

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян

Применение функции напряжений в задаче о кручении
призматических стержней, составленных из
различных материалов

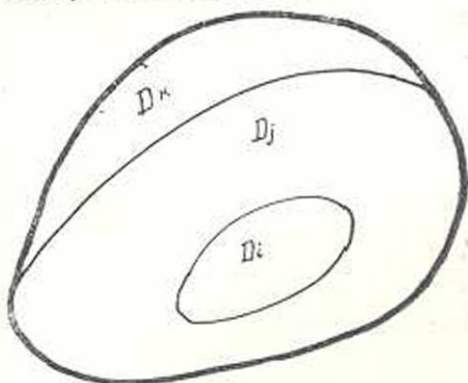
Задача кручения призматического упругого стержня, составленного из различных материалов, через функцию кручения Сент-Венана была поставлена и исследована Н. И. Мусхелишвили [1—3]. В работах [4—7] дано решение рассматриваемой задачи для областей специального типа.

В настоящей работе рассматривается задача кручения составного стержня в постановке через функцию напряжений, аналогичную функции напряжений Прандтля [8] в задаче кручения однородных упругих стержней. В статье доказывается справедливость формулы Прандтля для определения жесткости при кручении составного призматического стержня. Результаты данной работы показывают, что теорию бесконечных систем линейных уравнений с той же эффективностью можно применять для решения конкретных задач о кручении составных стержней, скакой она применена в задачах о кручении однородных призматических стержней [9—16].

В качестве примера решена задача о кручении стержня, составленного из двух стержней прямоугольного поперечного сечения, спаянных по боковым поверхностям в виде тавра.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим кручение стержня, составленного из различных упругих изотропных призматических тел, спаянных между собой вдоль боковых поверхностей. Поперечное сечение стержня D_0 будет состоять из нескольких областей $D_1, D_2, D_3, \dots$, соответствующих различным материалам, разграниченных линиями раздела. Обозначим через L_0 контур области всего поперечного сечения D_0 , а через L_j — линию раздела областей D_j и D_{j+1} (фиг. 1). Будем рассма-



Фиг. 1.

тривать случай, когда линии раздела либо целиком находятся внутри области D_0 , либо пересекаются с ее контуром L_0 . Представим компоненты упругого перемещения при кручении в виде

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = \vartheta \varphi(x, y),$$

где ϑ — степень закручивания, а $\varphi(x, y)$ — функция кручения.

Для касательных напряжений будем иметь:

$$\tau_{xz} = \vartheta \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = \vartheta \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right).$$

Здесь μ — модуль сдвига материала в соответствующей области D_i .

Подставляя выражения τ_{xz} и τ_{yz} из (2) в уравнение равновесия элемента стержня

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

находим, что функция кручения $\varphi(x, y)$ в каждой из областей D_i удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3)$$

Условие равновесия элемента линии раздела и условие, что боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, на непрерывную в области D_0 функцию φ налагают следующие условия:

а) нормальная производная функция φ на границе областей D_i и D_j претерпевает разрыв:

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} - \mu_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} (\mu_1 - \mu_2) [y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y)]. \quad (4)$$

Здесь ν — направление нормали к линии раздела L_{ij} , внешней по отношению к области D_i .

б) на контуре области поперечного сечения D_0 функция φ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y), \quad (4')$$

где ν — направление внешней нормали к контуру L_0 области D_0 .

Вводим функцию напряжения $F(x, y)$ с помощью следующих соотношений

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} = \mu_1 \vartheta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} &= -\vartheta \frac{\partial F}{\partial x} = \mu_1 \vartheta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения равновесия (2), используя соотношения (5), найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция F в области D_1

$$\Delta F = -2\mu_1. \quad (6)$$

Внося значения $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ из (5) в условие (4), получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\nu, x) - \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\nu, y) = 0. \quad (7)$$

Используя в (7) известные геометрические соотношения

$$\cos(\nu, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{dx}{ds}, \quad (8)$$

где ds — дифференциал дуги контура L_0 , имеем

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

или

$$F = \text{const} = C_0 \quad \text{на } L_0. \quad (9)$$

Подставляя выражения производных функции φ из (5) в (3) и используя (8), получаем условие, которому удовлетворяет функция напряжений F на линии раздела L_{ij} :

$$F_i - F_j = \text{const} = C_{ij}. \quad (10)$$

Определяя из (5) производные функции F и составляя выражение ее нормальной производной, находим:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_j}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds}.$$

Из условия непрерывности функции φ на линиях раздела L_{ij} следует непрерывность ее производной

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \frac{d\varphi_j}{ds} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (12), из соотношений (11) получаем условие, которому удовлетворяет разрыв нормальной производной функции напряжений на линиях раздела:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_i}{\partial \nu} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_j}{\partial \nu} = \text{const} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (13)$$

Неопределенными остались постоянные C_0 и C_{ij} . Но нетрудно заметить, что если $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению (7) и условиям (9), (10) и (13), функция $F(x, y) + c$, где c — произвольная постоянная,

также будет удовлетворять всем этим условиям даже тогда, когда постоянные c_{ij} — фиксированы. Как видно из соотношений (5), изменение функции $F(x, y)$ на постоянную величину не отражается на решении рассматриваемой задачи. Поэтому можно положить, что

$$F = 0 \text{ на } L_0. \quad (14)$$

Таким же образом можно показать, что для скачков c_{ij} функции напряжения $F(x, y)$ на замкнутых линиях раздела L_{ij} можно положить:

$$c_{ij} = 0. \quad (15)$$

В самом деле, из математической постановки задачи определения функции из условий (7), (13) и (14) видно, что изменение постоянной c_{ij} на замкнутой линии раздела эквивалентно изменению на постоянную величину функции $F(x, y)$ только внутри контура L_{ij} , которое, согласно соотношениям (5), не отражается на решении рассматриваемой задачи. На линиях же раздела L_{ij} , имеющих общую точку с контуром L_0 , функция $F(x, y)$ должна быть непрерывной, т. е. для этих линий раздела также

$$c_{ij} = 0. \quad (16)$$

Действительно, если условие $F_i - F_j = 0$ выполняется для одной точки линии раздела L_{ij} , то оно должно выполняться для всех точек этой линии. Такой точкой может служить точка пересечения L_{ij} с контуром L_0 , так как на L_0 , согласно (14), имеем:

$$F_i = F_j = F = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача о кручении составного упругого стержня свелась к определению в области поперечного сечения D_0 непрерывной функции $F(x, y)$, которая в каждой из областей D_i удовлетворяет уравнению Пуассона [7] и на линиях раздела L_{ij} ее нормальная производная претерпевает разрыв согласно условию (13).

С целью приблизить постановку рассматриваемой задачи к постановке задачи о кручении однородных сплошных стержней, введем новую функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом:

$$F_i(x, y) = \mu_i \Phi_i(x, y), \quad (18)$$

где $\Phi_i(x, y)$ — значение функции $\Phi(x, y)$ в области D_i .

Для определения функции $\Phi(x, y)$ будем иметь:

а) уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = -2, \quad (19)$$

б) условие непрерывности нормальных производных функции $\Phi(x, y)$ на линиях раздела

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu} \text{ на } L_{ij}, \quad (20)$$

в) условие разрыва функции

$$\Phi_i = \frac{P_i}{P_0} \Phi_j \text{ на } L_{ij}. \quad (21)$$

г) контурное условие

$$\Phi = 0 \text{ на } L_0. \quad (22)$$

Таким образом, задача о кручении составного стержня в данной постановке отличается от задачи о кручении однородного сплошного стержня единственным коэффициентом в условии (21). Это обстоятельство показывает, что теория бесконечных систем линейных уравнений может быть применена при решении конкретных задач о кручении составных стержней с той же эффективностью, с какой она применена в задачах о кручении однородных стержней.

Заметим, что постановка задачи о кручении однородных стержней, поперечные сечения которых суть многосвязные области, получается из постановки рассматриваемой задачи при μ_i , стремящемся к нулю для всех внутренних областей D_i , когда все линии раздела являются замкнутыми линиями и целиком лежат внутри области поперечного сечения D_0 .

Предположим, что D_i есть внутренняя область, ограниченная замкнутой линией раздела L_{ij} , а D_j — область, окружающая область D_i . При μ_i , стремящемся к нулю, функция напряжения $F_i(x, y)$, согласно уравнению (7), в области D_i стремится к некоторой гармонической функции, а нормальная производная функции $F_i(x, y)$ на контуре области D_i , согласно условию (13), будет стремиться к нулю. Но, как известно, гармоническая в некоторой односвязной области функция с нулевой нормальной производной на контуре тождественно постоянна. Поэтому и в силу непрерывности функции напряжения $F(x, y)$ в области D_0 эта функция в области D_i будет стремиться к некоторой функции, которая на линии раздела L_{ij} постоянна, т. е. будем иметь условие, которому удовлетворяет функция напряжения при кручении на внутренних контурах области поперечного сечения стержня, когда эта область многосвязна.

2. *Обобщение формулы Бредта.* Как известно [8], в задаче о кручении упругих однородных стержней постоянные значения функции напряжений на внутренних контурах многосвязных областей поперечного сечения стержня определяются при помощи теоремы Бредта. Легко показать, что теорема Бредта о циркуляции касательных напряжений, выражающая условие однозначности упругих перемещений в рассматриваемой задаче для замкнутых линий раздела, целиком лежащих в области поперечного сечения D_0 , выполняется тождественно в том смысле, в каком она выполняется для односвязных областей.

Предположим, что односвязная область D_i окружена областью D_j . Тогда для произвольного контура C , лежащего в области D_i , а сле-

довательно и для замкнутого контура L_{ij} , справедлива теорема Бредта:

$$\int_{L_{ij}} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\mu_i \Omega_i. \quad (23)$$

Здесь Ω_i — площадь области D_i .

Используя условие (13), из (2) получаем

$$\int_{L_{ij}} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega_i \mu_i. \quad (24)$$

Соотношение (24) показывает, что теорема Бредта в вышеупомянутом смысле выполняется тождественно не только для замкнутой линии раздела, но и для произвольного замкнутого контура C , целиком лежащего в многосвязной области D_j .

Используя условие (13), формулу Бредта можно обобщить в рассматриваемой задаче и для таких замкнутых контуров C , которые проходят через несколько областей D_i . В этом случае область, ограниченная контуром C , линиями раздела разбивается на некоторые области, в каждой из которых справедлива теорема Бредта

$$\frac{1}{\mu_i} \Phi \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega_i^*. \quad (25)$$

Здесь i принимает значения, соответствующие областям D_i , через которые проходит контур C , Ω_i^* — площадь пересечения области D_i с областью, ограниченной контуром C , а интегрирования производятся по контурам этих областей пересечения.

Суммируя соотношения (25) для всех вышеупомянутых i и принимая во внимание условие (13), получаем обобщенную формулу Бредта:

$$\int_C \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega, \quad (26)$$

где $\Omega = \sum \Omega_i^*$ — площадь области, ограниченной контуром C .

Как видно из (26), обобщенная формула Бредта не имеет того непосредственного физико-геометрического истолкования, какое она имеет в задаче о кручении однородных стержней.

3. *Определение жесткости при кручении.* Для крутящего момента M , согласно (5), имеем:

$$M = -\Phi \iint_{D_i} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy. \quad (27)$$

С целью упростить выражение (27), представим его в виде:

$$M = -\Phi \sum_i \iint_{D_i} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy.$$

Здесь можно произвести интегрирование по частям, так как функция F со своими производными непрерывна в каждой из областей D_i :

$$M = -\oint_{L_i} F(x, y) [x \cos(\nu, x) + y \cos(\nu, y)] ds + \\ + 2\oint \sum_i \iint_{D_i} F(x, y) dx dy. \quad (28)$$

Здесь L_i — контур области D_i , а ν — внешняя нормаль к L_i .

Часть контурных интегралов в (28) обращается в нуль вследствие (14). По остальным частям контуров L_i интегрирование совершается два раза в противоположных направлениях. Интегралы, распределенные по этим частям контура L_i , вследствие непрерывности функции $F(x, y)$, взаимно уничтожаются. Поэтому формула (28) примет вид:

$$M = \oint C, \quad (29)$$

где

$$C = 2 \iint_{D_0} F(x, y) dx dy \quad (30)$$

есть жесткость на кручение составного призматического стержня.

Таким образом, мы доказали, что обычная формула, связывающая крутящий момент с функцией напряжений, справедлива и в данном случае.

4. *Кручение составного тавра.* В качестве примера приложения теории бесконечных систем линейных уравнений к задаче о кручении составных стержней рассмотрим задачу о кручении стержня, составленного из двух стержней прямоугольника поперечного сечения, спаянных по боковым поверхностям в виде тавра (фиг. 2).

Обозначим через μ_1 и μ_2 модули сдвигов составляющих стержней.

Решение рассматриваемой задачи будем искать с помощью функции $\Phi(x, y)$. Вследствие симметрии поперечного сечения стержня достаточно определить функцию $\Phi(x, y)$ только в областях I, II и III, потребовав при этом, чтобы на оси симметрии $x = 0$ нормальная производная функции Φ равнялась нулю.

Функцию $\Phi(x, y)$ будем искать в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & \text{в области I} \\ \Phi_2(x, y) & \text{II} \\ \Phi_3(x, y) & \text{III} \end{cases} \quad (31)$$

На основании вышеизложенного функции Φ_1 , Φ_2 , и Φ_3 должны удовлетворять следующим условиям:

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \Delta\Phi_3 = -2, \quad (32)$$

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_1(x, d) = \Phi_2(a, y) = 0, \quad (33)$$

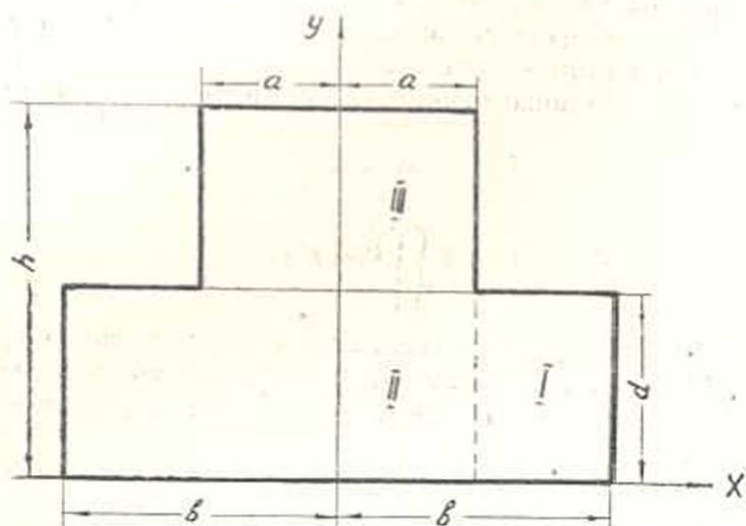
$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad (34)$$

$$\Phi_1(b, y) = \Phi_2(x, h) = \Phi_3(x, 0) = 0, \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right|_{y=d} = \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right|_{y=d}, \quad (36)$$

$$\Phi_1(a, y) = \Phi_2(a, y), \quad \Phi_2(x, d) = \mu_0 \Phi_3(x, d), \quad (37)$$

где $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.



Фиг. 2.

Функции $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ и $\Phi_3(x, y)$ представим в виде:

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi}{d} y, \quad (38)$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{2a} (a-x), \quad (39)$$

$$\Phi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \sin \frac{k\pi}{d} y. \quad (40)$$

Используя условия (32) и (33), для функций $\varphi_k(x)$ и $f_k(y)$ получаем следующие выражения:

$$\varphi_k(x) = B_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x-b)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}} + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d} x}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}} \right), \quad (41)$$

$$i_k(y) = D_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2a} (y-h)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} + \frac{16a^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2a} y}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right). \quad (42)$$

Здесь B_k и D_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (36) и (37).

Рассматривая функции $\psi_k(x)$ ($k=1, 2, 3 \dots$), как коэффициенты Фурье в разложении функции $\Phi_k(x, y)$ в тригонометрический ряд и используя условия (32), (35), (36) и (37), для $\psi_k(x)$ находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & E_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d} x + \frac{4d^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{k^3 \pi^3} + \\ & + \frac{8a^2 k (-1)^{k-1}}{\mu_0 \pi} \sum_{n=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{f_n(d) \sin \frac{n\pi}{2a} (-x)}{n^2 d^2 + 4a^2 k^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

где E_k ($k=1, 2, 3 \dots$) — новые постоянные интегрирования.

На основании (37), (38) и (40) имеем:

$$B_k = E_k \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (a-b)} + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (a-b)}. \quad (44)$$

Из условий (36), используя (44), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений относительно неизвестных $f_n(d)$ и E_k :

$$\begin{aligned} \frac{k f_k(d)}{2ad \mu_0} \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right] = & \frac{k}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^{n+1} E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{d}}{n^2 + \left(\frac{kd}{2a} \right)^2} + \\ & + \frac{16}{k^2 \pi^3} \frac{a}{d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right] + \frac{4}{n\pi^2}, \end{aligned} \quad (45)$$

($n=1, 3, 5 \dots$)

$$\frac{k (-1)^{k+1} E_k}{ad} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] =$$

$$= \frac{4k}{\pi d^2 \mu_0} \sum_{n=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{n I_n(d)}{n^2 + \left(\frac{2ak}{d}\right)^2} - \frac{4}{k^2 \pi^2} \frac{d}{a} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \right. \\ \left. + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}}. \quad (46)$$

($k = 1, 2, 3 \dots$).

Введем следующие обозначения:

$$A_k = k(-1)^{k+1} \frac{F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{ad}, \quad C_k = \frac{k I_k(d)}{2\mu_0 ad}. \quad (47)$$

Тогда для новых неизвестных A_k и C_k будем иметь следующие две бесконечные системы уравнений:

$$C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} A_n + \alpha_k \quad (k = 1, 3, 5 \dots), \quad (48)$$

$$A_k = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \beta_{kn} C_n + \beta_k \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (49)$$

где

$$\alpha_{kn} = \frac{kd}{\pi a \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right] \left[n^2 + \left(\frac{kd}{2a}\right)^2 \right]},$$

$$\beta_{kn} = \frac{8ka}{\pi d \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] \left[n^2 + \left(\frac{2k\pi}{d}\right)^2 \right]},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a}} \left\{ \frac{4}{k^2 \pi^2} + \frac{16a}{k^2 \pi^2 d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}} \left(\operatorname{cth} k\pi \frac{h-d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} \right) \right] \right\},$$

$$\beta_k = -\frac{4}{k^2 \pi^2} \frac{d}{a} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}}.$$

Покажем, что совокупность систем (48) и (49) вполне регулярна. Для этого, как известно, достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{kn}| < 1 - \rho_1 \text{ и } \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} |\beta_{kn}| < 1 - \rho_2 \text{ для всех } k,$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ — постоянные.

Действительно

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{kn}| &= \frac{kd}{\pi a \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{kd}{2a} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} - \frac{a}{k\pi d} \right] < \\ &< \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi (h-b)}{2a}} = 1 - \rho_1, \\ &\frac{1 + \mu_0}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}} \end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \frac{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d)}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}} > 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} |\beta_{kn}| &= \frac{8ka}{\pi d \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right]} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{2ka}{d} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a)} < \frac{1}{2}, \\ &\frac{\operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}} \end{aligned}$$

Таким образом, вполне регулярность совокупности бесконечных систем (48) и (49) доказана для произвольного отношения модулей сдвига μ_0 и произвольных размеров поперечного сечения рассматриваемого стержня.

Для жесткости стержня C , согласно формуле (30), имеем:

$$\begin{aligned} C &= 2 \iint_{D_0} F(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_0} \mu_1 \Phi(x, y) dx dy = \\ &= 4\mu_1 \int_0^d dy \int_0^b \Phi_1(x, y) dx + 4\mu_1 \int_0^d dy \int_0^a \Phi_3(x, y) dx + 4\mu_2 \int_0^h dy \int_0^a \Phi_2(x, y) dx. \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя значения $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ и $\Phi_3(x, y)$ из (38), (39), (40), (42), (43) в (50) и принимая $h=b$, $d=2a$, окончательно получим:

$$C = \mu_1 b d^3 \left\{ \frac{1}{3} \left[2 + \mu_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] - \frac{64}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\operatorname{th} k\pi\lambda - \right. \right. \\ \left. - \operatorname{ch} k\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - \operatorname{chk}\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda (\operatorname{cth} k\pi(\lambda-0.5) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-0.5)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{th} k\pi\lambda + \operatorname{cth} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{sch} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{sh} k\pi\lambda \operatorname{sh} k\pi - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} k\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda (\operatorname{cth} k\pi(\lambda-1) + \operatorname{sch} k\pi(\lambda-1))] \right] + \\ \left. + \frac{4}{\pi^2 \lambda \mu_0} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{C_k}{k^2} [\operatorname{th} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-1) + \mu_0^2 (\operatorname{cth} k\pi - \operatorname{csch} k\pi)] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi^2 \lambda} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{A_k}{k^2} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{cth} k\pi(\lambda-0.5) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-0.5) \right] \right\}. \quad (51)$$

$$\lambda = \frac{b}{d}.$$

Значения коэффициентов A_k и C_k с избытком и с недостатком определяются из бесконечных систем (48) и (49). Используя эти значения коэффициентов A_k и C_k в формуле (51), находим значения C для различных μ_0 и λ . В таблице 1 приведены средние арифметические значений безразмерной величины $\frac{C}{\mu_1 b d^3}$ с избытком и с недостатком для нескольких значений параметров μ_0 и λ . В последнем столбце табл. 1

Таблица 1

$\mu_0 \backslash \lambda$	2	3	4	5	8	10	Погрешности в %
0,1	1,7104	2,4657	2,8478	3,0783	3,4239	3,5540	2,45
0,2	1,1252	1,5239	1,7326	1,8517	2,1830	2,1003	1,26
0,3	0,9706	1,2180	1,3876	1,4656	1,5828	1,6268	0,80
0,5	0,8080	0,9781	1,0676	1,1207	1,2005	1,2305	0,63
1	0,7167	0,8117	0,8581	0,8935	0,9291	0,9392	0,48
2	0,6839	0,7392	0,7642	0,7781	0,808	0,8070	0,41
3	0,6868	0,7185	0,7361	0,7444	0,7570	0,7622	0,35
5	0,6852	0,70964	0,7116	0,7183	0,7240	0,7267	0,31
10	0,6848	0,69249	0,6970	0,6975	0,6985	0,6996	0,28

приведены максимальные относительные погрешности, соответствующие различным значениям параметра μ_0 .

Используя соотношения (18), (31), (40), (43), (44), (47) и подставляя значение функции $\Phi_3(x, y)$ в (5), для τ_{xz} в точке (0,0) находим:

$$\tau_{xz}(0,0) = \mu_1 \frac{Md}{C} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} + \pi \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{C_k}{\operatorname{sh} k\pi} \right),$$

где M — внешний крутящий момент.

В таблице 2 приведены средние арифметические значений безразмерной величины $\frac{\tau_{xz}(0,0) bd^2}{M}$ с избытком и недостатком для различных μ_0 и λ . Там же приведены максимальные относительные погрешности.

Таблица 2

$\mu_0 \backslash \lambda$	2	3	4	5	8	10	Погрешности в %
0,1	0,7680	0,5881	0,4679	0,4328	0,3891	0,3749	3,15
0,2	1,1897	0,8499	0,7502	0,7016	0,6240	0,6189	1,54
0,3	1,2958	1,0419	0,9140	0,8654	0,8013	0,7796	0,98
0,5	1,5124	1,2560	1,1561	1,1013	1,0381	1,0030	0,77
1	1,6158	1,4369	1,3614	1,3031	1,2574	1,2437	0,59
2	1,5962	1,4984	1,4421	1,4266	1,3810	1,3754	0,47
3	1,5639	1,5023	1,4694	1,4529	1,4289	1,4191	0,40
5	1,5291	1,4826	1,4728	1,4650	1,4536	1,4480	0,36
10	1,4956	1,4745	1,4754	1,4741	1,4723	1,4699	0,30

Сектор математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 3 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées. C. R. Paris, t. 194, 1932.
2. Мусхелишвили Н. И. К задаче кручения и изгиба упругих брусков, составленных из различных материалов. Изв. АН СССР, вып. 7, 1932.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изв. АН СССР, М.—Л., 1954.
4. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Известия АН СССР, № 3, 1933.
5. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. I, вып. 2, 1933.

6. Рухадзе А. К. Кручение и изгиб бруса, составленного из упругих материалов, ограниченных энтропонидами. Труды Тбилисского мат. инст., т. I, 1937.
7. Шерман Д. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инженерный сборник, т. X, 1951.
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
9. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948, ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
10. Абрамян Б. Л. Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением. ПММ, т. XIII, вып. 5, 1949.
11. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
12. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде трапеции. ПММ, т. XV, вып. 1, 1950.
13. Александрия Е. А. О кручении некоторых призматических стержней. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.
14. Александрия Е. А. Кручение двутавровой балки. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
15. Гулакян Н. О. О кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии продольных трещин. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.
16. Александрия Е. А., Гулакян Н. О. Кручение стержней с сечениями в виде швеллера и тавра. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 3, 1953.

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՊՐԻԶՄԱՅԱԶԵՎ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է տարրեր նյութերից կազմված պրիզմայաձև ձողերի սյուրման խնդիրը լարման ֆունկցիայի միջոցով: Ձողի լայնական հատվածքի տարրեր նյութերին համադաստատանող տիրույթների բաժանման գծերը կարող են կամ ամբողջությամբ գտնվել լայնական հատվածքի ներսում, կամ հատվել նրա եզրագծի հետ: Քննարկվող խնդրի համար քննադատվում է Բրեզայի թևերում և Պրանգտլի բանաձևը՝ միասին ձողի սյուրման գեոքսում կաշառվածները որոշելու համար: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ բազադրյալ ձողերի սյուրման վերաբերյալ կանխորոշ խնդիրներ լուծելու գեոքսում գծային հավասարումների անվերջ սխառեմների առաջնությունը կարող է կիրառվել նաև էֆեկտիվության, ինչ էֆեկտիվության և այն կիրառվել է միասին ձողերի սյուրման վերաբերյալ խնդրի լուծման գեոքսում:

Որպես օրինակ լուծվում է կազմային մակերևույթներով իրար հետ զոգված, ուղղանկյուն հատվածք ունեցող երկու ձողերով կազմված տափրի սյուրման խնդիրը:

Այսպիսի գնահատմամբ հաշվվում են կոշտություն և լարվածությունը մի կետում՝ լայնական հատվածքի չափերի և նյութերի սահման մոդուլների հարաբերությունների տարրեր արժեքների գեոքսում և այդ մեծությունների համար կազմվում են աղյուսակներ: