

А. Л. Шагинян

О скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях

Введение

Пусть E — произвольная замкнутая совокупность со связным дополнением E_∞ на z плоскости. Отобразим конформно E_∞ на $|w| > 1$ функцией

$$w = \Phi(z), \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0,$$

$\lg |\Phi(z)|$ есть функция Грина области E_∞ . Обозначим через L_r линию уровня функции Грина

$$L_r: |\Phi(z)| = r > 1.$$

Тогда, согласно теореме Уолша [1], для любой функции $i(z)$, регулярной на замкнутой ограниченной совокупности E , возможно определить при любом n полином степени n такой, чтобы на E имела место оценка

$$|i(z) - P_n(z)| < \frac{C}{(r-z)^n}, \quad \varepsilon > 0,$$

где C — постоянная, а L_r — линия уровня функции Грина, проходящая через „ближайшую“ особенность функции $i(z)$.

Величину r можно выразить в терминах конфигурации E . Это можно сделать пользуясь либо известной теоремой искажения Альфорса [2] (речь идет о втором фундаментальном неравенстве указанного мемуара), либо оценками Варшавского [3]. Однако и неравенство Альфорса и оценки Варшавского имеют место при наложении больших ограничений на совокупность E .

Наиболее общий результат в теории конформных отображений, позволяющий оценить значение r , либо значение функции Грина в терминах конфигурации E , это — известная оценка Лаврентьева [4].

В § 1 мы устанавливаем некоторую новую оценку функции Грина (теорема 1 текста), пригодную в самом общем случае и содержащую в частности неравенство Лаврентьева.

С помощью этих оценок в § 2 приводится решение задачи Уолша



в терминах совокупности E в самом общем случае ограниченных замкнутых совокупностей.

Во втором и третьем параграфах решается также задача об оценке полиномиальных приближений для функций, регулярных на неограниченных замкнутых совокупностях. Одновременно решается вопрос о весовом приближении в произвольной бесконечной совокупности как для функций, регулярных на замкнутой совокупности, так и для функций, регулярных в открытой совокупности.

Оценкой скорости приближения многочленами функций, регулярных на произвольных ограниченных континуумах, занимался С. Н. Мергелян [5]. Полученная им оценка (неравенство 3 статьи [5]) грубее нашего неравенства (2.11).

Другие работы по оценке полиномиальных приближений в случае произвольных неограниченных совокупностей нам не известны.

§ 1. Некоторые оценки, относящиеся к линиям уровня функции Грина

1.1. Пусть Ω — ограниченная замкнутая совокупность со связным дополнением на плоскости комплексного аргумента z ; C — граница этой совокупности, а Ω_∞ — дополнение к Ω . Считаем, что Ω лежит в круге $|z| \leq d$ и содержит круг $|z| < \Delta$.

Отобразим Ω_∞ конформно на $|w| > 1$,

$$w = \Phi(z), \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0.$$

Функция

$$g(x, y) = \lg |\Phi(z)|$$

есть функция Грина области Ω_∞ .

Впоследствии, для краткости, вместо $g(x, y)$ будем писать $g(z)$.

Оценим снизу значение $g(z)$ в произвольной точке $z_1 \in \Omega_\infty$ и удовлетворяющей одновременно условию $|z| < d$.

Для этого соединим точку $A(z_1)$ с некоторой точкой $B(z_2)$

$$|z_2| = d + d_0, \quad (d_0 > 0),$$

спрямляемой дугой L , лежащей внутри Ω_∞ . Пусть $z = z(s)$ переменная точка на L , а s — дуговое расстояние точки z от z_1 . Расстояние точки $z(s)$ до границы C обозначим через $\rho(s)$.

Представим в круге $|z - z(s)| < \rho(s)$ функцию Грина $g(z)$ посредством интеграла Пуассона

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \frac{\rho^2(s) - r^2}{\rho^2(s) - 2\rho(s)r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi,$$

где $z' = z(s) + \rho(s)e^{i\varphi}$, $z = z(s) + re^{i\theta}$, $r < \rho(s)$.

Разлагая интеграл Пуассона по степеням малого значения параметра r , получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r}{\rho(s)} \right]^n \cos n(\theta - \varphi) \right\} d\varphi.$$

В силу равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') d\varphi = g(z(s)) = g(s)^*$$

получаем

$$g(z) = g(s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r}{\rho(s)} \right]^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \cos n(\theta - \varphi) d\varphi.$$

Применив последнее соотношение в точке $z(s + \Delta s)$ ($r = |z(s + \Delta s) - z(s)|$), получим

$$\frac{\partial g(s)}{\partial s} = \frac{2}{\rho(s)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \cos n(\varphi - \theta) d\varphi.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial g(s)}{\partial s} \right| \leq \frac{2}{\rho(s)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') d\varphi = \frac{2}{\rho(s)} g(s)$$

или

$$\left| \frac{\partial \lg g(s)}{\partial s} \right| \leq \frac{2}{\rho(s)}. \quad (1.1)$$

Искомую оценку функции Грина получаем из неравенства

$$\left| \lg \frac{g(z_2)}{g(z_1)} \right| = \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \lg g(s)}{\partial s} ds \right| \leq 2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)},$$

т. е.

$$\begin{aligned} -2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)} &< \lg \frac{g(z_2)}{g(z_1)} \leq 2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}, \\ g(z_1) \cdot e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} &\leq g(z_2) \leq g(z_1) \cdot e^{2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

* Значение $g(z)$ в точке $z(s)$ обозначаем через $g(s)$.

В общем случае эти оценки значительно улучшить нельзя. В дальнейшем мы увидим, что в неравенствах (1.2) число 2 в показателе нельзя будет заменить числом, меньшим $\frac{\pi}{2}$.

1.2. Оценим $g(z)$ снизу на окружности $|z| = d + d_0$ ($d_0 < d$).

Так как $g(z)$ мажорирует гармоническую функцию $\lg \frac{d}{|z|}$, то при

$$|z_2| = d + d_0$$

$$g(z_2) > \lg \frac{|z_2|}{d} = \lg \left(1 + \frac{d_0}{d} \right).$$

В силу неравенства $\lg(1+x) > \frac{x}{2}$ при $x \leq 1$,

получаем

$$g(z_2) > \frac{d_0}{2d}.$$

Тогда из (1.2) следует

$$g(z_1) > \frac{d_0}{2d} \cdot e^{-2 \operatorname{Im} \int_{AB} \frac{ds}{p(s)}}, \quad (1.3)$$

где AB — дуга, соединяющая точку z_2 с некоторой точкой окружности $|z| = d + d_0$ ($d_0 < d$) внутри Ω .

Вместо (1.3) иногда удобно применить и другую оценку [неравенство (1.5)].

Пусть L — произвольная замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в Ω и охватывающая данную совокупность.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} d &= \max |z| \\ d+d_0 &= \max |z| \end{aligned} \right\} \text{ при } z \in \Omega.$$

Тогда в любой точке z_L кривой L

$$g(z_L) > \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}}, \quad (1.4)$$

где интеграл распространен по всему замкнутому контуру L .

В самом деле. Пусть $A(z_L)$ — точка кривой L , где оценивается функция Грина, а $B(z_2)$ — точка кривой L , где $|z| = d + d_0$. Этими двумя точками кривая L разбивается на две дуги L_1 и L_2 .

Согласно оценке (1.3),

$$g(z_2) > \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{L_1} \frac{ds}{p(s)}},$$

а также

$$g(z_L) \geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_L \frac{ds}{p(s)}}.$$

Но так как

$$\max_{i=1,2} \int_{L_i} \frac{ds}{p(s)} \geq \frac{1}{2} \int_L \frac{ds}{p(s)},$$

то получим

$$g(z_L) \geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}}. \quad (1.5)$$

В терминах функции $w = \Phi(z)$ неравенство (1.5) дает

$$|\Phi(z_L)| \geq \exp \left\{ \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}} \right\}.$$

В силу неравенства

$$e^x > 1 + x$$

получаем

$$|\Phi(z_L)| > 1 + \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}}. \quad (1.6)$$

Если w_L есть образ произвольной точки z_L на w -плоскости, при отображении $w = \Phi(z)$, а w' — произвольная точка на $|w'| = 1$, соответствующая произвольному граничному элементу кривой C , то предыдущее неравенство дает

$$|w_L - w'| \geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}}. \quad (1.7)$$

Имеет место также неравенство

$$|w_L - w'| \geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_{AB} \frac{ds}{p(s)}}, \quad (1.8)$$

которое в частных случаях может дать лучшую оценку.

1.3. Неравенства (1.7) и (1.8) содержат в себе известное неравенство М. А. Лаврентьева [4] в теории конформных отображений.

Действительно. Произвольную жорданову дугу, лежащую внутри Ω_∞ и имеющую концы на C , будем называть, как это принято, сечением области Ω_∞ .

Любое сечение разбивает области Ω_∞ на две области.

Обозначим через δ_1 нижнюю грань длины всевозможных сечений, отделяющих точку $A(z_1)$ от B . Пусть δ_2 — расстояние точки A от C . Меньшее из этих двух чисел будем называть, следуя М. А. Лаврентьеву, „относительным расстоянием“ точки $A(z_1)$ от C относительно точки B . При наших предположениях относительно точек A и B очевидно, что относительное расстояние точки A от C относительно B

совпадает с относительным расстоянием от C этой же точки относительно $z = \infty$. В дальнейшем число

$$\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$$

будем обозначать словом „расстояние“ в кавычках.

В терминах относительного расстояния точки A от C из неравенства (1.3)–(1.4) и (1.7)–(1.8) вытекает

$$g(z_1) > \frac{d_0}{2d} e^{-c' \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.9)$$

$$|w_1 - w'| \geq e^{-c \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.10)$$

где c — абсолютная постоянная. Это и есть неравенство М. А. Лаврентьева.

Доказательство. Произведем quadriangulation плоскости со стороной квадратов, равной $\frac{\delta}{3\sqrt{2}}$. Выделим ячейки, которые имеют хотя бы одну общую точку с замкнутой совокупностью Ω .

Обозначим через $\bar{\Omega}_\infty$ бесконечную область, содержащую точку $z = \infty$ и ограниченную ломаной, состоящей из соответствующих сторон выбранных ячеек. $\bar{C}$ — граница области $\bar{\Omega}_\infty$.

Обозначим также через $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$ и $\bar{\delta}$ аналогичные δ_1 , δ_2 и δ величины для $\bar{\Omega}_\infty$.

Точка $A(z_1)$ вместе с $B(z_2)$ будет лежать в области $\bar{\Omega}_\infty$. В противном случае, очевидно, имели бы

$$\bar{\delta}_1 \leq 2 \frac{\delta}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3} \delta,$$

и поэтому пришли бы к противоречию

$$\delta \leq \frac{2}{3} \delta.$$

Величина $\bar{\delta}_1$ будет не меньше, чем $\frac{\delta}{3\sqrt{2}}$.

С другой стороны, очевидно и

$$\bar{\delta}_2 \geq \delta - \frac{\delta\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \delta.$$

Поэтому

$$\bar{\delta} \geq \min \left\{ \frac{\delta}{3\sqrt{2}}; \frac{2\delta}{3} \right\} = \frac{\delta}{3\sqrt{2}}.$$

Это показывает, что, выбрав в quadriangulation определенные квадраты, входящие в $\bar{\Omega}_\infty$, мы можем провести внутри них ломаную $\bar{L}$ такую, что расстояние $\bar{L}$ от $\bar{C}$ будет $\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{3\sqrt{2}}$.

Легко оценить и длину этой ломаной $\bar{L}$. В самом деле, если N означает число ячеек квадратики в круге $|z| < d + d_0$, то

$$N \left(\frac{\delta}{3\sqrt{2}} \right)^2 < \pi(d + d_0)^2,$$

$$N < 36\pi \left(\frac{d + d_0}{\delta} \right)^2,$$

$$\text{дл. } \bar{L} < N \cdot \frac{\delta}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\delta N}{3} < 12\pi \cdot \frac{(d + d_0)^2}{\delta},$$

$$\text{дл. } \bar{L} < 48\pi \frac{d^2}{\delta}.$$

Замечание. При оценке числа N , если подсчитать не число ячеек покрывающих круг $|z| < d + d_0$, а число ячеек, входящих в узкую полосу, примыкающей к границе области и имеющей ширину порядка δ , то вместо неравенства (1.10) получим

$$|w_1 - w'| \geq e^{-\frac{\epsilon(\delta)}{\delta^2} d^2}.$$

где $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Все предыдущие оценки приводят к следующей теореме.

Теорема 1. Если Ω — замкнутая совокупность со связным дополнением, лежащая в круге $|z| \leq d$, Ω_∞ — дополнение к Ω и L — любая замкнутая спрямляемая кривая, охватывающая Ω , то в любой точке z , кривой L

$$\left. \begin{aligned} g(z_L) &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \\ g(z_L) &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где $d_0 = \max |z|$, $z \in L$, а $A(z_1)$ — произвольная точка области Ω_∞ в круге $|z| < d$ и AB — дуга, соединяющая внутри Ω_∞ точку $A(z_1)$ с произвольной точкой $B(z_2)$, $|z_2| = d + d_0$.

Если w_1 — образ точки $A(z_1)$ при $w = \Phi(z)$, а w' — аффикс произвольной точки окружности $|w'| = 1$, то из (1.11) следует

$$\left. \begin{aligned} |w_1 - w'| &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \\ |w_1 - w'| &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

либо

Из (1.12) вытекает

$$(w_1 - w') \geq e^{-c \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.13)$$

где c — абсолютная постоянная, не зависящая от d, d_0, δ , а δ — «расстояние» точки $A(z_1)$ до C .

Неравенство (1.13) есть неравенство Лаврентьева.

1.4. Фиксируя точку $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega_\infty$, построим две линии уровня

$$L_1: g(x, y) = \frac{1}{2} g(x_1; y_1);$$

и

$$L_2: g(x, y) = \frac{1}{4} g(x_1; y_1).$$

Оценим снизу расстояние между L_1, L_2 и C .

Согласно Г. Фаберу [9], если z_1 и z_2 — две произвольные точки Ω_∞ , а w_1 и w_2 — их образы в $|w| > 1$, при отображении $w = \Phi(z)$, то для расстояния между линиями уровня

$$L': g(x, y) = g(z_1),$$

$$L'': g(x, y) = g(z_2)$$

функции Грина имеет место следующее неравенство

$$\text{расст.}(L': L'') \geq (r'' - r') \left(1 - \frac{1}{r' r''}\right), \quad (1.14)$$

где

$$|w_1| = r' < |w_2| = r''.$$

Применяя это неравенство к нашему случаю, получаем

$$\begin{aligned} \text{расст.}(L_1; L_2) &\geq \left(e^{\frac{1}{2}g(z_1)} - e^{\frac{1}{4}g(z_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{4}g(z_1)}\right) \geq \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{1}{4}g(z_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{4}g(z_1)}\right). \end{aligned}$$

Но из принципа максимума гармонической функции следует, что в Ω_∞

$$g(z_1) \leq \lg \frac{|z_1|}{\Delta} \leq \lg \frac{d}{\Delta}.$$

Поэтому*

$$1 - e^{-\frac{1}{4}g(z_1)} \geq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Delta}{d}} g(z_1),$$

$$1 - e^{-\frac{3}{4}g(z_1)} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{\frac{1}{2}} g(z_1).$$

* $1 - e^{-x} \geq x$ при $x \geq 0$.

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{4}g(z_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{4}g(z_1)}\right) \geq \frac{3}{16} \frac{\Delta}{d} g^2(z_1).$$

Получили

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq \frac{3}{16} \cdot \frac{\Delta}{d} g^2(z_1). \quad (1.15)$$

В силу теоремы 1 из (1.15) получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{расст. } (L_1; L_2) &\geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 e^{-4 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}, \\ \text{или} \\ \text{расст. } (L_1; L_2) &\geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 \cdot e^{-2 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Из этих оценок следует также

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 e^{-c \left(\frac{d}{\varepsilon}\right)^2}, \quad (1.17)$$

где c — абсолютная постоянная.

При фиксированном d справедливо также неравенство

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq e^{-\frac{\varepsilon(\delta)}{\delta^2}}, \quad (1.18)$$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Аналогичные неравенства получим для расст. $(C; L_2)$ только лишь с другим коэффициентом взамен $\frac{1}{4}$.

1.5. Наконец оценим длину линии уровня L_1 :

$$\text{дл. } L_1 = \int_{|w| = e^{\frac{1}{2}g(z_1)}} |\Psi'(w)| \cdot |dw|.$$

В силу известного неравенства Фабера [9]

$$|\Psi'(w)| \leq \tau \cdot \frac{|w|^2}{|w|^2 - 1},$$

где τ — емкость совокупности Ω , получим

$$\text{дл. } L_1 < \frac{\tau}{g(z_1)} < \frac{2d^*}{g(z_1)} \quad (1.19)$$

или

$$\text{дл. } L_1 < \frac{4d^2}{d_0} e^{2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} \leq \frac{4d^2}{d_0} e^{\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

* Очевидно $\tau < 2d$.

Полученные в пунктах (1.4)–(1.5) результаты сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Если L, L_1, L_2 — линии уровня функции Грина $g(z)$, имеющие уравнения

$$L: g(x, y) = g(x_1; y_1),$$

$$L_1: g(x, y) = \frac{1}{2} g(x_1; y_1),$$

$$L_2: g(x, y) = \frac{1}{4} g(x_1; y_1),$$

то имеют место следующие неравенства

$$\left. \begin{array}{l} \text{расст. } (L_1; L) \\ \text{расст. } (L_1; L_2) \\ \text{расст. } (L_2; C) \end{array} \right\} > c \frac{\Delta}{d} \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot e^{-4 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} \geq \\ \geq c \cdot \frac{\Delta}{d} \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot e^{-2 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \quad (1.20)$$

где L — произвольная кривая, охватывающая Ω и проходящая через $A(z_1)$, c — абсолютная постоянная.

$$\text{дл. } L \leq 4 \frac{d^2}{d_0} e^{\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.21)$$

§ 2. О равномерных полиномиальных приближениях на замкнутых совокупностях*

2.1. Полиномы Фабера [7]**.

В разложении в ряд Лорана, в окрестности точки $z = \infty$, функции

$$[\Phi(z)]^n,$$

совокупность неотрицательных степеней от z составляет некоторый многочлен степени n . Этот многочлен и называют многочленом Фабера. Обозначим его через $F_n(z)$.

По определению $F_n(z)$

$$[\Phi(t)]^n - F_n(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В силу этого, при $z \in \Omega$

$$\int_{\Gamma} \frac{[\Phi(t)]^n - F_n(t)}{t - z} dt = 0.$$

* В дальнейшем придерживаемся всех обозначений § 1.

** Подробности о полиномах Фабера см. [6–8].

Отсюда получается интегральное представление полиномов Фабера

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{[\Phi(t)]^n}{t-z} dt. \quad (2.1)$$

Определим образующую функцию полиномов $\{F_n(z)\}$.

$$T(\xi; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{\xi^n},$$

$$T(\xi; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Phi(t)}{\xi} \right)^n \frac{dt}{t-z} = \frac{\xi}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{dt}{(t-z)(\xi - \Phi(t))}.$$

Но так как при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{t-z} \cdot \frac{1}{\xi - \Phi(t)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

то, применяя теорему о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{dt}{(t-z)(\xi - \Phi(t))} = -\operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{(t-z)(\xi - \Phi(t))} \right\} = \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi) - z},$$

$$T(\xi; z) = \frac{\xi \cdot \psi'(\xi)}{\psi(\xi) - z}. \quad (2.2)$$

Этой формулой образующая функция $T(\xi; z)$ определяется при всех z внутри линии уровня

$$g(x, y) = \lg |\xi|.$$

Функция $T(\xi; z)$, а следовательно и $F_n(z)$, зависят лишь от области Ω и не зависят от выбора точки $A(z_1)$.

2.2. Равномерные приближения на ограниченных замкнутых совокупностях функции $\frac{1}{z_1 - z}$.

Представим функцию $\frac{1}{z_1 - z}$ интегралом Коши, при $z \in \Omega$,

$$\frac{1}{z_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{1}{(z_1 - t)(t - z)} dt.$$

Перейдя под знаком интеграла к переменной w , получим

$$\frac{1}{z_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{\frac{1}{z_1 - \psi(\xi)}}{\psi(\xi) - z} \psi'(\xi) d\xi,$$

$$\rho = e^{\frac{1}{2} g(z_1)}.$$

Заменяя $\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)-z}$ по формуле (2.2) через $\frac{T(\xi; z)}{\xi}$, получим

$$\frac{1}{z_1-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=p} \frac{1}{\xi(z_1-\psi(\xi))} T(\xi; z) d\xi,$$

$$p = e^{\frac{1}{2}g(z_1)}.$$

Подставляя $T(\xi; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{\xi^n}$

и интегрируя почленно, получим

$$\frac{1}{z_1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z), \quad (2.3)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{(z_1-t)(\Phi(t))^n}. \quad (2.4)$$

Представим из (2.3) $\frac{1}{z_1-z}$ в виде

$$\frac{1}{z_1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z) + R_n(z_1; z),$$

и оценим остаточный член

$$R_n(z_1; z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k F_k(z).$$

Из (2.4)

$$|c_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{\text{дл. } L_1}{\text{расст. } (L_2; L_1)} \cdot e^{-\frac{n}{2}g(z_1)}.$$

Тогда в силу уже произведенных оценок,

$$\text{дл. } L_1 < \frac{\tau}{g(z_1)} < \frac{2d}{g(z_1)},$$

и

$$\text{расст. } (L_2; L_1) > \frac{\Delta}{d} g^2(z_1),$$

получим

$$|c_n| < c \cdot \frac{d}{\Delta} g^{-3}(z_1) \cdot e^{-\frac{n}{2}g(z_1)}, \quad (2.5)$$

с — постоянная.

Из (2.1) следует

$$|F_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot e^{\frac{n}{4} g(z_1)} \cdot \frac{\text{д.л. } L_2}{\text{расст. } (L_2; C)}$$

или

$$|F_n(z)| < c \cdot \frac{d^2}{\Delta} g^{-3}(z_1) e^{\frac{n}{4} g(z_1)}, \quad (2.6)$$

где c — абсолютная постоянная.

В силу (2.5) и (2.6) получаем оценку

$$|R_n(z_1; z)| < c \cdot \frac{d^3}{\Delta^2} g^{-6}(z_1) \frac{e^{-\frac{n+1}{4} g(z_1)}}{1 - e^{-\frac{g(z_1)}{4}}}.$$

Но ранее было отмечено, что

$$1 - e^{-\frac{1}{4} g(z_1)} \geq \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}} g(z_1),$$

поэтому

$$|R_n(z_1; z)| < \alpha \cdot e^{-\beta \cdot n \cdot e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}}},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= c \cdot d_0 \left(\frac{d}{d_0} \right)^7 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^2 e^{7 \int_L \frac{ds}{p(s)}}, \\ \beta &= \frac{d_0}{8d}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Обозначив через $P_n(z)$ многочлен

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k F_k(z),$$

приходим к следующей лемме.

Лемма 2. Для функции $\frac{1}{z_1 - z}$ при $z \in \Omega$ можно подобрать полином $P_n(z)$ такой, что

$$\left| \frac{1}{z_1 - z} - P_n(z) \right| < \alpha \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_L \frac{ds}{p(s)}} \right\}, \quad (2.8)$$

где постоянные α и β определяются из (2.7).

В предыдущих неравенствах интегралы распространяются по произвольным замкнутым кривым, проходящим через точку z_1 . Справедлива и следующая оценка

$$\left| \frac{1}{z_1 - z} - P_n(z) \right| < \exp \left\{ -p e^{-\frac{s(\delta)}{\delta^2}} \right\}, \quad (2.9)$$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, δ — "расстояние" точки z_1 до Ω .

2.3. Равномерное приближение функций, аналитических на ограниченной замкнутой совокупности.

Пусть теперь $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая на замкнутой совокупности Ω функция и δ — "расстояние" ближайшей к Ω особенности функции $\varphi(z)$. Обозначим через L^* произвольную замкнутую спрямляемую кривую, охватывающую Ω и отстоящую от Ω больше чем на $\frac{\delta}{3}$ и меньше чем на $\frac{\delta}{2}$.

Такую кривую L^* можно построить примерно таким же путем, как это было сделано в § 1.3.

Построение L^* можно провести таким путем, чтобы

$$\text{дл. } L^* < c \cdot \frac{d^2}{\delta}. \quad (2.10)$$

Представим $\varphi(z)$ интегралом Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \frac{\varphi(z_1) dz_1}{z_1 - z}$$

при $z \in \Omega$.

Подставим под знаком интеграла вместо ядра $\frac{1}{z_1 - z}$ выражение

$$\frac{1}{z_1 - z} = P_n(z) + R_n(z_1; z),$$

где $P_n(z)$ представляет отрезок ряда Фабера. Заметим при этом, что коэффициенты полинома Фабера $F_n(z)$ зависят от z_1 и, очевидно, являются аналитическими функциями от z_1^* .

Получаем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) P_n(z_1; z) dz_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) \cdot R_n(z_1; z) dz_1.$$

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) P_n(z_1; z) dz_1 = P_n^*(z)$$

представляет полином степени n . Обозначив через $M_{\delta/2}$ $\max |\varphi(z)|$ на расстоянии $\delta/2$ от C , в силу оценок (2.7), (2.8) и (2.10), получим

$$|\varphi(z) - P_n^*(z)| < c \cdot e^{-\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot M_{\delta/2}, \quad (2.11)$$

* Эту зависимость выразим явным образом посредством обозначения

$$P_n(z) = P_n(z_1; z).$$

где

$$c = \text{const.} \cdot \frac{d^{11}}{d_0^6} \cdot \frac{1}{\Delta^3} \cdot \frac{1}{\delta^2} e^{\gamma \int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}} < e^{\frac{1}{\delta}},$$

$$\delta = \frac{d_0}{8d}.$$
(2.12)

Получаем следующую теорему.

Теорема 2. Если $\varphi(z)$ — аналитическая на замкнутой совокупности Ω функция и δ — «расстояние» ближайшей особенности этой функции от Ω , то $\varphi(z)$ можно аппроксимировать многочленом степени n , удовлетворяющим неравенствам (2.11) и (2.12).

Следствие. Если $\varphi(z)$ аналитическая на замкнутой совокупности Ω функция и δ — «расстояние» «ближайшей» к Ω особенности этой функции, а $M_{\delta/2}$ есть $\max |\varphi(z)|$ на расстоянии $\delta/2$ от Ω , то существует полином $P_n(z)$ степени n такой, что

$$|\varphi(z) - P_n^*(z)| < c \cdot e^{-\alpha \left(\frac{d}{\delta}\right)^2},$$
(2.13)

где α — абсолютная постоянная, и

$$c < e^{\frac{d^2}{\delta^2}} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{d^{11}}{d_0^6} \cdot \frac{1}{\Delta^3}.$$

Считая $d_0 = \delta$ и Δ раз навсегда фиксированным, получим

$$c < e^{\gamma \frac{d^2}{\delta^2}},$$
(2.14)

где γ — абсолютная постоянная.

Неравенства (2.13) и (2.14) получаются из (2.7) и (2.8) при соот-

ветствующей оценке интеграла $\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}$.

Замечание. Уолшем доказано [1], что если $f(z)$ аналитическая на замкнутой совокупности Ω функция, то существует многочлен $P_n(z)$ степени n такой, что

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{M}{r_1^n},$$

где $r_1 < r$, а

$$g(x, y) = \lg r$$

первая линия уровня L_r , проходящая через особую точку функции $f(z)$; M — постоянная.

Имеет место и обратная теорема: если для $f(z)$ при любых n существуют полиномы $\{P_n(z)\}$ такие, что

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{M}{r^n},$$

где M — постоянная, не зависящая от n , то $f(z)$ регулярна внутри линии уровня L_r .

Величину r для заданной совокупности Ω и функции $f(z)$ можно определить либо из функции Римана, либо оценить с помощью различных теорем искажения. Например, пользуясь теоремами Альфорса [2]* либо Варшавского [3].

Однако теоремы и Альфорса и Варшавского имеют место при наложении определенных, довольно жестких ограничений на область.

Оценками (1.11) либо (1.12) функции Грина можно пользоваться при таких же обстоятельствах, что и неравенствами Альфорса и Варшавского.

Хотя (1.11) и (1.12) грубее неравенств Альфорса и Варшавского в том смысле, что в показателе для коэффициента при интеграле не указано экстремальное значение, однако эти неравенства применимы при совершенно произвольных областях Ω .

Таким образом неравенство (2.11) дает решение задачи Уолша, выраженное в терминах самой совокупности Ω .

Докажем теперь, что неравенство (2.11) существенно уточнить нельзя. А именно докажем.

Теорема 3. Существует совокупность Ω и аналитическая на ней функция такая, что на Ω невозможно неравенство

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\varepsilon} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \int_{L=\frac{ds}{\rho(s)}} \right\}, \quad (2.15)$$

где $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Возьмем произвольную положительную непрерывную функцию $\rho(s)$ ($0 \leq s \leq \infty$), причем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = 0.$$

Совокупность кругов $|z - s| < \rho(s)$, где s — переменная точка на оси ox , составляет некоторую бесконечную область D . Границу области D обозначим через C , которая вместе с кругом $|z + \frac{\rho(0)}{2}| < \frac{\rho(0)}{2}$

и с некоторым континуумом, соединяющим их, пусть изображает в данном случае совокупность Ω теоремы 3. Через C_x обозначим часть совокупности C слева от прямой $R(z) = x$, а через D_x часть области D также слева от этой прямой. В качестве функции $\varphi(z)$ возьмем функцию $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z - 2\rho(0)}}$, которая ограничена на C , $|\varphi(z)| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}}$ и имеет особенность $z = 0$ на расстоянии $\rho(0)$ от C .

* Речь идет о втором фундаментальном неравенстве указанной статьи Альфорса.

Допустим равенство (2.15) имеет место для любой замкнутой совокупности Ω и любой функции $\varphi(z)$, аналитической на Ω . Тогда, в частности, она должна иметь место и на C_α , независимо от x .

Считая, что для данного C_α контур L^* состоит из двойного отрезка $0 \leq s \leq x + \rho(x)$ и окружности $|z| = k + \rho(x)$, получим

$$\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)} = 2 \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + \int_0^{x(x)} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + \rho^2(x)}} + 2\pi(x + \rho(x)) = 2 \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + 2 \lg(1 + \sqrt{2}) + 2\pi(x + \rho(x)).$$

В силу $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = 0$ легко доказать, что при α сколь угодно малом можно определить число $\epsilon(\alpha)$ таким образом, чтобы

$$\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)} < 2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + \epsilon(\alpha). \quad (2.16)$$

Тогда на C_α по условию (2.15),

$$\left| \frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}} - P_n(z) \right| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot \exp \left\{ -ne^{-\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{x}{4} - \epsilon_n\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} - \epsilon(\alpha)} \right\} < \\ < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \exp \left\{ -ne^{-\left(\frac{x}{4} - 2\epsilon_n\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \right\} = R_n.$$

При любом заданном ϵ можно подобрать n таким образом, чтобы

$$R_n \leq \epsilon, \\ R_{n-1} > \epsilon.$$

Тогда из выражения R_n следует, что n будет иметь значение

$$n = \lg \frac{\sqrt{\rho(0)}}{\epsilon} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \cdot e^{\left(\frac{x}{2} - 2\epsilon_n\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}} + \theta,$$

где $|\theta| \leq 1$.

В круге $|z| \leq x$, где x — фиксированный параметр, связанный с C_α , будем иметь

$$\left| P_n(z) \right| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} + \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \left(\frac{x}{\rho(0)} \right)^n < \frac{2}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot e^{n \lg \frac{x}{\rho(0)}}, \\ \left| P_n(z) \right| < \frac{2}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot e^{\lg \frac{x}{\rho(0)} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \cdot e^{\left(\frac{x}{2} - 2\epsilon_n\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}}}.$$



либо проще

$$|P_n(z)| < \exp \left\{ e^{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)} \int_0^x \frac{ds}{s(s)} \right\} \quad (2.17)$$

при $x > \rho(0)$ и $z \in C_x$.

Построим теперь некоторую аналитическую внутри D функцию $\Psi(z)$, не зависящую от n и мажорирующую полиномы $P_n(z)$ внутри D

$$|P_n(z)| \leq |\Psi(z)|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Допустим, что такая функция $\Psi(z)$ уже построена. Тогда из (2.18) следует нормальность семейства полиномов $\{P_n(z)\}$ внутри D , и так как эти полиномы по условию равномерно сходятся к $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}}$

на некоторой части C , то $\frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}}$ должна быть аналитически продолжима внутрь D , чего не может быть.

Это противоречие и доказывает справедливость теоремы 3.

Таким образом доказательство этой теоремы сводится к построению функции $\Psi(z)$.

$\Psi(z)$ строим следующим образом. В полосе

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad u > 0,$$

на $w = u + iv$ плоскости рассмотрим функцию $\exp(e^w)$.

На прямых $v = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$

$$\left| e^{e^w} \right| = e^{e^u \sin \varepsilon_0/2},$$

а на

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad u = 0$$

$$\left| e^{e^w} \right| = e^{e^u v} < e.$$

Отобразим функцией $w = w(z)$ указанную полосу на криволинейную полосу D так, чтобы точка $w = 0$ соответствовала некоторой фиксированной на границе C точке, а $w = \infty$ соответствовала точке $z = \infty$.

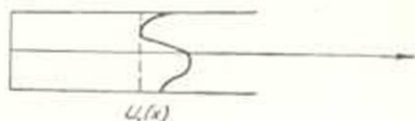
Покажем, что функция $\Psi(z) = e^{e^{w(z)}}$ и есть искомая функция.

В самом деле. Отрезку $\operatorname{Ree} |z| = x$, $|y| < \rho(x)$, параллельному оси ou , будет соответствовать в полосе

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad u > 0$$

некоторая криволинейная дуга σ_ϵ . Если обозначить через $u_1(x)$ величину $\min |w(x + iy)|$ при $|y| \leq \rho(x)$ и фиксированном x (фиг. 1), то по первому неравенству Альфорса [2]

$$u_1(x) > C + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_0}{2}\right) \int_a^x \frac{ds}{\rho(s)}, \quad (2.19),$$



Фиг. 1.

где a и C некоторые фиксированные постоянные. Тогда в силу этого неравенства будем иметь на границе S области D оценку

$$|e^{w(z)}| > e^{\epsilon \sin \frac{\epsilon_0}{2} x} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_0}{2}\right) \int_a^x \frac{ds}{\rho(s)}. \quad (2.20)$$

Но, с другой стороны, $|e^{w(z)}|$ не только на границе, но и внутри области D , при $x \rightarrow \infty$, удовлетворяет неравенству (2.20) равномерно относительно y , а $|P_n(z)|$ растет как x^n , поэтому из (2.17) и (2.20) следует, что и во всей области D

$$|P_n(z)| < |e^{w(z)}| = |\Psi(z)|,$$

независимо от n , что и требовалось доказать.

Замечание. При доказательстве теоремы 3 косвенным путем доказано также, что оценки функции Грина, указанные нами в неравенствах (1.11) теоремы 1, нельзя существенно уточнить в том смысле, что в этих неравенствах коэффициенты 1 и 2 при интегралах нельзя заменить соответственно числами меньше $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$ (утверждение в конце § 1.1).

То же самое можно сказать относительно других оценок, связанных с функцией Грина и приведенных в § 1.

2.4 Равномерная аппроксимация аналитических на замкнутых неограниченных совокупностях функций.

Пусть Ω — односвязная неограниченная область, содержащая круг $|z| < a$.

При произвольном r область Ω отсекает на окружности $|z| = r$, вообще говоря, счетное число дуг, каждая из которых будет разбивать Ω на две области, в одной из которых будет лежать точка $z = 0$.

В дальнейшем предполагаем, что область Ω отсекает на каждой окружности $|z| = r$ лишь конечное число дуг. При $r \rightarrow \infty$ это число может стремиться к бесконечности.

При данном r указанные дуги отсекают от Ω некоторую конечную область, содержащую точку $z = 0$.

Из этих дуг можно выбрать минимальное число таких, которые

отделяют от Ω максимальную конечную область, содержащую точку $z=0$. На приведенном чертеже (фиг. 2) такими дугами являются MN и SP.

Обозначим эту область через Ω_r . Пусть $\delta(r)$ — «минимальное» в смысле Лаврентьева расстояние особой точки функции $\varphi(z)$ от области Ω_r и $d(r) = \max |z|$ в области Ω_r . Таким же путем, как это было сделано в § 1.3, проведем замкнутую спрямляемую кривую L_r , содержащую Ω_r и состоящую от нее на расстоянии δ'

$$\frac{\delta}{2} < \delta' < \delta$$

с длиной порядка $c \frac{d^2(r)}{\delta(r)}$, где c —

абсолютная постоянная.

Тогда, согласно теореме 2, существует многочлен $P_n(z)$ степени n такой, что в Ω_r

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta/2} \exp \left\{ -n e^{-\alpha \left[\frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\}, \quad (2.21)$$

где α — абсолютная постоянная, а $M_{\delta/2}$ есть $\max |\varphi(z)|$ на расстоянии $< \frac{\delta(r)}{2}$ от Ω_r .

Из (2.21) следует ограниченность полиномов $\{P_n(z)\}$ в круге $|z| < a/2$.

$$|P_n(z)| \leq \text{const.}$$

Следовательно в $|z| > a/2$

$$|P_n(z)| < \text{const.} \left| \frac{z}{a} \right|^n.$$

В частности и вне Ω_r выполняется это неравенство. Тогда вне круга $|z| \leq r$

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta/2} |z|^{1/2} + e^{n \lg 2 \frac{|z|}{a}} < M_{\delta/2} |z|^{1/2} + \text{const} \cdot e^{n \lg |z|}. \quad (2.22)$$

Определим n таким образом, чтобы

$$M_{\delta(r)/2} \cdot \exp \left\{ -n e^{-\alpha \left[\frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\} \leq \varepsilon,$$

$$M_{d(r)/2} \cdot \exp \left\{ -(n-r) e^{-\alpha \left[\frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\} > \varepsilon.$$

Отсюда

$$n = \lg \frac{M_{2(r)/2}}{\varepsilon} \cdot e^{\alpha \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2} + \theta, \quad (2.23)$$

$$|\theta| < 1.$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на $M_{2(r)/2}$. Теперь потребуем, чтобы

$$\lg M_{2(r)/2} < e^{\beta \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2}, \quad (2.24)$$

и выберем также

$$\varepsilon = e^{-\gamma \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2},$$

где β, γ — постоянная.

Тогда из (2.23) получим, что при выполнении в Ω неравенств

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < \varepsilon = e^{-\gamma \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2}$$

можно считать n удовлетворяющим неравенству

$$n < e^{q \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2},$$

где q — абсолютная постоянная.

Подставляя это значение n в (2.22), получим вне Ω :

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < \exp \left\{ e^{-q \left[\frac{d(|z|)}{b(|z|)} \right]^2} \right\}.$$

Поэтому при $q' > q$

$$\sup_{\{z\}} \left\{ e^{-q' \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| \right\} \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

в Ω , при $n \rightarrow \infty$, когда $P_n(z)$ подобраны соответствующим образом.

Приходим к теореме.

Теорема 4. В бесконечной области Ω к любой функции $\varphi(z)$, аналитической в Ω и удовлетворяющей условию (2.24), допустимо весовое приближение (2.25) при определенном значении постоянного q' .

2.5. Решим теперь одну задачу об оценке взвешенного наилучшего приближения в бесконечной области.

Пусть область Ω и функция $\varphi(z)$ удовлетворяют условиям предыдущего параграфа с одной лишь разницей, что здесь, взамен условия (2.24), пусть $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\lg M_{2(r)/2} < e^{\gamma \left[\frac{d(r)}{b(r)} \right]^2}, \quad \gamma > 2. \quad (2.26)$$

Обозначим при фиксировании n

$$E_n(\varphi(z)) = \inf_{\{P_n\}} \left\{ \sup e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| \right\}, \quad \beta' < \beta.$$

Оценим $E_n(\varphi(z))$ в зависимости от n .

Возьмем определенное значение r и для области Ω_r построим полиномы Фабера и аппроксимируем $\varphi(z)$ посредством отрезка $P_n(z)$ ряда Фабера этой функции. Оценим при таком выборе полинома $P_n(z)$ значение

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} |\varphi(z) - P_n(z)|$$

в Ω_r и вне Ω_r .

В Ω_r

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{1(z)} \cdot e^{-n \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}}. \quad (2.27)$$

Вне Ω_r

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} |\varphi(z) - P_n(z)| < e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} \cdot \left\{ M_{1(z)} + e^{n \lg \frac{|z|}{a}} \right\}.$$

В силу (2.26) вне Ω_r

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} |\varphi(z) - P_n(z)| < e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)} + n \lg |z|} \cdot M_{1(z)}, \quad (2.28)$$

где c — постоянная.

Возьмем

$$n = e^{-\frac{\beta}{2} \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} + \theta, \quad (2.29)$$

$|\theta| < 1$.

Тогда, очевидно, вне Ω_r

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{1(z)} \cdot \exp \left\{ -c e^{-\frac{\beta}{2} \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} \right\}. \quad (2.30)$$

Из (2.29)

$$\frac{d(r)}{\delta(r)} = \text{const.} \cdot (\lg n)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.31)$$

Подставляя это значение в (2.27) и (2.31), получим во всей области Ω

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\delta(r)}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{1(z)} \cdot e^{-c (\lg n)^{\frac{2}{\alpha}}},$$

где c — абсолютная постоянная, а в $M_{\delta(r)/2}$ вместо r надо подставить решение уравнения (2.31). Это уравнение разрешимо относительно $\frac{d(r)}{\delta(r)}$, так как функция $\frac{d(r)}{\delta(r)}$ монотонно-возрастающая.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в § 2.3, доказывается, что вообще говоря аппроксимация

$$e^{-c \left[\frac{d(1/z)}{\delta(1/z)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)/2} \cdot \exp \left\{ -n e^{c(\lg n)^{\frac{2-\varepsilon}{\gamma}}} \right\},$$

($\varepsilon > 0$) невозможна.

Получаем следующую теорему.

Теорема 5. В области Ω , описанной в § 2.4, функцию $\varphi(z)$, аналитическую в $\bar{\Omega}$, можно аппроксимировать многочленом $P_n(z)$ степени n так, чтобы

$$e^{-c \left[\frac{d(1/z)}{\delta(1/z)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)/2} \cdot \exp \left\{ -n e^{c(\lg n)^{\frac{2}{\gamma}}} \right\}, \quad (2.32)$$

где в $M_{\delta(r)/2}$ вместо r надо подставить решение уравнения

$$\frac{d(r)}{\delta(r)} = a (\lg n)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.33)$$

а a и c — абсолютные постоянные.

Замена в правой части в показателе числа $\frac{2}{\gamma}$ на $\frac{2-\varepsilon}{\gamma}$, вообще говоря, невозможна, т. е. всегда можно указать бесконечную область Ω и функцию $\varphi(z)$, аналитическую на $\bar{\Omega}$, когда аппроксимация, при показателе $\frac{2-\varepsilon}{\gamma}$ в правой части, невозможна.

Замечание. Если вместо веса $e^{-c \left[\frac{d(1/z)}{\delta(1/z)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}}$ рассмотреть вес $e^{-\theta \left(\frac{d(1/z)}{\delta(1/z)} \right)}$, где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lg \theta(t)}{t^2} = \infty, \quad \theta(t) \uparrow \infty,$$

то получим

$$e^{-\theta \left(\frac{d(1/z)}{\delta(1/z)} \right)} |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)/2} \cdot e^{-n e^{\theta^{-1}(2n)}}, \quad (2.34)$$

где $\theta^{-1}(2n)$ решение уравнения

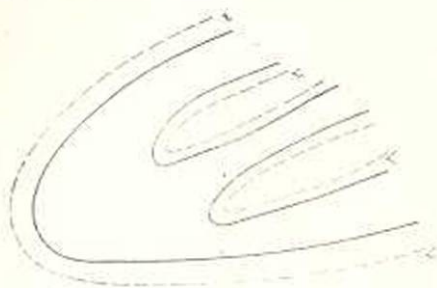
$$n = \frac{\theta \left(\frac{d(r)}{\delta(r)} \right)}{2}. \quad (2.35)$$

2.6. При решении задачи § 2.5 мы пользовались следствием аппроксимационной теоремы 2, т. е. неравенством (2.13).

Если же исходить из неравенств (2.11) и (2.12), то можем получить для наилучшего приближения оценку, которая в конкретных

случаях может привести к лучшим результатам.

В самом деле. Пусть Ω — область, описанная в § 2.4. и $\varphi(z)$ аналитическая в Ω . Учитывая наши допущения относительно Ω , можем построить проходящие через $z = \infty$ бесконечные замкнутые кривые, лежащие в дополнении к $\bar{\Omega}$ и охватывающие Ω в области регулярности $\varphi(z)$ (фиг. 3). Совокупность



Фиг. 3.

этих кривых обозначим через L . Любую конечную часть кривой L будем считать спрямляемой. Через L_r обозначим часть кривой L , охватывающей Ω_r .

Тогда, идя тем же путем, что и в §§ 2.4 — 2.5, получим:

Теорема 6. Если для функции $\varphi(z)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M_{\Omega(r)}^{\varphi}}{\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}} = 0, \quad (2.36)$$

то в Ω

$$\inf_{\{P_n\}} \left\{ \exp^{-c \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| \right\} = 0, \quad (2.37)$$

где для $|z| \leq r$ в показателе берется интеграл $\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}$;

c — абсолютная постоянная.

Весовую функцию невозможно значительно уточнить, так

как уже при весе $\exp \left\{ -e \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right\}$ указанная аппроксимация,

вообще говоря, невозможна.

Имеет место и более общая теорема:

Если обозначим через $\theta(t)$ возрастающую к бесконечности функцию, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \theta(r)}{\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}} = \infty, \quad (2.38)$$

то при

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M_{\theta(r)/r}}{\lg \theta(r)} = 0 \quad (2.39)$$

существуют полиномы $\{P_n(z)\}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\delta \left(\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right)} |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0. \quad (2.40)$$

Одновременно при этом все имеет место следующая оценка

$$e^{-\delta \left(\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right)} |f(z) - P_n(z)| < e^{-n e^{-\delta^{-1} (2n)}}, \quad (2.41)$$

где $\delta^{-1}(2n)$ решение уравнения

$$2n = \delta \left(\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right). \quad (2.42)$$

Доказательства этих утверждений приводить не будем, так как они по существу не отличаются от доказательств в §§ 2.4—2.5.

§. 3. Весовые равномерные приближения в открытой бесконечной области

3.1. Пусть Ω — совершенно произвольная односвязная бесконечная область на плоскости комплексного аргумента z .

Допустим Ω содержит внутри себя круг $|z| < a$.

Для непрерывного параметра t , меняющегося в промежутке $0 \leq t < \infty$, построим непрерывную последовательность расширяющихся областей Ω_t таких, что при $t_1 < t_2$

$$\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2},$$

Ω_t совпадает с $|z| < a$, а Ω_∞ с Ω .

Области Ω_t подбираем со спрямляемой границей и притом так, что все величины, связанные с областью Ω_t , меняются в зависимости от t непрерывным образом.

Рассмотрим задачу о весовом полиномиальном приближении произвольной голоморфной в Ω функции $f(z)$.

Аппроксимируя $f(z)$ полиномом $P_{n(t)}^{(t)}(z)$ в области Ω_t с точностью $\varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, очевидно, в общем случае, при $t \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \Omega} |P_{n(t)}^{(t)}| = \infty.$$

Мы хотим определить при некотором заданном $\varepsilon(t)$ ($\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) возможно медленно возрастающую функцию аргумента t , огибающую $\max |P_n^{(0)}|$, при всех t .

Допустим, что определили такую огибающую $\Delta(t)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \infty$$

и что $\Delta(t)$ является также мажорантой для $|f(z)|$ в Ω_t .

Тогда очевидно, при «весе» $\frac{\Psi(t)}{\Delta(t)}$, где $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$, возможно подобрать полиномы $\{P_n(z)\}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\psi(t)}{\Delta(t)} |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0,$$

где при данном z считаем t равным нижней грани значений t для Ω_t , покрывающих z , а $\Psi(t)$ — сколь угодно медленно убывающая функция.

В случае ограниченных функций $f(z)$, функция $\Delta(t)$ будет возрастать с определенной скоростью, не ниже некоторой минимальной, зависящей от области Ω .

Задача весового приближения и заключается в том, чтобы определить при ограниченных $f(z)$ эту минимальную скорость возрастания $\Delta(t)$ и охарактеризовать класс функций, содержащий класс ограниченных функций, для которого указанная огибающая $\Delta(t)$ совпадает с огибающей, определенной для ограниченных функций.

3.2. Решим эту задачу.

Обозначим через $M(t)$ некоторую возрастающую функцию

$$M(t) \uparrow \infty,$$

а через M — класс функций $f(z)$, регулярных в Ω и мажорируемых равномерно в любой области Ω_t функцией $M(t)$. Через L_t обозначаем границу Ω_t , а через $l(t)$ ее длину.

Возьмем определенную область Ω_t , соответствующую некоторому значению параметра t . Положение точек B на кривой L_t будем определять по дуговому расстоянию s от некоторой начальной точки A на L_t . Расстояние точки B от границы области Ω обозначим через $\rho(s)$.

Тогда, согласно теореме 2, можем определить полином $P_n(z)$ степени n такой, чтобы в односвязной открытой компоненте Ω_t^* , содержащей $|z| < a$ и оставшейся от Ω_t после выметания кругов $|z - z(s)| < \rho(s)$, имела место оценка

$$|f(z) - P_n(z)| < C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}. \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &< e^{e \cdot e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}}, \\ \beta &= \frac{d_0}{8d}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$d = d(t) = \max |z|$ на L_1 , d_0 — пост., e — абсолютная постоянная, $\delta(t)$ — „минимальное расстояние“, в смысле Лаврентьева, точек кривой L_1 от границы Ω , относительно начала координат в области Ω .

Заметим, что и Ω_1^* определится единственным образом значениями параметра t .

При t достаточно большом Ω_1 содержит круг $|z| < a$.

Выберем теперь n таким, чтобы

$$\begin{aligned} C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} \right\} &\leq \varepsilon(t), \\ C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta(n-1) e^{-\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} \right\} &> \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Получим

$$n = \frac{1}{\beta} \lg \frac{CM(t)}{\varepsilon(t)} \cdot e^{\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} + \theta, \quad (3.3)$$

$|\theta| < 1$.

До сих пор мы оставляли произвольным $M(t)$ и $\varepsilon(t)$. Возьмем теперь $M(t)$ и $\varepsilon(t)$ такими, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M(t) \cdot e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}}{\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} = 0, \quad (3.4)$$

и

$$\varepsilon(t) = M_1^{-1} e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}.$$

Тогда, при сколь угодно малом $\alpha > 0$, беря достаточно большое t , будем иметь при выполнении (3.3),

$$n < e^{(1+\alpha) \int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}},$$

$t > t(\varepsilon)$.

И, при таком n , в Ω_1^*

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon(t).$$

Оценим рост этих полиномов вне Ω_1 .

Так как в $|z| < a$

$$|P_n(z)| < \text{const.},$$

то вне $|z| < a$ и, в частности, вне Ω_t

$$|P_n(z)| < c \cdot e^{n \lg \frac{|z|}{a}} < e^{\lg \frac{|z|}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}}}.$$

Поэтому во всей области Ω возможна следующая аппроксимация

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\lg \frac{|z|}{a}} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0, \quad (3.5)$$

где $\alpha' > \alpha$, а для данного t z — точка области Ω_t^* .

Функция

$$e^{\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}}} \quad (3.6)$$

при любом сколь угодно малом α' и есть искомая функция $\Delta(t)$.

В самом деле. Возьмем определенное значение t и соответствующую область Ω_t^* . Тогда внутри Ω_t^*

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon(t),$$

а вне Ω_t^* , в частности при $|z| > d(t)$,

$$e^{-\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}}} \cdot |f(z) - P_n(z)| < M(t) \cdot \exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} + \\ + \exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} \cdot \exp \left\{ \lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}.$$

Из этого неравенства в силу условий (3.4) и получаем (3.5).

Что (3.6) может служить в качестве функции $\Delta(t)$ доказывается тем, что строится область, для которой при „весе“

$$\exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(\frac{\pi}{4} - \varepsilon) \int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} \quad (3.7)$$

аппроксимация, вообще говоря, невозможна, т. е. невозможна для некоторой функции $f(z)$, удовлетворяющей условию (3.4).

Нетрудно заметить, что пример такой области получится из области, построенной при доказательстве теоремы 3, выметанием кругов радиуса $\rho(s)$.

Во избежание повторений, этого доказывать не будем.

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Если $f(z)$ регулярна в области Ω и удовлетворяет условию (3.4), то в Ω возможна аппроксимация вида (3.5).

При весе (3.7) такая аппроксимация, вообще говоря, невозможна.

Следствие. Для функций $f(z)$, регулярных в Ω и удовлетворяющих условию (3.4), возможна аппроксимация

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-e^{c \cdot \left[\frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^2}} \cdot |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0, \quad (3.8)$$

где c — абсолютная постоянная, а z — точка внутри D_1^* .

Путь получения этого равенства из (3.5) уже известен из предыдущего текста, поэтому (3.8) доказывать не будем.

Доказывается также на примере, о котором говорилось выше, что при замене в выражении веса функции $\left[\frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^2$ на $\left[\frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^{2-\alpha}$ ($\alpha > 0$) аппроксимация, вообще говоря, не будет иметь места.

Как при (3.5), так и при (3.8), возможно дать оценку наилучших приближений. Например, таким же путем, что и в теореме 5, доказывается

Теорема 8. В области Ω для функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\delta(t)}{d(t)} \right]^{\gamma} \cdot \lg \lg M(t) = 0, \quad (3.9)$$

и для любого n можно подобрать полином $P_n(z)$ такой, что

$$e^{-e^{c \left[\frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^{\gamma}}} \cdot |f(z) - P_n(z)| < e^{-n^{\frac{c(\lg n)^{\frac{2}{\gamma}}}{1}}}$$

где $\gamma > 2$, c и a — абсолютные постоянные.

Замена в правой части, в показателе, степени $\frac{2}{\gamma}$ на $\frac{2}{\gamma} - \varepsilon$, вообще говоря, невозможна.

Сектор математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 23 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш. Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion. Münchener Berichte, 1926, стр. 223—229.
2. Альфорс. Untersuchungen zur Theorie der Konformen Abbildung... Acta Soc. sci. Fenn., N. s. 1, Nr. 9 (1930).
3. Варшавский. On conformal mapping of infinite strips. Trans. Am. Math. Soc. 51, № 2, 1942, стр. 280—335.
4. Лазаренцев М. А. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях. ДАН СССР, 4 (1936), стр. 207—210.

5. Мергелян С. Н. О скорости приближения функций многочленами на произвольных континуумах. ДАН СССР, 1953, т. XCI, № 6, стр. 1271—1274.
6. Фабер Г. Über polynomische Entwicklungen, Mathematische Annalen, 1903, Bd. 57, стр. 389—408.
7. Фабер Г. Über Tschebyscheffsche Polynome. Crelle's Journal, 1920, Bd. 150, стр. 79—106.
8. Маркушевич. О полиномах Фабера. Изв. АН СССР, серия математическая, 1940, т. 8, стр. 49—59.
9. Фабер Г. Über Potentialtheorie und Konforme Abbildung (Stzbr. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1920, Jahrgang, München, 1921).

Ա. Լ. Շախիբյան

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՏԻՐՈՒՅՔՆԵՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՆԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուշագրավ է $[1]$, որ եթե E -ն կամայական վահ է վերջավոր բազմություն է միակապ լրացումով, ապա E բազմություն վրա անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիային կարելի է մոտենալ $\{P_n(z)\}$ բազմանդամներով այնպես, որ

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{c}{r^n},$$

որ c -ն հաստատուն է, n -ը բազմանդամի աստիճանը, իսկ $r > 1$ մի հաստատուն է, կոխում $f(z)$ ֆունկցիայից և E բազմությունից:

Եթե f ստանալու համար պետք է արտապատկերել E -ի արտաքին տիրույթը $|w| > 1$ տիրույթի մեջ փոխ միարժեք և կանֆորմ կերպով այնպես, որ

$$w = \phi(z), \quad \phi(\infty) = \infty, \quad \phi'(\infty) > 0$$

և այնուհետև, դիտարկել Գրինի ֆունկցիայի մակարդակի դժերից այն, որը անցնում է «մոտակա» եզրակի կետից, էթե

$$|\phi(z)| = \rho$$

այդ մակարդակի գիծն է, ապա r -ը կարելի է համարել որևէ թիվ վորք ρ -ից: Այսպիսով և ρ թիվը և հետևաբար նաև r -ը կախում ունեն նախ E բազմությունից և ապա նաև $f(z)$ ֆունկցիայից:

Եթե f զնահատման համար կամ պիտի ունենալ ՇԵ տիրույթը $|w| > 1$ շրջանի մեջ արտապատկերող ֆունկցիան կամ էլ օգտագործել կանֆորմ արտապատկերման տեսությունից մեջ հայտնի աղավաղման «զնահատականները»:

Այդպիսի զնահատականներին տվյալ դեպքում հարմար է կամ Վարչավիլու հայտնի անհամապատասխաններ և կամ էլ Անֆորսի երկրորդ անհամապատասխաններ:

Բայց այդ երկու զնահատականները ձևով և բերված բազմությունը մեծ սահմանափակումների ենթարկվում միջոցով, ներկա հոդվածում մենք զնահատում ենք կամայական վերջավոր և անվերջ բազմությունների վրա

հայտնոր՝ ֆունկցիաներին բազմանդամներով մոտենալու հարցը, ձգտելով ստանալ հիշյալ արագության գնահատականը իրեն՝ E բազմաթյան տերմիններով կախված նաև $I(z)$ ֆունկցիայի եզակիությունների «նեոստորությունից»¹ E բազմությունից:

¹ «Նեոստորություն» բառը տեղադրված ունի հատուկ իմաստ, այդ պատճառով դժբախտ է չափերաների մեջ: