

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

Оценки для производных целых функций конечного
порядка и нормального типа

В настоящей работе производятся оценки для производных целых функций произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и нормального типа, ограниченных в угловых областях комплексной плоскости. Эти оценки будут иметь существенное значение для установления обратных теорем о наилучшем приближении целыми функциями в угловых областях.

1°. Некоторые предварительные леммы

Приводим некоторые леммы, которые понадобятся нам для доказательства основной теоремы настоящей работы.

Лемма 1. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и типа σ , для которой

$$\sup_{|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty. \quad (1.1)$$

Для любого $c (0 \leq c < +\infty)$ на кривой $\Gamma_c(c)$ с параметрическим уравнением $r^2 \cos \rho \theta = c \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\rho} \right)$ имеет место оценка

$$|f(re^{i\theta})| \leq Me^{c\sigma}. \quad (1.2)$$

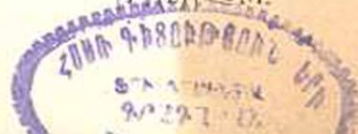
Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно малое фиксированное число. Рассмотрим функцию

$$F_\varepsilon(z) = f(z)e^{-(\sigma + \varepsilon)z^2},$$

где z^ρ обозначает ту однозначную и аналитическую в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ ветвь функции z^ρ , которая принимает положительное значение при действительном положительном z .

Ясно, что при $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$,

$$|F_\varepsilon(z)| \leq M.$$



Но при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти число $r_\varepsilon > 0$ так, чтобы имели

$$|f(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p}$$

при $|z| \geq r_\varepsilon$. Поэтому при $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$ и $|z| \geq r_\varepsilon$,

$$|F_\varepsilon(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p} e^{-(z+\varepsilon)|z|^p \cos(\rho \arg z)}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |F_\varepsilon(x)| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}x} = 0.$$

Обозначим $M' = \sup_{0 < x < \infty} |F_\varepsilon(x)|$. Но при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем

$$|F_\varepsilon(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p},$$

поэтому в угле $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2\rho}$ с раствором $\frac{\pi}{2\rho}$ функция $F_\varepsilon(z)$ растёт как $e^{|z|^p}$, а на его сторонах ограничена.

Отсюда, по теореме Фрагмен-Линделёфа, следует, что

$$\sup_{0 < \arg z < \frac{\pi}{2\rho}} |F_\varepsilon(z)| \leq \max\{M, M'\} = M'.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sup_{-\frac{\pi}{2\rho} < \arg z < 0} |F_\varepsilon(z)| \leq M''.$$

Поэтому из двух последних неравенств получим

$$|F_\varepsilon(z)| \leq M''$$

при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Покажем, что $M'' = M$. Действительно, если $M' = M''$, то $F_\varepsilon(z)$ принимает значение M' в некоторой точке $x_0 > 0$ и по принципу максимума $F_\varepsilon(z)$ постоянна. Если же она достигается в точке $x = 0$, то $M' \leq M$ и $M'' = M$.

Если же $M' < M''$, то $M'' = M$. Поэтому во всех случаях

$$\sup_{|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}} |F_\varepsilon(z)| \leq M,$$

откуда следует оценка

$$|f(z)| \leq Me^{(\sigma+\varepsilon)|z|^p \cos(\rho \arg z)}$$

Но так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\sup |f(z)| \leq Me^{\sigma|z|^p \cos(\rho \arg z)}$$

при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Следовательно, на кривой $|z|^p \cos(\rho \arg z) = c$ для функции $f(z)$ получим оценку (1.1) леммы.

Нам для дальнейших целей необходимо изучить некоторые свойства кривой

$$\Gamma_p(c) \left\{ r^p \cos \rho \theta = c; \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad (0 \leq c < +\infty) \right.$$

при значениях параметра ρ , удовлетворяющих условию $\frac{1}{2} \leq \rho < +\infty$.

Заметим, что кривая $\Gamma_p(c)$ симметрична относительно вещественной положительной полуоси и лежит внутри угла $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$.

При частном значении $\rho = 1$ $\Gamma_1(c)$ совпадает с прямой $r \cos \theta = c$, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстояние c . При $\rho = \frac{1}{2}$ $\Gamma_{\frac{1}{2}}(c)$ совпадает с параболой

$$r = \frac{2c^2}{1 + \cos \theta}.$$

Проведем нормаль к кривой $\Gamma_p(c)$ в ее точке $re^{i\theta}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}$ ($\frac{1}{2} \leq \rho < +\infty$). Обозначим через $R_p(\theta)$ длину отрезка указанной нормали, лежащей в области, ограниченной лучом $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ и кривой $\Gamma_p(c)$. По причине симметричности $\Gamma_p(c)$ относительно луча $\theta = 0$, мы будем изучать свойства кривой $\Gamma_p(c)$, ограничиваясь лишь ее верхней половиной, определяемой из условия $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Лемма 2. Функция

$$R_p(\theta) = \left[\frac{c}{\cos \rho \theta} \right]^{\frac{1}{p}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]} \quad (1.3)$$

в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ монотонно убывает, если $\rho > 1$ и монотонно возрастает, если $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$. При $\rho = 1$, $R_1(\theta) = c$.

Доказательство. Обозначим через ψ угол между касательной к кривой $\Gamma_p(c)$ в точке $ge^{i\theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}$) и радиус-вектором той же точки.

Из уравнения $r^p \cos \rho\theta = c$ получим:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{r'} = \operatorname{ctg} \rho\theta,$$

поэтому

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \rho\theta. \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что если $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$, то $0 < \psi < \frac{\pi}{2\rho}$.

Рассмотрим треугольник, образованный лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$, радиус-вектором точки $ge^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2\rho}$) кривой $\Gamma_p(c)$ и отрезком $R_p(\theta)$ нормали к кривой $\Gamma_p(c)$, проведенной в точке $ge^{i\theta}$.

Если обозначим через $r_0 e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ точку пересечения указанной нормали с лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$, то в вершинах 0 , $r_0 e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$, $ge^{i\theta}$ нашего треугольника соответствующие внутренние углы в силу (1.4) будут

$$\frac{\pi}{2\rho} - \theta, \quad \pi - \frac{\pi}{2\rho} - (\rho - 1)\theta, \quad \rho\theta.$$

Поэтому по теореме синусов имеем:

$$\frac{R_p(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)} = \frac{r_0}{\sin \rho\theta} = \frac{r}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta\right]}, \quad (1.5)$$

откуда, имея в виду, что на кривой $\Gamma_p(c)$

$$r^p \cos \rho\theta = c,$$

следует формула (1.3).

Из (1.3) после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{R_p'(\theta)}{R_p(\theta)} &= -(\rho - 1) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] + \operatorname{tg} \rho\theta - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) = \\ &= -\operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] \left\{ \rho + \operatorname{tg} \rho\theta \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что так как при $\rho \geq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, имеем $0 <$

$\leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \frac{\pi}{2\rho} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $R_\rho(\theta) \leq 0$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2\rho})$, т. е. $R_\rho(\theta)$ монотонно убывает.

Если же $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, то при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \leq \pi$ и поэтому $\operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] \leq 0$. Следовательно, для установления утверждения леммы о том, что $R_\rho(\theta)$ монотонно возрастает при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, достаточно показать, что

$$y(\theta) = \operatorname{tg} \rho \theta \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) > -\rho$$

при указанных условиях.

Но при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $\operatorname{tg} \rho \theta \geq 0$, а при $\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) \geq 0$, поэтому достаточно лишь установить, что $y(\theta) > -\rho$ в интервале $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 > -\rho$ и при $0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$, $y(\theta) < 0$, поэтому в некоторой внутренней точке θ_0 ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$) функция $y(\theta)$ достигает своего номинального значения, где мы должны иметь $y'(\theta_0) = 0$.

Но

$$y'(\theta) = \frac{\rho}{\cos^2 \rho \theta} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right)} \operatorname{tg} \rho \theta,$$

поэтому в точке θ_0 должны иметь

$$\frac{\sin \rho \theta_0}{\sin \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)} = -\rho \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)}{\cos \rho \theta_0}$$

и, следовательно,

$$\min y(\theta) = y(\theta_0) = -\rho \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)}{\cos^2 \theta_0 \rho} = -\rho \frac{\cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0 \right)}{\cos^2 \theta_0 \rho}. \quad (1.7)$$

Так как $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, то $0 < \rho\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ и $\rho\theta_0 \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что

$$0 < \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0\right) \leq \cos\rho\theta_0. \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует, что

$$\min \nu(\theta) \geq -\rho,$$

т. е. лемма полностью доказана.

В заключение заметим, что, таким образом, при

$$\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \quad \min R_\rho(\theta) = c^{1/\rho} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}$$

при $\rho > 1, \max R_\rho(\theta) = c^{1/\rho}. \quad (1.9)$

Лемма 3. Пусть r_0 имеет тот же смысл, что и в лемме 2, тогда

$$r_0 = \left[\frac{c}{\cos \rho \theta} \right]^{\frac{1}{\rho}} \frac{\sin \rho \theta}{\sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right]}, \quad (1.10)$$

при этом $r_0 = r_0(\theta)$ монотонно возрастает в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ при любом $\rho \geq \frac{1}{2}$. В случае же, когда $\rho = \frac{1}{2}$ $r_0 = r \geq c$.

Доказательство. Формула (1.10) следует из (1.5) и из того, что на $\Gamma_\rho(c)$ $r^\rho \cos \rho = c$.

Из (1.10) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r'_0(\theta)}{r_0(\theta)} &= \rho \operatorname{ctg} \rho \theta + \operatorname{tg} \rho \theta - (\rho - 1) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] = \\ &= -\rho \left\{ \operatorname{ctg} \rho \theta - \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] \right\} + \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] + \\ &+ \operatorname{tg} \rho \theta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right)}{\sin \rho \theta \sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right]} \left[\rho + \operatorname{tg} \rho \theta \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

Но при $\rho \geq \frac{1}{2}$ и $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем $0 < \frac{\pi}{2\rho} - \theta \leq \pi, 0 \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \leq$

$\leq \pi$, $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$. Наконец, в доказательстве леммы 2 было показано, что всегда при тех же условиях $\rho + \operatorname{tg} \rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) > 0$. Поэтому $r'_0(\theta) > 0$, т. е. $r_0(\theta)$ монотонно возрастает в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho} \right)$ при любом $\rho > \frac{1}{2}$.

Из (1.10) ясно также, что при $\rho = \frac{1}{2}$

$$r_0 = r = \left(\frac{c}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 > c^2.$$

Лемма 4. Окружность с центром в точке $r_0(\theta)e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ и с радиусом $R_0(\theta)$ имеет с кривой $\Gamma_\rho(c)$ лишь одну общую точку $re^{i\theta}$.

Доказательство. Пусть $r_1e^{i\theta_1}$ произвольная точка кривой $\Gamma_\rho(c)$.

Обозначим $R = |r_0e^{i\frac{\pi}{2\rho}} - r_1e^{i\theta_1}|$.

Рассматривая треугольник с вершинами в точках $r_0e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$, 0 , $r_1e^{i\theta_1}$, будем иметь:

$$R^2 = r_0^2 - 2r_0r_1\cos\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1\right) + r_1^2.$$

Покажем, что R , как функции от точки $r_1e^{i\theta_1}$, достигает своего минимального значения $R_0(\theta)$ лишь в точке $re^{i\theta}$. Очевидно, это эквивалентно утверждению леммы.

Имеем:

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2r_1 - 2r_0\cos\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1\right) - 2r_0r_1\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1\right)\frac{d\theta_1}{dr_1}.$$

Но из уравнения $r_1^2 \cos \rho \theta_1 = c$ имеем:

$$r_1 \frac{d\theta_1}{dr_1} = \operatorname{ctg} \rho \theta_1,$$

и поэтому

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2 \left\{ r_1 - r_0 \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta_1 \right]}{\sin \rho \theta_1} \right\}. \quad (1.11)$$

Обозначим через $r_{1,0}e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ точку пересечения нормали к кривой

$\Gamma_\rho(c)$ в точке $r_1 e^{i\theta_1}$ с лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$. По формуле (1.10)

$$r_{1,0} = r_1 \frac{\sin \rho \theta_1}{\sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta_1 \right]} \quad (1.12)$$

и, следовательно, из (1.11) и (1.12) следует, что

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2r_1 \left(1 - \frac{r_0}{r_{1,0}} \right).$$

Но по лемме 3 $r_{1,0} = r_{1,0}(\theta_1)$ — монотонно возрастающая функция от θ_1 , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dR^2}{dr_1} &< 0 && \text{при } \theta_1 < \theta, \\ \frac{dR^2}{dr_1} &> 0 && \text{при } \theta_1 > \theta, \end{aligned}$$

при этом

$$\left. \frac{dR^2}{dr_1} \right|_{r_1=r} = 0.$$

Это значит, что функция R^2 имеет абсолютный минимум лишь в точке $\theta = \theta_1$ и, очевидно, что $\min R = R_\rho(\theta)$.

Отметим, что, когда $\rho = \frac{1}{2}$, окружность с центром в любой точке x_0 луча $-\infty < x \leq 0$ и с радиусом c^2 не пересекается с параболой $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} = c$, если $x_0 > 0$, а при $x_0 = 0$ соприкасается с нею в единственной точке $(c^2, 0)$.

Пусть $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$ ($r_0 > 0$) произвольная точка, находящаяся на лучах $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$. Опишем вокруг точки $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$ окружность K_R произвольного радиуса $R > 0$. По лемме 4 в семействе кривых $\{\Gamma_\rho(c)\}$ ($0 \leq c < +\infty$) существует единственная кривая $\Gamma_\rho[c(R)]$, соприкасающаяся с нашей окружностью. Обозначим через $re^{i\theta}$ указанную точку соприкосновения.

Лемма 5. а) При $r_0 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$R \geq c(R) r_0^{1-\rho} m_0. \quad (1.13)$$

б) При $r_0 > 0$, $\rho > 1$

$$R \geq \frac{c(R)}{[r_0 + |c(R)|^{1/\rho}]^{\rho-1}} m_0. \quad (1.14)$$

где

$$m_0 = \min_{0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)}{\cos\rho\theta \sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]} > 0. \quad (1.15)$$

в) При $r_0 = 0$, $\rho > \frac{1}{2}$

$$R = [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.16)$$

Доказательство. а) Пусть $r_0 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$. По лемме 4 для числа $R = R_\rho(\theta)$ имеем значение

$$R_\rho(\theta) = r \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\theta|\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]}. \quad (1.17)$$

Из (1.17), если заметим, что на нашей кривой $\Gamma_\rho[c(R)]$, $r^\rho \cos\rho\theta = c(R)$, будем иметь:

$$R_\rho(\theta) = c(R)r^{1-\rho} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\theta|\right)}{\cos\rho\theta \sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]} \geq c(R)r^{1-\rho}m_0. \quad (1.18)$$

Покажем, что при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$,

$$r_0 \leq r. \quad (1.19)$$

Действительно, из (1.5) имеем:

$$r_0 = r \frac{\sin\rho|\theta|}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]}. \quad (1.20)$$

Из (1.20) вытекает, что при $\rho = \frac{1}{2}$ всегда $r_0 = r$. Предположим теперь, что $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, тогда для $0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем:

$$0 \leq \rho|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho} \leq \pi.$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$0 \leq \rho|\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho} - (\rho-1)|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$$

и поэтому

$$\sin \varphi |b| \leq \sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)|b| \right].$$

Отсюда и из (1.20) вытекает утверждение (1.19).

Из (1.18) и (1.19), в силу того, что $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, получим требуемую оценку (1.13).

б) Пусть $r_0 > 0$, $\rho > 1$. Рассматривая треугольник с вершинами в точках 0 , $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$, $re^{i\theta}$, находим

$$r \leq r_0 + R_\rho(\theta) \leq r_0 + R_\rho(0) = r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.21)$$

так как по лемме 2

$$\max_{|b| < \frac{\pi}{2\rho}} R_\rho(b) = R_\rho(0) = [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Из (1.18) и (1.21) получим:

$$R \geq \frac{c(R)}{[r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}]^{\rho-1}} m_0,$$

т. е. оценку (1.14) леммы.

в) При $r_0 = 0$, $\rho > \frac{1}{2}$, очевидно, что $R^2 = c(R)$.

Таким образом лемма полностью доказана.

2°. Основная теорема об оценке производных целых функций

В настоящем пункте, используя результаты предыдущих лемм, мы приводим оценки для производных целых функций.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho < \frac{1}{2}$ и нормального типа τ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty, \quad (2.1)$$

а) Если $r_0 > 0$, то при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{M \Lambda_k}{r_0^{k(1-\rho)}} \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где

$$A_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{m_0 k} \right)^k (1 + e^k).$$

б) Если $r_0 > 0$, то при $\rho > 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq MB_k \left\{ \left[r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{k-1} \right\} \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

где

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{km_0} \right)^k (1 + e^k).$$

в) При $\rho > \frac{1}{2}$

$$|f^{(k)}(0)| \leq MC_k \sigma^{\frac{k}{\rho}}, \quad (2.4)$$

где

$$C_k = \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}.$$

Доказательство. Пусть $c (0 \leq c < +\infty)$ — заданное число. По лемме 1 на кривой $r^{\rho} \cos \rho \theta = c$ имеем:

$$|f(re^{i\theta})| \leq Me^{cs}. \quad (2.5)$$

Обозначим через $c(R)$, то значение параметра c , при котором кривая $r^{\rho} \cos \rho \theta = c(R)$ соприкасается с окружностью $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$. По формуле Коши для любого $k \geq 1$ и $r_0 > 0$ имеем:

$$f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R} \frac{f(z)}{\left(z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{k+1}} dz, \quad (2.6)$$

откуда следует оценка

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2\pi R^k} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| d\theta. \quad (2.7)$$

Но по условию (2.1) теоремы на той части окружности $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$, которая лежит в угле $|\arg z| \geq \frac{\pi}{2\rho}$, имеем, что

$$|f(Re^{i\theta} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq M. \quad (2.8)$$

С другой стороны, на дуге окружности $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$, лежащей в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ в силу (2.5), очевидно, имеем:

$$|f(R e^{i\theta} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq M e^{s(R)}. \quad (2.9)$$

Из (2.7), (2.8) и (2.9) вытекает, что

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2R^k} [1 + e^{s(R)}] M \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

и

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2R^k} \left[2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{s(R)} \right] M \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.10')$$

а) Пусть $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ и $r_0 > 0$. Из неравенства (1.13) леммы 5 и из неравенства (2.10) следует оценка

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2\rho} \frac{1}{[c(R)m_0 r_0^{1-\rho}]^k} [1 + e^{s(R)}] M \quad (k \geq 1). \quad (2.11)$$

До сих пор радиус $R > 0$ и соответствующее значение $s(R)$ параметра s были произвольными. Выберем теперь s таким образом, чтобы для данного $k \geq 1$ имели $s(R) = \frac{k}{\sigma}$.

Подставляя значение $s(R) = \frac{k}{\sigma}$ в (2.11), получим оценку (2.2) теоремы.

б) Пусть $\rho \geq 1$ и $r_0 > 0$. Из неравенства (1.14) леммы 5 и из (2.10) получим:

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2} \left[\frac{(r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}})^{\rho-1}}{m_0 c(R)} \right]^k [1 + e^{s(R)}] M \quad (k \geq 1). \quad (2.12)$$

Выберем опять $s(R) = \frac{k}{\sigma}$, тогда (2.12) принимает следующий вид:

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2} M \sigma^k \left[\frac{\left[r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{\rho-1}}{k m_0} \right]^k \quad (k \geq 1),$$

т. е. получим оценку (2.3) теоремы.

в) Предположим, наконец, что $r_0 = 0$ и $\rho \geq \frac{1}{2}$, тогда из оценки (2.10) и из формулы (1.16) леммы 5 получим неравенство

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{c(R)} \right) [c(R)]^{-\frac{k}{\rho}} \quad (k \geq 1). \quad (2.13)$$

Выбирая в (2.13) $c(R) = \frac{k}{\rho\sigma}$, получим последнюю оценку (2.4) теоремы.

Докажем теперь вторую теорему об оценке производных целых функций порядка $\rho > 1$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho > 1$ и нормального типа σ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \sup_{|\arg z| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} |f(z)| &\leq M < +\infty, \\ \sup_{|\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} |f(z)| &\leq M < +\infty. \end{aligned} \quad (2.14)$$

а) Если $|z| \neq 0$ и $|\arg z| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ или $|\arg z + \pi| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$, то для любого $k \geq 1$ имеет место оценка

$$|f^{(k)}(z)| \leq MB_k \left[|z| + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{\rho-1} \sigma^k, \quad (2.15)$$

где

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{km_0} \right)^k (1 + e^k).$$

б) Если же $z = 0$, то для любого $k \geq 1$

$$|f^{(k)}(0)| \leq MC_k^* \sigma^{\frac{k}{\rho}},$$

где

$$C_k^* = k! \left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}. \quad (2.16)$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ имеет порядок ρ и тип σ и удовлетворяет условиям (2.14), то по лемме 1 отсюда следует, что при произвольном значении параметра c ($0 \leq c < +\infty$) на кривых

$$r^{\rho} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = c$$

$$r^{\rho} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = c$$

имеет место оценка

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M e^{c\theta}.$$

Поэтому оценка (2.15) нашей теоремы доказывается вполне аналогичным образом, как и в теореме 1.

Что касается утверждения (2.16) теоремы, то оно тоже получается аналогично оценке (2.4), но лишь с учетом того, что функция $f(z)$ в данном случае удовлетворяет условию

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M$$

при $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $|\theta + \pi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и условию

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M e^{c(\operatorname{Re}^{\theta})}$$

при

$$\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad \left|\theta + \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}.$$

В заключение отметим, что при $\rho = 1$ из теоремы 2, в частности, вытекает:

Следствие. Если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа σ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| \leq M < +\infty, \quad (2.17)$$

то для любого $k \geq 1$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k! e^k}{k^k} \sigma^k. \quad (2.18)$$

Действительно, из оценки (2.16) теоремы при $\rho = 1$ следует, что при $k \geq 1$

$$|f^{(k)}(0)| \leq M \frac{k! e^k}{k^k} \sigma^k.$$

Для данного x_0 , рассматривая функцию $f_1(z) = f(x_0 + z)$, которая опять экспоненциального типа σ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f_1(x)| \leq M < +\infty,$$

приходим к оценке (2.18).

Но отметим, что как оценка (2.18), так и оценки теорем 1 и 2 не наилучшие, так как, например, для случая целых функций экспоненциального типа σ , рассмотренного выше, известно, что имеет место оценка С. Н. Бернштейна [1]

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| \leq \sigma^k M,$$

которую улучшить нельзя.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. т. 1, 1953, статья (22).

Մ. Մ. Զորբաշյան

ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՐԳԻ ԵՎ ՆՈՐՄԱԼ ՏԻՊԻ
ԱՄԲՈՂԶ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՄԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում մի քանի օժանդակ լեմմաների օգնությամբ ապացուցվում են հետևյալ երկու բևորեմաները.

թ) Եթե ω և σ թիվներն են, որ $f(z)$ ֆունկցիան ամբողջ է և $\rho > \frac{1}{2}$ կարգի և σ ախլի և բավարարում է.

$$\sup_{|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty$$

պայմաններին.

ա) եթե $r_0 > 0$, ապա երբ $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{MA_k}{r_0^{k(1-\rho)}} \sigma^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

որտեղ

$$A_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{m_0 k} \right)^k (1 + e^k).$$

բ) եթե $r_0 > 0$, ապա երբ $\rho \geq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq MB_k \left[\left| r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right|^k \sigma^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

որտեղ

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{km_0} \right)^k (1 + e^k).$$

գ) երբ $\rho > \frac{1}{2}$

$$|f^{(k)}(0)| \leq MC_k \sigma^{\frac{k}{\rho}},$$

որտեղ

$$C_k = \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}$$

Բնական է, որ $f(z)$ ֆունկցիան ամբողջ է $d > 1$ և անհատական է և անհատական է

$$\begin{aligned} \sup |f(z)| &< M < \infty \\ \sup |f(z)| &< \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{2} \right) | \arg z + \pi | \end{aligned}$$

ապահովվում է

$$w) \text{ ընդ } |z| \neq 0 \text{ և } |\arg z| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{d}{2} \right) \text{ և } |\arg z + \pi| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{d}{2} \right)$$

$$|f(z)| \leq MB_k \left\{ |z| + \left(\frac{d}{k} \right)^{\frac{1}{d-1}} \right\}^{\frac{1}{k}} \left(1 + e_k \right)$$

և

$$B_k = \frac{k!}{1} \left(\frac{km_0}{k} \right) (1 + e_k)$$

f) ընդ $z = 0$, ապա ցանկացած $k > 1$ ամբողջ

$$|f_k(0)| \leq MC_k \frac{d}{k}$$

և

$$C_k = k! \left(1 - \frac{d}{1} + \frac{d}{1} e^{\frac{d}{k}} \right) \left(\frac{k}{d} \right)^{\frac{d}{k}}$$