

М. И. Розовский

О некоторых процессах деформирования материалов

В работе рассмотрены высокоэластические деформации полимеров, ползучесть и релаксация металлов при $\sigma < \sigma_s$.

Пользуясь статистическим методом, на основе активационной теории дано обоснование возможности представления переменных периодов последдействия и релаксации как функций времени, определяемых по экспериментальным данным.

На той же основе выполнен анализ кривых ползучести и релаксации.

1. Высокоэластическая деформация полимеров

При количественном изучении процессов деформирования реальных материалов во времени широко используются механические модели, назначение которых — схематически отображать микроструктурные свойства материала в процессе деформирования.

Применение таких моделей приводит к линейным дифференциальным уравнениям, связывающим напряжение σ , деформацию ϵ и их производные по времени с соответствующими параметрами модели.

Простая модель Кельвина применительно к развитию высокоэластической деформации дает при $\sigma = \text{const}$

$$\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_e} \cdot \frac{d\epsilon_e}{dt} = \frac{1}{\theta} \quad (1.1)$$

где ϵ_e — эластическая деформация, $\epsilon = (\epsilon_e)_{\text{max}}$ — предельная эластическая деформация, θ — период упругого последдействия.

Здесь $\theta = \theta_0 e^{\frac{E}{KT}}$,
где E — энергия активации упругого последдействия, K — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, θ_0 — постоянная, не зависящая от температуры.

Из (1.1) следует

$$\epsilon_e = \epsilon_m (1 - e^{-\lambda t}), \quad (1.3)$$

где $\lambda = 1/\theta$.

Эта формула, как известно, оправдывается только качественно. Последнее объясняется тем, что формула (1.3) справедлива лишь в том случае, когда энергия активации и, как следствие, период упругого последдействия, не изменяется в ходе процесса деформирования.

чего в действительности нет. Формулу, дающую ε_c в явном виде, пригодную для правильного количественного изучения кинетики высокоэластической деформации, можно получить в результате применения статистического метода на основе активационно-энергетической теории, исходя из сложной модели (статистический набор элементарных моделей). Для простоты примем, что последняя состоит из множества последовательно соединенных простых моделей Кельвина с соответствующими, отличными друг от друга, энергиями активации элементарных процессов последствия, схематически описываемых упомянутыми простыми моделями.

Эта система характеризуется функцией распределения $F(E)$ энергий активации, изменяющихся в промежутке от $E_{\min} = E_1$ до $E_{\max} = E_2$. В нашем случае вместо формулы (1.3) будем иметь

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m \left[1 - \int_{E_1}^{E_2} F(E) e^{-\lambda t} dE \right], \quad (1.4)$$

откуда
$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \varepsilon_m \int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda t} dE. \quad (1.5)$$

Функция распределения $F(E)$ удовлетворяет условию нормализации

$$\int_{E_1}^{E_2} F(E) dE = 1.$$

С помощью (1.4) и (1.5) образуем выражение удельной скорости деформации

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon_c} \cdot \frac{d\varepsilon_c}{dt} = \bar{i}(t), \quad (1.6)$$

где

$$\bar{i}(t) = \frac{\int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda t} dE}{\int_{E_1}^{E_2} F(E) e^{-\lambda t} dE}.$$

Температура предполагается постоянной.

Из (1.6) следует, что процесс высокоэластической деформации может быть охарактеризован переменным во времени периодом $\theta = \frac{1}{\bar{i}(t)}$ упругого последствия. Следовательно, вопрос сводится к установлению вида функции $\bar{i}(t)$ — характеристики скорости протекания процесса. Эту функцию легко найти по экспериментальным данным, отображающим изменение величины $\lambda = \frac{1}{\theta}$ от времени t .

Так, например, пользуясь данными, помещенными в первых двух строках таблицы 1, получим

$$\bar{i}(t) = \alpha t^{-\beta}, \quad (1.7)$$

где $\alpha = 0.03$, $\beta = 0.42$.

Насколько хорошо получается совпадение, видно из таблицы 1.

Таблица 1

(Полиизобутилен, температура 82°C)

время в минутах t	7,5	25,0	41,5	57,2	74,0	110
Из эксперимента	0,0354	0,0200	0,0165	0,0146	0,0133	0,0116
$\lambda = f(t)$ вычислено по формуле (1.7)	0,0344	0,0207	0,0167	0,0146	0,0132	0,0112

Вторая строка таблицы 1 составлена по экспериментальным данным, взятым из [1].

В результате интегрирования (1.6) с учетом (1.7), получим

$$\varepsilon_t = \varepsilon_m \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^\gamma} \right], \quad (1.8)$$

где $\theta_0 = 3,15$ минут, $\gamma = 0,58$ — безразмерная постоянная.

Интересно отметить, что полученная выше формула (1.8) аналогична формуле, найденной А. П. Бронским [2] в результате эксперимента над каучуком (СК).

Перейдем теперь к случаю релаксации напряжения σ при постоянной деформации $\varepsilon = \text{const}$.

Здесь можно применить статистический метод, используя сложную модель, состоящую из множества простых моделей Максвелла, соединенных параллельно.

Так как для простой модели Максвелла при $\varepsilon = \text{const}$ имеет место

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\tau},$$

где $\tau = \tau_0 e^{\frac{u}{K\tau}}$, u — энергия активации то в нашем случае получим

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\varphi(t),$$

(1.9)

где

$$\varphi(t) = \int_{u_1}^{u_2} \Phi(u) u e^{-u t} du = \int_{u_1}^{u_2} \Phi(u) e^{-u t} du.$$

Здесь $\Phi(u)$ — функция распределения энергий активации, изменяющихся от $u_{\min} = u_1$ до $u_{\max} = u_2$.

Функция $\varphi(t)$ — характеристика скорости релаксации, определяется из экспериментальных данных, отображающих зависимость величины $\mu = \frac{1}{\sigma}$ от времени t . Так, например, пользуясь таблицей 2, составленной по экспериментальным данным, взятым из [3], получим

$$\varphi(t) = a t^{-b},$$

где $a = 0,07$, $b = 0,72$.

Таблица 2

(Смокедшит, температура 22°C)

время в минутах t	0,17	1	8	32
$\mu = \frac{1}{\tau}$	0,2857	0,0583	0,0160	0,0062

Из уравнения (1.9) следует

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\int_0^t \tau(s) ds}. \quad (1.10)$$

Дальнейшее применение формулы (1.10) ясно.

Полученные выше, на основе статистического метода, формулы могут быть связаны с формулами, следующими из теории наследственности Вольтерра. Этим вопросом мы здесь заниматься не будем.

2. Ползучесть и релаксация металлов при $\sigma < \sigma_*$

Уравнения (1.6) и (1.9) справедливы лишь в том случае, когда начальное напряжение σ_0 не превышает предела текучести σ_* полимера при заданной температуре.

Если ползучесть и релаксация металла протекают также при $\sigma_0 < \sigma_*$, то эти процессы пластических деформаций могут быть описаны с помощью уравнений типа (1.6) и (1.9). Наибольший интерес представляет получение уравнений начальных участков кривых ползучести и релаксации металлов.

Рассмотрим сначала процесс релаксации напряжения в поликристаллическом металле.

Если в уравнении (1.9) функции $\varphi(t)$ придать выражение

$$\varphi(t) = \frac{k}{(1+pt)^2},$$

где k и p — константы, зависящие от температуры, то получим

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{k}{(1+pt)^2}.$$

Интегрирование уравнения (2.1) дает

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{kt}{1+pt}}. \quad (2.2)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой, полученной Одигом [4] (из соображений, отличных от наших) для начального участка кривой релаксации и проверенной им для стали СТ-40.

Уравнение начального участка кривой ползучести можно получить с помощью соотношения (1.6).

Заменяя в уравнении (1.6) ε_0 на ε_p — деформация, соответствующая неустановившейся скорости ползучести, и принимая

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{p}{1+pt}, \quad (2.3)$$

где p — постоянная, зависящая от температуры, получим

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon_p} \cdot \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{p}{1 + pt} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует

$$\varepsilon_p = \frac{cpt}{1 + pt} \quad (2.5)$$

где $c = (\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$.

Формула (2.5) совпадает с формулой, полученной Одингом для начального участка кривой ползучести, в результате рассмотрения процесса ползучести, протекающего путем самодиффузии атомов. Формула (2.5) хорошо подтверждается для некоторых марок стали (Нюбиевая, ЭИ-69, ЗОХНЗМ).

Представляет интерес найти уравнение начального участка кривой ползучести другим путем, а именно, исходя из заданной функции распределения энергии активации. Для этого воспользуемся соотношением (1.5), заменив предварительно в нем ε_0 на ε_p :

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m \int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda} dE \quad (2.6)$$

Самое простое приемлемое выражение для функции распределения будет

$$F(E) = \begin{cases} 0 & E < E_1 \\ P & E_1 \leq E \leq E_2 \\ 0 & E > E_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Условие нормализации требует, чтобы $p = 1/E_2 - E_1$ или при $E_1 = 0$ $p = 1/E_2$. В дальнейшем примем $E_1 = 0$, что не нарушает общности результатов.

Ниже будет показано, что допущение (2.7) приведет к формуле, справедливой для некоторых металлов.

Так как $\lambda = c e^{-\frac{E}{KT}}$, где $c = 1/t_0$ и $dE = -\frac{kt}{\lambda} d\lambda$, то соотношение (2.6) запишется так:

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m p k T \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} e^{-\lambda} d\lambda \quad (2.8)$$

где $\lambda_2 = c e^{-\frac{E_2}{KT}}$.

Следовательно

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m p k T \frac{e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1}}{t} \quad (2.9)$$

Из (2.9) получим уравнение кривой ползучести

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_m k T}{E_2} \int_0^t \frac{e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}}{s} ds \quad (2.10)$$

Здесь $(\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$, так как $E_2 = kT \ln \frac{c}{\lambda_2}$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_2 s} - e^{-cs}}{s} ds = \ln \frac{c}{\lambda_2}.$$

Трудность экспериментального определения λ_2 (или то же, что $E_{\max} = E_2$) вынуждает рассматривать случай, когда $E_2 \gg kT$. Тогда приближенным следствием соотношения (2.9) будет

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m \rho k T \frac{1 - e^{-ct}}{t}. \quad (2.11)$$

Заметим, что при замене (2.9) соотношением (2.11), величина ε_m утрачивает свой прежний смысл $(\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$, так как ε_p , следующее из (2.11)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m \rho k T \int_0^t \frac{1 - e^{-cs}}{s} ds,$$

не имеет установившегося значения.

Уравнение (2.11) совпадает с уравнением, полученным Смитом [5] на основе активационной теории и в предположении, что после завершения упруго-мгновенной деформации образца в нем образовалось очень большое количество областей, концентрация напряжения о которых выше среднего приложенного, но ниже местного предела текучести.

Уравнение Смита проще уравнения (2.9) потому, что он принял $E_{\max} = \infty$, чего не может быть в действительности, так как величина E должна быть конечной. Но так как функция распределения практически принимает сколь угодно малые значения при достаточно больших E , то формальное увеличение $E > E_{\max} = \text{const}$ существенных приращений величины скорости деформации ползучести не внесет. Несмотря на эти допущения, а также аппроксимацию правой части уравнения (2.11), выражением $-\frac{\text{const}}{t}$ Смит получил формулу, хорошо подтверждающуюся экспериментально для свинцового, медного и цинкового образцов.

В заключение настоящего параграфа полезно сопоставить порядки убывания величин

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ и } \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

при $t \rightarrow \infty$ на основе полученных выше результатов. Последнее показывает, что как для полимеров, так и для металлов $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$

и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0$, причем порядок убывания $\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$ ниже порядка убывания $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$.

Интересно отметить, что для обычных моделей с числом элементов, большим двух (например модель Френкеля [6] или Губанова [7]), применяемых при изучении процесса деформирования полимеров в первом приближении, величина $\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$ также убывает при $t \rightarrow \infty$, но, в отличие от полученных здесь результатов, к нулю не стремится. Действительно, в самом общем случае будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k e^{-\beta_k^1 t}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\beta_k^1 t}}, \quad (2.12)$$

где постоянные α_k и β_k зависят от параметров модели (в случае Френкеля или Губанова $n = 4$).

Пусть β_v , где целое v ($1 \leq v \leq n$), наименьшее из всех β_k . Разделив числитель и знаменатель правой части (2.12) на $e^{-\beta_v^1 t}$ ($\beta_v \neq 0$), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k e^{-(\beta_k - \beta_v)t}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-(\beta_k - \beta_v)t}}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \beta_v.$$

Днепропетровский
горный институт

Поступило 20 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ребиндер П. А. и Чумакова Л. В. ДАН СССР, 81, № 2, 1951.
2. Бронский А. П. ПММ, 5, в. 1, 1941.
3. Догадкин Б. А., Бартеков Г. М. и Резниковский М. И. Коллоидный журнал, 11, в. 5, 1949.
4. Одинг И. А. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1948.
5. Smith C. L. Proc: Phys. Society, 61, № 345, 1948.
6. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. АН СССР, 1945.
7. Губанов А. И. Журнал технической физики, 17, в. 1, 1949.

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում քննարկված են պոլիմերների բարձր էլաստիկ դեֆորմացիաները, մետաղների սողքայնությունը և սկզբնական $\sigma < \sigma_s$ դեպքում,

Յգտվելով ստատիստիկական մեթոդից, ակտիվացիոն տեսության հիման վրա տրված է հետադադման և ռեկաքսացիայի փոփոխական պարբերաշրջանները, որպես ժամանակի՝ էքսպերիմենտալ ափսոսանքով որոշվող ֆունկցիաները ներկայացնելու հնարավորության հիմնավորումը:

Նույն հիման վրա կատարված է սողաբանության և ռեկաքսացիայի կորերի վերլուծումը: