_2}$, для которой, очевидно, $M_f(r_1, r_2)=e^{r_1 r_2}$. Эта функция конечного порядка, так как

1) для любого p $(1<p<2)$

$$e^{r_1 r_2}<e^{r_1^p}, \quad при \ r_1 \geqslant R_1(p, r_2);$$

2) для любого p $(1<p<2)$

$$e^{r_1 r_2}<e^{r_2^p}, \quad при \ z_2 \geqslant R_2(p, r_1).$$

Однако эта функция не принадлежит к классу A, так как неравенство вида

$$e^{r_1 r_2}<e^{r_1^p+r_2^p}$$

не может выполняться, например, для всех достаточно больших $r_1 = r_2$.

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок, тогда для нее существуют постоянные числа $\mu_1' > 0$ и $\mu_2' > 0$, такие, что выполняются неравенства вида (2.2′) и (2.3′) для ее модуль-максимума $M_f(r_1, r_2)$. Рассмотрим нижние грани тех значений μ_1' и μ_2', для которых соответственно имеют место неравенства вида (2.2′) и (2.3′). Итак, пусть

$$\rho_1 = \inf \mu_1' \geqslant 0, \qquad \rho_2 = \inf \mu_2' \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Назовем числа ρ_1 и ρ_2 соответственно *порядками* целой функции $f(z_1, z_2)$ относительно переменных z_1 и z_2.

Из определения чисел ρ_1 и ρ_2 следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядки ρ_1 и ρ_2 относительно переменных z_1 и z_2, тогда

1. Для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и любого $r_2 \geqslant 0$ существует число $R_1(\varepsilon_1, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1 + \varepsilon}}, \text{ при } r_1 \geqslant R_1(\varepsilon, r_2). \tag{2.6}$$

Кроме того, существует, по крайней мере, одно значение $r_2 = r_2^0(\varepsilon)$ и соответствующие сколь-угодно большие значение $r_1 : \{ r_{1i} \}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_{1i}, r_2^0(\varepsilon)) > e^{r_{1i}^{\rho_1 - \varepsilon}}.$$

Но тогда из свойств (2.1′) функции $M_f(r_1, r_2)$ будет следовать, что

$$M_f(r_{1i}, r_2) > e^{r_{1i}^{\rho_1 - \varepsilon}}, \text{ при } r_2 \geqslant r_2^0(\varepsilon). \tag{2.6′}$$

2. Для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и любого $r_1 \geqslant 0$ существует число $R_2(\varepsilon, r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_2^{\rho_2 + \varepsilon}}, \text{ при } r_2 \geqslant R_2(\varepsilon, r_1). \tag{2.7}$$

Кроме того, существует такое значение $r_1 = r_1^0(\varepsilon)$ и сколько угодно большие значения $r_2 : \{ r_{2k} \}$, что

$$M_f(r_1, r_{2k}) > e^{r_{2k}^{\rho_2 - \varepsilon}}, \text{ при } r_1 \geqslant r_1^0(\varepsilon). \tag{2.7′}$$

Из свойств (2.1) функции $M_f(r_1, r_2)$ легко следует, что утверждения 1 и 2 соответственно эквивалентны следующим

1′ $$\varlimsup_{r_1 \to \infty} \left\{ \varlimsup_{r_1 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1, \tag{2.8}$$

2′ $$\varlimsup_{r_1 \to \infty} \left\{ \varlimsup_{r_2 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2. \tag{2.9}$$

Таким образом, свойства 1 и 2 или, что то же самое, свойства 1′ и 2′ не только необходимы, но и достаточны для того, *чтобы целая функция* $f(z_1, z_2)$ *имела порядки* ρ_1 *и* ρ_2 *соответственно по переменным* z_1 и z_2.

Определение 3. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ *имеет порядок* (ρ_1, ρ_2), если

1) $f(z_1, z_2) \in A$.

2) $f(z_1, z_2)$ *имеет порядки* ρ_1 *и* ρ_2 *соответственно по переменным* z_1 *и* z_2.

Из определения следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2), то функция $M_f(r_1, r_2)$, кроме свойств 1 и 2 ($1'$ и $2'$), обладает также свойством

3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1+\varepsilon} + r_2^{\rho_2+\varepsilon}}, \quad r_1, r_2 > R(\varepsilon). \tag{2.10}$$

Покажем, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2), где $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$ (в дальнейшем это обстоятельство будем обозначать так $(\rho_1, \rho_2) > 0$), то

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \tag{2.11}$$

Действительно, из свойства 3 функции $M_f(r_1, r_2)$ следует, что при данных $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})} \leq 1. \tag{2.12}$$

Далее, если $r_1 \geq 1$ и $r_2 \geq 1$, $\gamma = \max(\mu_1, \mu_2)$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, тогда имеем

$$\frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} \leq \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} = \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})} \cdot \frac{\log(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})}.$$

Отсюда и из (2.12) следует

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} \leq \varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})}. \tag{2.13}$$

Обозначая $r_1 + r_2 = R$, очевидно, получим оценку

$$\frac{\log\left(\frac{R}{2}\right)^{\gamma}}{\log(2R^{\rho})} \leq \frac{\log(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} \leq \frac{\log(2R^{\gamma})}{\log\left(\frac{R}{2}\right)^{\rho}},$$

откуда следует, что

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} = \frac{\gamma}{\rho}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что существует

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = a \leq \frac{\gamma}{\rho} < +\infty. \tag{2.15}$$

Таким образом, нужно установить, что $a=1$. С этой целью покажем сначала, что предположение $a>1$ приводит к противоречию. Итак, пусть $a>1$. Положим, что $1<a''<a'<a$, тогда из (2.15) будет следовать, что существуют бесконечно возрастающие последовательности $\{r_{1i}\}$ и $\{r_{2k}\}$, такие, что

$$\frac{\log_2 M_f(r_{1i}, r_{2k})}{\log(r_{1i}^{\rho_1}+r_{2k}^{\rho_2})}>a',$$

так что

$$M_f(r_{1i}, r_{2k})>e^{\left(r_{1i}^{\rho_1}+r_{2k}^{\rho_2}\right)^{a'}}, \quad (i, k=1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Фиксируя значение $k=k_0$, получим, что

$$M_f(r_{1i}, r_{2k_0})>e^{r_{1i}^{a''\rho_1}}, \quad \text{при} \quad i\geqslant i_0,$$

а так как при достаточно малом $\varepsilon>0$ $a''\rho_1>\rho_1+\varepsilon$, то это противоречит тому, что функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок ρ_1 относительно переменной z_1, т. е. свойству (2.6) функции $M_f(r_1, r_2)$.

Положим теперь, что $a<1$, тогда если $a<a'<a''<1$, то из (2.15) следует

$$\frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1}+r_2^{\rho_2})}<a', \quad \text{при} \quad r_1, r_2\geqslant R_0,$$

т. е.

$$M_f(r_1, r_2)<e^{\left(r_1^{\rho_1}+r_2^{\rho_2}\right)^{a'}}, \quad \text{при} \quad r_1, r_2\geqslant R_0. \tag{2.17}$$

Из (2.17) получим в силу свойства (2.1′) функции $M_f(r_1, r_2)$

$$M_f(r_1, r_2)<e^{\left(r_1^{\rho_1}+R_0^{\rho_2}\right)^{a'}}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_0, \ 0\leqslant r_2\leqslant R_0.$$

Выберем $R_1\geqslant R_0$ таким образом, чтобы имели

$$\left(r_1^{\rho_1}+R_0^{\rho_2}\right)^{a'}<r_1^{\rho_1 a''}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_1;$$

тогда имеем, что для любого $0\leqslant r_2\leqslant R_0$

$$M_f(r_1, r_2)<e^{r_1^{\rho_1 a''}}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_1. \tag{2.18}$$

Если же $r_2>R_0$ фиксировано, то опять число $R_1>R_0$ можем выбрать так, чтобы опять имело место неравенство

$$\left(r_1^{\rho_1}+r_2^{\rho_2}\right)^{a'}<r_1^{\rho_1}a'', \quad \text{при} \ r_1\geqslant R_1(r_2),$$

т. е. неравенство

$$M_f(r_1, r_2)<e^{\rho_1 a''}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_1(r_2). \tag{2.18′}$$

Из (2.18) и (2.18′) заключаем, что для любого $r_2\geqslant 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2)<e^{r_1^{\rho_1 a''}}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_1(r_2). \tag{2.18″}$$

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\rho_1 a'' < \rho_1 - \varepsilon$, то (2.18″) противоречит свойству (2.6′) функции $M_f(r_1, r_2)$, следовательно, $a = 1$, и равенство (2.11) доказано.

Таким образом, если целая функция имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, то, кроме свойств 1′ и 2′, функция $M_f(r_1, r_2)$ обладает также свойством

3′.
$$\overline{\lim_{r_1, r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \tag{2.11}$$

Но из свойства 3′ следует, что функция $M_f(r_1, r_2)$ обладает указанным выше свойством 3, поэтому, суммируя вышеизложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ *имела порядок* $(\rho_1, \rho_2) > 0$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

а)
$$\overline{\lim_{r_2 \to \infty}} \left\{ \overline{\lim_{r_1 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1; \tag{2.19}$$

б)
$$\overline{\lim_{r_1 \to \infty}} \left\{ \overline{\lim_{r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2; \tag{2.20}$$

в)
$$\overline{\lim_{r_1, r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \tag{2.21}$$

3°. Целые функции порядка (ρ_1, ρ_2) *и типа* (σ_1, σ_2).

Переходим к определению целых функций порядка (ρ_1, ρ_2) и конечного типа.

Определение 4. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ *порядка* (ρ_1, ρ_2) *имеет конечный тип по обеим переменным* z_1 *и* z_2, *если существуют постоянные числа* $k_1 > 0$ *и* $k_2 > 0$, *такие, что*

1) для любого фиксированного значения $r_2 > 0$ *существует число* $R_1(K_1, r_2)$, *такое, что*

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1}}, \quad \textit{при} \quad r_1 \geq R_1(k_1, r_2); \tag{3.1}$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 \geq 0$ *существует число* $R_2(K_2, r_1)$, *такое, что*

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \textit{при} \quad r_2 \geq R_2(k_2, r_1). \tag{3.2}$$

Рассмотрим нижние грани тех значений k_1 и k_2, для которых соответственно имеют место неравенства вида (3.1) и (3.2).

Итак, пусть

$$\sigma_1 = \inf k_1 \geq 0, \quad \sigma_2 = \inf k_2 \geq 0. \tag{3.3}$$

Назовем числа σ_1 и σ_2 *типами* целой функции $f(z_1, z_2)$ соответственно по переменным z_1 и z_2.

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\rho_1 a'' < \rho_1 - \varepsilon$, то (2.18″) противоречит свойству (2.6′) функции $M_f(r_1, r_2)$, следовательно, $a = 1$, и равенство (2.11) доказано.

Таким образом, если целая функция имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, то, кроме свойств 1′ и 2′, функция $M_f(r_1, r_2)$ обладает также свойством

3′. $$\overline{\lim_{r_1, r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \qquad (2.11)$$

Но из свойства 3′ следует, что функция $M_f(r_1, r_2)$ обладает указанным выше свойством 3, поэтому, суммируя вышеизложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий

а) $$\overline{\lim_{r_2 \to \infty}} \left\{ \overline{\lim_{r_1 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1; \qquad (2.19)$$

б) $$\overline{\lim_{r_1 \to \infty}} \left\{ \overline{\lim_{r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2; \qquad (2.20)$$

в) $$\overline{\lim_{r_1, r_2 \to \infty}} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \qquad (2.21)$$

3°. *Целые функции порядка (ρ_1, ρ_2) и типа (σ_1, σ_2).*

Переходим к определению целых функций порядка (ρ_1, ρ_2) и конечного типа.

Определение 4. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имеет конечный тип по обеим переменным z_1 и z_2, если существуют постоянные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, такие, что

1) для любого фиксированного значения $r_2 \geqslant 0$ существует число $R_1(K_1, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1}}, \quad \textit{при} \quad r_1 > R_1(k_1, r_2); \qquad (3.1)$$

2) *для любого фиксированного значения $r_1 \geqslant 0$ существует число $R_2(K_2, r_1)$, такое, что*

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \textit{при} \quad r_2 > R_2(k_2, r_1). \qquad (3.2)$$

Рассмотрим нижние грани тех значений k_1 и k_2, для которых соответственно имеют место неравенства вида (3.1) и (3.2).

Итак, пусть

$$\sigma_1 = \inf k_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 = \inf k_2 \geqslant 0. \qquad (3.3)$$

Назовем числа σ_1 и σ_2 *типами* целой функции $f(z_1, z_2)$ соответственно по переменным z_1 и z_2.

Из определения чисел σ_1 и σ_2 следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имеет типы σ_1 и σ_2 относительно переменных z_1 и z_2, тогда

1. Для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ и любого $r_2 \geqslant 0$ существует число $R_1(\varepsilon, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_1 + \varepsilon) r_1^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_1 \geqslant R_1(\varepsilon, r_2). \tag{3.4}$$

Одновременно существует значение $r_2 = r_2^0(\varepsilon)$ и сколь-угодно большие значения $r_1 : \{r_{1i}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_{1i}, r_2) < e^{(\sigma_1 - \varepsilon) r_{1i}^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_2 \geqslant r_2^0(\varepsilon). \tag{3.4'}$$

2. Для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ и любого $r_1 \geqslant 0$ существует число $R_2(\varepsilon, r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_2 + \varepsilon) r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_2 \geqslant R_2(\varepsilon, r_1). \tag{3.5}$$

Одновременно существует значение $r_1 = r_1^0(\varepsilon)$ и сколь-угодно большие значения $r_2 : \{r_{2k}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_1, r_{2k}) > e^{(\sigma_2 - \varepsilon) r_{2k}^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_1 \geqslant r_1^0(\varepsilon). \tag{3.5'}$$

Однако целая функция $f(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A, поэтому всегда из оценок вида (3.1) и (3.2) следует, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_1, kr_2 \geqslant R(k_1, k_2).$$

Следовательно, можем утверждать также

3. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{(\sigma_1 + \varepsilon) r_1^{\rho_1} + (\sigma_2 + \varepsilon) r_2^{\rho_2}}, \quad r_1, r_2 \geqslant R(\varepsilon). \tag{3.6}$$

Из свойств (2.1) функции $M_f(r_1, r_2)$ следует, что утверждения 1 и 2 соответственно эквивалентны следующим

1'. $$\varlimsup_{r_2 \to \infty} \left\{ \varlimsup_{r_1 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1}} \right\} = \sigma_1, \tag{3.7}$$

2'. $$\varlimsup_{r_1 \to \infty} \left\{ \varlimsup_{r_2 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\rho_2}} \right\} = \sigma_2, \tag{3.8}$$

Покажем теперь, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имеет тип (σ_1, σ_2), то при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ (иначе говоря, при $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$) функция $M_f(r_1, r_2)$, кроме свойств 1' и 2', обладает также свойством

3'. $$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} = 1. \tag{3.9}$$

Действительно, из свойства 3 вытекает, что при данных $k_1 > \sigma_1$ и $k_2 > \sigma_2$

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}} \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Пусть $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ и $k = \max(k_1, k_2)$, тогда очевидно имеем:

$$\frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} \leqslant \frac{1}{\sigma} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2}} = \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}} \cdot \frac{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}}{\sigma (r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{\sigma} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}},$$

откуда, в силу (3.10), вытекает, что

$$\varlimsup_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_2 \sigma_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} = a \leqslant \frac{k}{\sigma} < +\infty. \tag{3.11}$$

Таким образом, нужно установить, что $a = 1$.

С этой целью предположим сперва, что $a > 1$, и положим $1 < a' < a$, тогда из (3.11) следует, что существуют бесконечно возрастающие последовательности $\{r_{1i}\}$ и $\{r_{2k}\}$, такие, что

$$\frac{\log M_f(r_{1i}, r_{2k})}{\sigma_1 r_{1i}^{\rho_1} + \sigma_2 r_{2k}^{\rho_2}} > a',$$

т. е.

$$M_f(r_{1i}, r_{2k}) > e^{a' \sigma_1 r_{1i}^{\rho_1} + a' \sigma_2 r_{2k}^{\rho_2}}, \quad i, k = 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ очевидно имеем $a'\sigma_1 > \sigma_1 + \varepsilon$ и $a'\sigma_2 > \sigma_2 + \varepsilon$, поэтому (3.12) противоречит свойству (3.6) функции $M_f(r_1, r_2)$. Следовательно $a \leqslant 1$. Положим теперь, что $a < 1$, тогда, если $a < a' < 1$, то из (3.11) вытекает, что

$$\frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} < a', \text{ при } r_1, r_2 \geqslant R_0,$$

т. е.

$$M_f(r_1, r_2) < e^{a' \sigma_1 r_1^{\rho_1} + a' \sigma_2 r_2^{\rho_2}}, \text{ при } r_1, r_2 \geqslant R_0. \tag{3.13}$$

Но так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $a'\sigma_1 < \sigma_1 - \varepsilon$ и $a'\sigma_2 < \sigma_2 - \varepsilon$, то (3.13) противоречит свойствам 1 и 2 функции $M_f(r_1, r_2)$. Следовательно, $a = 1$ и таким образом (3.9) доказано.

Очевидно, что свойства 1′, 2′ и 3′ не только необходимы, но они и достаточны для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имела тип (σ_1, σ_2). Отсюда имеем:

Теорема 2. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имела тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) $$\varlimsup_{r_2 \to \infty} \left\{ \varlimsup_{r_1 \to \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1}} \right\} = \sigma_1; \tag{3.14}$$

б)
$$\overline{\lim_{r_1\to\infty}}\left\{\overline{\lim_{r_2\to\infty}}\frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\rho_2}}\right\}=\sigma_2; \tag{3.15}$$

в)
$$\overline{\lim_{r_1, r_2\to\infty}}\frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1}+\sigma_2 r_2^{\rho_2}}=1. \tag{3.16}$$

4°. Коэффициенты Тейлора целой функции порядка $(\rho_1, \rho_2)>0$. Пусть целая функция

$$f(z_1, z_2)=\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m \tag{4.1}$$

при некоторых $\mu_i>0$, $k_i>0$ $(i=1, 2)$ удовлетворяет условиям:

1) для любого фиксированного значения $r_2\geqslant 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M(r_1, r_2)<e^{k_1 r_1^{\mu_1}}, \quad \text{при} \quad r_1\geqslant R_1(r_2); \tag{4.2}$$

2) для любого фиксированного значения $r_1\geqslant 0$ существует число $R_2(r_1)$, такое, что

$$M(r_1, r_2)<e^{k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при} \quad r_2>R_2(r_1); \tag{4.3}$$

3) существует число R такое, что

$$M(r_1, r_2)<e^{k_1 r_1^{\mu_1}+k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при} \quad r_1, r_2\geqslant R. \tag{4.4}$$

Заметим, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2), то для нее имеют место все условия 1), 2) и 3), если там положить $k_1=k_2=1$, $\mu_1=\rho_1+\varepsilon$, $\mu_2=\rho_2+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ произвольно малое, но фиксированное число. Если же функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок (ρ_1, ρ_2) и конечный тип (σ_1, σ_2), то для нее имеют место все условия 1), 2) и 3), если положить $\mu_1=\rho_1$, $\mu_2=\rho_2$, $k_1=\sigma_1+\varepsilon$, $k_2=\sigma_2+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ произвольно малое фиксированное число.

Докажем основную лемму, необходимую нам и в этом и в следующем пунктах.

Лемма 2. *Пусть* $f(z_1, z_2)$ *целая функция от переменных* z_1 *и* z_2, *тогда*

а) *если* $f_1(z_1, z_2)$ *обладает свойством* 1), *то*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\frac{n\log n}{\log\dfrac{1}{|a_{nm}|}}\leqslant\mu_1 \tag{4.5}$$

и при любом $r_1>0$

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{|a_{nm}|\left(\frac{n}{e\mu_1 K_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^m}\leqslant 1; \tag{4.5'}$$

б) *если* $f(z_1, z_2)$ *обладает свойством* 2), *то*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant \mu_2 \tag{4.6}$$

и при любом $r_1 > 0$

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|\left(\frac{m}{e\mu_2 K_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}} r_1^n} \leqslant 1, \tag{4.6'}$$

в) *если* $f(z_1, z_2)$ *обладает свойством* 3), *то*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{n}{\mu_1}\log n + \frac{m}{\mu_2}\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant 1, \tag{4.7}$$

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|\left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}}\left(\frac{m}{e\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}} \leqslant 1. \tag{4.7'}$$

Доказательство. Из (4.1) при любых $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ получим:

$$a_{nm} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|z_1|=r_1}\int\limits_{|z_2|=r_2} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}}\, dz_1\, dz_2, \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда следует оценка

$$|a_{nm}| \leqslant \frac{M_f(r_1, r_2)}{r_1^n r_2^m}. \tag{4.8}$$

Выберем теперь

$$r_1 = \left(\frac{n}{\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}}; \tag{4.9}$$

тогда при данном $r_2 > 0$, при $n > N_1 = N(R_1)$, из (4.2) получим

$$M_f(r_1, r_2) < e^{\frac{n}{\mu_1}}, \quad \text{при} \quad n > N_1(r_2). \tag{4.10}$$

Из (4.2) и (4.10) следует, что при всяком $r_2 > 0$

$$|a_{nm}| < \left(\frac{e\mu_1 k_1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^{-m}, \text{ при } n > N_1(r_2), \ m = 0, 1\ldots, \tag{4.11}$$

а из (4.8) имеем также

$$|a_{nm}| \leqslant M_f(1, r_2)\, r_2^{-m}, \text{ при } 0 \leqslant n < N(r_2) \ m = 0, 1, \ldots \tag{4.11'}$$

Из оценок (4.11) и (4.11′) вытекает, что

$$\overline{\lim_{\substack{n+m\to\infty \\ n>N_1(r_2)}}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 K_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^m} \leqslant 1, \tag{4.12}$$

$$\overline{\lim_{\substack{n+m\to\infty \\ n\leqslant N(r_2)}}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 K_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^m} \leqslant 1. \tag{4.12'}$$

Предельные соотношения (4.12) и (4.12′) эквивалентны утверждению (4.5′) леммы.

Утверждение (4.5) просто следует из (4,5′), если взять логарифм выражения, стоящего под знаком предела в (4.5′), разделить его на $\frac{1}{n+m}\log\frac{1}{|a_{nm}|}$ и учесть то обстоятельство, что по лемме 1

$$\lim_{n+m\to\infty} \frac{1}{n+m}\log\frac{1}{|a_{nm}|} = \infty. \tag{4.13}$$

Утверждение в) леммы получается вполне аналогичным рассуждением, если учесть свойство 2) функции $M_f(r_1, r_2)$.

Для доказательства утверждения с) леммы в неравенстве (4.8) положим

$$r_1 = \left(\frac{n}{\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}}, \quad r_2 = \left(\frac{m}{\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}; \tag{4.14}$$

тогда при $n \geqslant N_1(R)$ и $m \geqslant N_2(R)$ из (4.4) и (4.3) получим

$$|a_{nm}| < \left(\frac{e\mu_1 k_1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{e\mu_2 k_2}{m}\right). \tag{4.15}$$

Из (4.3) вытекает, что

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{m}{e\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}} \leqslant 1. \tag{4.16}$$

Из (4.16), (4.5′), (при $r_2 = 1$) и (4.6′) (при $r_1 = 1$) следует

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{m}{e\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}} \leqslant 1,$$

т. е. утверждение (4.7′) леммы.

Наконец, утверждение (4.7) следует из (4.7′), если учесть (4.13). Лемма полностью доказана.

Лемма 3. Пусть $\{a_{nm}\}$, $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ — *некоторая бесконечная таблица комплексных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{n}{\mu_1'}\log n + \frac{m}{\mu_2'}}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant 1. \quad (\mu_1', \mu_2' > 0). \tag{4.17}$$

Тогда ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm}\, z_1^n\, z_2^m$$

определяет некоторую целую функцию от переменных z_1 *и* z_2 *удовлетворяющую при любых* $\mu_1 > \mu_1'$ *и* $\mu_2 > \mu_2'$ *условиям вида* 1), 2) *и* 3).

Доказательство. Пусть $1 < \alpha_1 < \alpha$, тогда из (4.17) следует, что

$$|a_{nm}| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha_1\mu_1'}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_1\mu_2'}}, \text{ при } n+m \geqslant N(\alpha_1). \tag{4.18}$$

Из (4.19) получим:

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant \sum_{n+m\leqslant N} |a_{nm}|\,|z_1|^n\,|z_2|^m +$$

$$+ \sum_{n+m>N} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha_1\mu_1'}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_2\mu_2'}} |z_1|^n\,|z_2|^m <$$

$$< \sum_{n+m\leqslant N} |a_{nm}|\,|z_1|^n\,|z_2|^m +$$

$$+ \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha_1\mu_1'}} |z_1|^n\right\} \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_1\mu_2'}} |z_2|^m\right\}. \tag{4.19}$$

Но в теории целых функций доказывается, что если

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n, \quad (\mu > 0), \tag{4.20}$$

то для любого $r > 0$ при $r > R(\varepsilon)$

$$\varphi(r) < e^{\left(\frac{1}{\mu e} + \varepsilon\right) r^{\mu}}. \tag{4.21}$$

Отсюда и из оценки (4.19) в силу того, что $1 < \alpha_1 < \alpha$, получим, что

1) для любого фиксированного значения $r_2 \geqslant 0$ существует число $R_1(\alpha, r_2)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\alpha\mu_1}}, \text{ при } r_1 \geqslant R_1(\alpha, r_2); \tag{4.22}$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 \geqslant 0$ существует число $R_2(\alpha, r_1)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_2^{\alpha\mu_2}}, \text{ при } r_2 \geqslant R_2(\alpha, r_1); \tag{4.23}$$

3) существует число $R(\alpha)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\alpha\mu_1} + r_2^{\alpha\mu_2}}, \text{ при } r_1, r_2 \geqslant R(\alpha). \tag{4.24}$$

Так как $\alpha > 1$ была произвольной, то лемма доказана.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что если функция $f(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A и имеет порядок (ρ_1, ρ_2), то $\rho_1 \leqslant \mu_1'$ и $\rho_2 \leqslant \mu_2'$.

Докажем теперь следующую теорему, характеризующую класс целых функций порядка (ρ_1, ρ_2).

Теорема 3. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\{a_{nm}\}$ ее разложения в ряд Тейлора (4.1) удовлетворяли следующим трем условиям:

1)
$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1, \tag{4.25}$$

2)
$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{m\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_2, \tag{4.26}$$

3)
$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{n}{\rho_1}\log n + \frac{m}{\rho_2}\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1. \tag{4.27}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$. Пусть $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$ — любые числа; тогда очевидно, что существует число R_0, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2}}, \text{ при } r_1, r_2 > R_0.$$

Отсюда по лемме 2 вытекает, что

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{n}{\mu_1}\log n + \frac{m}{\mu_2}\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant 1 \tag{4.28}$$

при любых $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$.

Обозначая $\min\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) = \alpha$, из (4.28) получим

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n + m\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant \frac{1}{\alpha}. \tag{4.28'}$$

Пусть $x > 0$ и $y > 0$, тогда из (4.28') следует, что

$$\Phi(x, y) = \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{xn\log n + ym\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant \frac{\max(x, y)}{\alpha} < +\infty. \quad (4.29)$$

Далее, легко видеть, что

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\mu_1}\right) n\log n + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) m\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}}. \quad (4.30)$$

Следовательно, из (4.29) и (4.30) получим

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \max\left\{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\mu_1}\right), \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\mu_2}\right)\right\}. \quad (4.30')$$

Замечая, что по (4.28)

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) \leqslant 1, \quad \text{при любых } \mu_1 > \rho_1, \ \mu_2 > \rho_2,$$

из (4,30') заключаем

$$\Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) = \lim_{\substack{\mu_1\to\rho_1 \\ \mu_2\to\rho_2}} \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) = \omega \leqslant 1,$$

и таким образом утверждение 3) теоремы будет доказано, если мы покажем, что $\omega = 1$.

Предположим, что

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{1}{\rho_1} n\log n + \frac{1}{\rho_2} m\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} = \omega < \omega' < 1,$$

тогда, очевидно, будем иметь

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\frac{1}{\rho_1\omega'} n\log n + \frac{1}{\rho_2\omega'} m\log m}{\log\frac{1}{|a_{nm}|}} < 1. \quad (4.31)$$

Так как функция $f(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A и имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, то из (4.31) в силу замечания, приведенного в конце доказательства леммы 3, следует, что $\rho_1 \leqslant \rho_1\omega'$ и $\rho_2 \leqslant \rho_2\omega'$. Это значит, что $\omega' \geqslant 1$, что противоречит допущению $\omega' < 1$. Следовательно, формула (4.27) доказана.

Таким образом, нам остается установить справедливость формул (4.25) и (4.26). Докажем лишь справедливость формулы (4.25), так как формула (4.26), устанавливается вполне аналогичным рассуждением.

Пусть $\mu_1 > \rho_1$ произвольное, но фиксированное число, тогда по формуле (4.5) леммы 2

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant \mu_1.$$

Но $\mu_1 > \rho_1$ произвольна, поэтому

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1' \leqslant \rho_1. \tag{4.32}$$

Таким образом, остается установить, что $\rho_1' = \rho_1$. Положим, что

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1' < \rho_1^* < \rho_1,$$

тогда очевидно, что в силу (4.13) при любом фиксированном $r_2 > 0$ будем иметь также

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|(2r_2)^m}} = \rho_1' < \rho_1^*. \tag{4.32'}$$

Но из (4.32') следует, что

$$|a_{nm}| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} \frac{1}{(2r_2)^m}, \text{ при } n+m \geqslant N_0(r_2),$$

откуда получим оценку

$$M(r_1, r_2) \leqslant \sum_{n+m<N_0} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + \sum_{n+m\geqslant N_0} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} r_1^n \frac{1}{2m} <$$

$$< \sum_{n+m<N_0} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} r_1^n. \tag{4.33}$$

Из (4.33) в силу оценки (4.21) следует, что для любого ρ_1^* $(\rho_1' < \rho_1^* < \rho_1)$

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1^*}}, \text{ при } r_1 \geqslant R_1(\rho_1^*, r_2). \tag{4.34}$$

Но по условию теоремы функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок $\rho_1 > \rho_1^*$ относительно переменной z_1, а оценка вида (4.34), справедливая, очевидно, при любом $r_2 > 0$, противоречит этому. Отсюда следует, что $\rho_1' = \rho_1$. Таким образом необходимость условий 1), 2), 3) доказана.

Достаточность. Пусть для бесконечной таблицы $\{a_{nm}\}$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ комплексных чисел имеют место утверждения 1), 2) и 3) теоремы.

Во-первых, из (4.27) в силу леммы 3 следует, что функция $f(z_1, z_2)$, определенная рядом (1.1), при любых $\rho_1' > \rho_1$ и $\rho_2' > \rho_2$ удовлетворяет условиям:

1) для любого фиксированного значения $r_2 \geqslant 0$ существует число $R_1(\rho_1', r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1'}} \quad \text{при} \quad r_1 \geqslant R_1(\rho_1', r_2); \tag{4.35}$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 \geqslant 0$ существует число $R_2(\rho_2', r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_2^{\rho_2'}} \quad \text{при} \quad r_2 \geqslant R_2(\rho_2', r_1); \tag{4.36}$$

3) существует число $R(\rho_1', \rho_2')$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1'} + r_2^{\rho_2'}} \quad \text{при} \quad r_1, r_2 \geqslant R(\rho_1', \rho_2'). \tag{4.37}$$

Покажем, что оценка вида (4.35) не может иметь места, если заменить число ρ_1' любым числом $\rho_1'' < \rho_1$.

Действительно, тогда в силу леммы 2(а) имели бы

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leqslant \rho_1'' < \rho_1,$$

что противоречило бы условию (4.25) теоремы. Аналогично из условия (4.26) будет следовать, что в оценке (4.36) число ρ_2' не может быть заменено числом $\rho_2'' < \rho_2$.

Из этих двух замечаний следует, что функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядки ρ_1 и ρ_2 относительно переменных z_1 и z_2 соответственно. Но тогда (4.37) означает, что $f(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A и, следовательно, имеет порядок (ρ_1, ρ_2).

5°. *Коэффициенты Тейлора целой функции порядка* $(\rho_1, \rho_2) > 0$ *и типа* $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 4. Если таблица неотрицательных чисел $\{x_{nm}\}$, $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{x_{nm}} < +\infty, \tag{5.1}$$

то при любых $u \geqslant 0, v \geqslant 0$ *существует функция*

$$\varphi(u, v) = \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{x_{nm} u^n v^m} < +\infty, \tag{5.2}$$

непрерывная в области $(0 < u < +\infty, 0 < v < +\infty)$.

Доказательство. Из (5.1) следует, что

$$\varphi(1, 1) = \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[m+n]{x_{nm}} < +\infty. \tag{5.1'}$$

Обозначая $\max(u, v) = w$, имеем:

$$\sqrt[n+m]{x_{nm} u^n v^m} \leqslant w \sqrt[n+m]{x_{nm}},$$

откуда вытекает, что существует

$$\varphi(u, v) \leqslant w\varphi(1, 1). \tag{5.2'}$$

Докажем теперь непрерывность функции $\varphi(u, v)$ в области $0 < u < +\infty$, $0 < v < +\infty$).

Пусть (u_0, v_0) — любая фиксированная точка указанной области, тогда, очевидно, имеем:

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| \leqslant \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{x_{nm}} \left| \sqrt[n+m]{u^n v^m} - \right.$$

$$\left. - \sqrt[n+m]{u_0^n v_0^m} \right| = \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{x_{nm} u_0^n v_0^m} \left| \sqrt[n+m]{\left(\frac{u}{u_0}\right)^n \left(\frac{v}{v_0}\right)^m} - 1 \right|. \tag{5.3}$$

Для данного ε $(0 < \varepsilon < 1)$ выберем числа u и v настолько близкими к числам u_0 и v_0 соответственно, чтобы имели место неравенства

$$\sqrt{1 - \varepsilon} < \frac{u}{u_0} < \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad \sqrt{1 - \varepsilon} < \frac{v}{v_0} < \sqrt{1 + \varepsilon}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) получим

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n+m]{\left(\frac{u}{u_0}\right)^n \left(\frac{v}{v_0}\right)^m} < 1 + \varepsilon,$$

откуда и из (5.3) следует, что при выполнении условий (5.4)

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| \leqslant \varepsilon \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{x_{nm} u_0^n v_0^m} = \varepsilon\varphi(u_0, v_0).$$

Это значит, что

$$\lim_{(u, v)\to(u_0, v_0)} \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0),$$

и лемма доказана.

Теорема 4. Если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имеет тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, то коэффициенты $\{a_{nm}\}$ ее разложения в ряд Тейлора удовлетворяют условиям

$$\text{a)} \quad \sup_{0 < r_2 < +\infty} \left\{ \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} r_2^m} \right\} = 1, \tag{5.5}$$

$$\text{в)} \quad \sup_{0 < r_1 < +\infty} \left\{ \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}} r_1^n} \right\} = 1, \tag{5.6}$$

$$\text{c)} \quad \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}}} = 1. \tag{5.7}$$

Доказательство. По лемме 2 в данном случае утверждения (4.5′), (4.6′) и (4.7′) имеют место при $\mu_1 = \rho_1$, $\mu_2 = \rho_2$ и при любых $k_1 > \sigma_1$ и $k_2 > \sigma_2$. Отсюда по лемме 4 следует, что утверждения (4.5′), (4.6′) и (4.7′) справедливы при $\mu_1 = \rho_1$, $\mu_2 = \rho_2$, $K_1 = \sigma_1$, $K_2 = \sigma_2$. Следовательно, мы должны иметь:

$$\sup_{0 < r_2 < +\infty} \left\{ \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} r_2^m} \right\} = \alpha \leqslant 1, \qquad (5.5')$$

$$\sup_{0 < r_1 < +\infty} \left\{ \overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}} r_1^n} \right\} = \beta \leqslant 1, \qquad (5.6')$$

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{n}{\rho_2}}} = \gamma \leqslant 1. \qquad (5.7')$$

Таким образом, остается установить, что $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Покажем сперва, что предположение $\gamma < 1$ приводит к противоречию. Действительно, если $\gamma < 1$, то из (5.7′) вытекает, что для любого γ_1 $(\gamma < \gamma_1 < 1)$ существует целое число $N(\gamma_1)$, такое, что

$$|a_{nm}| < \left[\frac{e\rho_1 \sigma_1 \gamma_1^{\rho_1}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho_1}} \left[\frac{e\rho_2 \sigma_2 \gamma_1^{\rho_2}}{m}\right]^{\frac{m}{\rho_2}}, \text{ при } n + m > N(\gamma_1). \qquad (5.8)$$

Из (5.8), как при доказательстве леммы 3, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon, \gamma_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_1 \gamma_1^{\rho_1} + \varepsilon) r_1^{\rho_1} + (\sigma_2 \gamma_1^{\rho_2} + \varepsilon) r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_1, r_2 \geqslant R(\varepsilon, \gamma_1). \qquad (5.9)$$

Но по условию функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Поэтому из (5.9) следует, что

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_1 \gamma_1^{\rho_1} + \varepsilon, \quad \sigma_2 \leqslant \sigma_2 \gamma_1^{\rho_2} + \varepsilon.$$

Отсюда в силу производительности $\varepsilon > 0$, получим $\gamma_1 \geqslant 1$, что противоречит допущению $\gamma_1 < 1$.

Предположим теперь, что $\alpha < 1$, тогда в силу (5.5′) для любого α_1 $(\alpha < \alpha_1 < 1)$ существует целое число $N(\alpha_1)$, не зависящее от $r_2 > 0$, и такое, что

$$|a_{nm}| < \left[\frac{e\rho_1 \sigma_1 \alpha_1^{\rho_1}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho_1}} \left[\frac{\alpha_1}{r_2}\right]^m, \quad \text{при } n + m \geqslant N(\alpha_1). \qquad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что при любом $r_2 > 0$

$$M_f(r_1, r_2) \leqslant \sum_{n+m<N} |a_{nm}| \, r_1^n \, r_2^m +$$

$$+\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e\rho_1\,\sigma_1\alpha_2^{\rho_1}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho_1}}\right\}\cdot\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_1^m\right\}. \qquad (5.11)$$

Из (5.11) в силу оценки (4.21) вытекает, что для любого $\alpha_1<\alpha_2<1$ и $r_2\geqslant 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2)<e^{\sigma_1\alpha_2^{\rho_1}r_1^{\rho_1}}, \text{ при } r_1\geqslant R_1. \qquad (5.12)$$

Но функция $f(z_1, z_2)$ по условию имела тип $\sigma_1>0$ относительно переменной z_1, и поэтому $\sigma_1\leqslant\sigma_1\alpha_2^{\rho_1}$, откуда следует, что $\alpha_2\geqslant 1$, что противоречит условию $\alpha_2<1$.

Таким образом, доказано, что $\alpha=1$. Наконец, утверждение $\beta=1$ устанавливается вполне аналогичным образом.

6°. Преобразование Бореля и интегральное представление целых функций порядка $(\rho_1, \rho_2)>0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2)>0$.

Известно, что целая функция типа Миттаг-Лефлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}, \ (\mu>0,\ \rho>0) \qquad (6.1)$$

имеет порядок ρ и тип 1.

Легко видеть, что если $|\zeta_k|=\sigma_k>0$ $(k=1, 2)$, то целая функция

$$f(z_1, z_2)=E_{\rho_1}(\zeta_1 z_1;\mu_1)\,E_{\rho_2}(\zeta_2 z_2;\mu_2) \qquad (6.2)$$

от переменных z_1 и z_2 имеет порядок (ρ_1, ρ_2) и тип (σ_1, σ_2).

В настоящем пункте мы покажем, что произвольная целая функция порядка $(\rho_1, \rho_2)>0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2)>0$ представляет собой предел линейных комбинаций вида (6.2).

Пусть $f(z_1, z_2)$ целая функция порядка $(\rho_1, \rho_2)>0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2)>0$. Представим ее рядом Тейлора в виде

$$f(z_1, z_2)=\sum_{n, m=0}^{\infty}\frac{b_{nm}\,z_1^n z_2^m}{\Gamma(\mu_1+n\rho_1^{-1})\,\Gamma(\mu_2+m\rho_2^{-1})} \ (\mu_1>0,\ \mu_2>0). \qquad (6.3)$$

По теореме 4 имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{\frac{|b_{nm}|}{\Gamma(\mu_1+n\rho_1^{-1})\,\Gamma(\mu_2+m\rho_2^{-1})}\left(\frac{n}{e\rho_1\sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}}\left(\frac{m}{e\rho_2\sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}}}=1, \qquad (6.4)$$

откуда по формуле Стирлинга следует, что

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{|b_{nm}|\,\sigma_1^{-\frac{n}{\rho_1}}\,\sigma_2^{-\frac{m}{\rho_2}}}=1. \qquad (6.4')$$

Из соотношения (6.4') вытекает, что функция

$$g(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{b_{nm}}{z_1^{m+1} z_2^{n+1}} \tag{6.5}$$

голоморфна в области $|z_1| > \sigma_1^{1/\rho_1}, |z_2| > \sigma_2^{1/\rho_2}$.

Назовем $g(z_1, z_2)$ функцией $B_{\rho_1 \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, ассоциированной с целой функцией $f(z_1, z_2)$

Если l_k $(k = 1, 2)$ произвольный замкнутый контур, охватывающий круг $|\zeta_k| \leq \sigma_k^{1/\rho_k}$ плоскости ζ_k (в частности, за l_k можно взять любую окружность $|z_k| = r_k > \sigma_k^{1/\rho_k}$), то из (6.5) следует, что

$$b_{nm} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} g(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_1^n \zeta_2^m d\zeta_1\, d\zeta_2 \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.6}$$

Из (6,1) и (6.6) получим следующее интегральное представление целой функции $f(z_1, z_2)$

$$f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} E_{\rho_1}(z_1 \zeta_1; \mu_1)\ E_{\rho_2}(z_2 \zeta_2; \mu_2)\ g(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Любая целая функция $f(z_1, z_2)$ *порядка* $(\rho_1, \rho_2) > 0$ *и типа* $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ *представляется в виде*

$$f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} E_{\rho_1}(z_1 \zeta_1; \mu_1) E_{\rho_2}(z_2 \zeta_2; \mu_2)\ g(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2, \tag{6.7}$$

где $g(z_1, z_2)$ *функция* $B_{\rho_1 \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, *ассоциированная с* $f(z_1, z_2)$, *а* l_k $(k = 1, 2)$ *произвольный замкнутый контур, лежащий в области* $|\zeta_k| > \sigma_k^{1/\rho_k}$.

Формулу (6,7), дающую интегральное представление целой функции порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ через функцию $B_{\rho_1 \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, ассоциированную с нею, можно обратить.

Для любого θ_k $(0 \leq \theta_k \leq 2\pi)$, $(k = 1, 2)$ $\rho_k > \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2)$ плоскость комплексного переменного z_k $(k = 1, 2)$, разрезанную по лучу $\arg z_k = \theta_k + \pi$, обозначим через Δ_{θ_k} $(k = 1, 2)$. Рассмотрим в Δ_{θ_k} ту ветвь функции $(e^{-i\theta_k} z_k)^{\rho_k}$, которая принимает вещественные положительные значения на луче $\arg z_k = \theta_k$.

Полагая теперь, что $\rho_k > \frac{1}{2}$, $(k = 1, 2)$, определим область $D_k(\theta_k, \sigma_k, \rho_k)$, $(k = 1, 2)$, как множество тех точек z_k из Δ_{θ_k}, для которых выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\,(z_k e^{-i\theta_k})^{\rho_k} > \sigma_k. \tag{6.8}$$

Область $D_k\ (\theta_k, \sigma_k, \rho_k)$, очевидно, содержит точки луча $\arg z_k = \theta_k$, удовлетворяющие условию $|z_k| > \sigma_k^{1/\rho_k}$.

Теорема 6. Если $z_k \in D_k\,(\theta_k, \sigma_k, \rho_k)$ $(k=1, 2)$, *то имеет место интегральное представление*

$$g(z_1, z_2) = \rho_1 \rho_2\,(z_1 e^{-i\theta_1})^{\mu_1 \rho_1} (z_2 e^{-i\theta_2})^{\mu_2 \rho_2} z_1^{-1}\, z_2^{-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(t_1 e^{-i\theta_1},\ t_2 e^{-i\theta_2})\, e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \times$$

$$\times t_1^{\mu_1 \rho_1 - 1} t_2^{\mu_2 \rho_2 - 1}\, dt_1\, dt_2. \tag{6.9}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ фиксировано и

$\varepsilon < \max\left\{\dfrac{\delta}{2\sigma_1^{1/\rho_1}},\ \dfrac{\delta}{2\sigma_2^{1/\rho_2}}\right\}$, тогда из (6.4′) следует, что

$$|b_{nm}| < [\sigma_1^{1/\rho_1}(1+\varepsilon)]^n [\sigma_2^{1/\rho_2}(1+\varepsilon)]^m <$$

$$< \left(\sigma_1^{1/\rho_1} + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\sigma_2 + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}}, \text{ при } n+m \geqslant N_0.$$

Следовательно, при некотором $c > 0$

$$|b_{nm}| < c\left(\sigma_1^{1/\rho_1} + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\sigma_2^{1/\rho_2} + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}},\ (n, m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.10}$$

Если $z_k \in D_k\,(\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k)$ $(k=1, 2)$, то из (6.8) и (6.3) получим, что при $0 \leqslant t_k < +\infty$, $(k=1, 2)$

$$\left| f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2})\, e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{|b_{nm}|\, t_1^n t_2^m}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1})\,\Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} e^{-(\sigma_1 + 2\delta) t_1^{\rho_1} - (\sigma_2 + 2\delta) t_2^{\rho_2}}. \tag{6.11}$$

Но максимум функции $r^k e^{-(\sigma+\delta) r^\rho}$ $(0 \leqslant r < \infty)$ достигается при $r = [k\rho^{-1}(\sigma+\delta)^{-1}]^{1/\rho}$, следовательно,

$$\left| f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2})\, e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\delta t_1^{\rho_1} - \delta t_2^{\rho_2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{|b_{nm}|}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1})\,\Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} \times$$

$$\times \frac{\left(n\rho_1^{-1} e^{-\frac{1}{\rho_1}}\right)^n \left(m\rho_2^{-1} e^{-\frac{1}{\rho_2}}\right)^m}{(\sigma_1 + \delta)^{n/\rho_1} (\sigma_2 + \delta)^{m/\rho_2}}. \tag{6.12}$$

Из (6.10) и (6.12) следует, что

$$\left| f\left(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}\right) e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\delta t_1^{\rho_1} - \delta t_2^{\rho_2}} \cdot A, \quad 0 \leqslant t_1, t_2 < +\infty, \tag{6.13}$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Из (6.13) следует, что при $z_k \in D_k(\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k)$ допустимо почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{b_{nm}(e^{-i\theta_1}t_1)^n (e^{-i\theta_2}t_2)^m t_2^{m+\mu_2\rho_2-1}}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1})\Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} =$$

$$= f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1}(z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2}(z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \tag{6.14}$$

в области $0 \leqslant t_1 < +\infty$, $0 \leqslant t_2 < +\infty$.

Заметив, что при $\operatorname{Re} w > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-wt^{\rho}} t^{k+\mu\rho-1} = \frac{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}{\rho w^{\mu + k\rho^{-1}}},$$

почленным интегрированием ряда (6.14) получим формулу (6.9) при $z_k \in D_k(\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k)$ $(k = 1, 2)$, где $\delta > 0$ — любое число. Но так как $\delta > 0$ можно взять сколь-угодно малым, то отсюда и следует утверждение теоремы.

В последующем результаты теорем 5 и 6 будут применены для получения параметрических представлений для целых функций порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, подчиненных дополнительным условиям интегрируемости в квадрате модуля по определенным лучам, лежащим в плоскостях z_1 и z_2.

В заключение автор считает приятным долгом выразить признательность проф. Б. Я. Левину за ценные замечания, сделанные им при ознакомлении с рукописью этой работы.

Сектор математики и механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 2 VI 1955

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ՇԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում կառուցվում է շատ փոփոխականներից կախված ամբողջ ֆունկցիաների մի հատուկ դասի տեսությունը և տրվում է նրանց ինտեգրալ ներկայացումը։

Շարադրանքը հեշտացնելու նպատակով արդյունքները բերվում են երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների համար։