

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

К теории конвекции большого масштаба

§ 1. Введение

Изучение свободной конвекции большого масштаба очень важно для правильного понимания и объяснения некоторых гидротермодинамических процессов, происходящих в реальных атмосферных условиях под воздействием притока тепла от Солнца, подстилающей поверхности и других, как, например: сезонные ветры — муссоны, береговые ветры — бризы и т. д.

В [9] нами обобщен предложенный А. А. Дородницыным метод решения плоской, нелинейной, нестационарной задачи о свободной тепловой конвекции большого масштаба на бесконечной плоской Земле для случая конвекции на сферической Земле, в поле силы Кориолиса и при наличии основного зонального потока до начала тепловой конвекции.

Исходим из следующей системы уравнений гидротермодинамики:

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + \frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} - \frac{v_{\lambda}^2}{a} \operatorname{ctg} \theta - 2\omega \cos \theta v_{\lambda} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial v_{\lambda}}{\partial t} + \frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \theta} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial z} + \frac{v_{\theta} v_{\lambda}}{a} \operatorname{ctg} \theta + 2\omega \cos \theta v_{\theta} = -$$

$$- \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu \frac{\partial^2 v_{\lambda}}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \sin \theta) + \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$p = R_0 T. \quad (5)$$

Здесь система координат сферическая,

r — расстояние до центра Земли,

θ — дополнение широты,

λ — долгота места.

- z — высота над поверхностью Земли,
 a — радиус земного шара,
 p, ρ, T — давление, плотность и температура воздуха,
 t — время,
 v_θ, v_λ, v_z — составляющие скорости по осям координат,
 g — ускорение силы тяжести,
 ω — угловая скорость вращения Земли,
 ν — коэффициент вертикального турбулентного перемешивания,
 k — коэффициент турбулентной теплопроводности,
 R — газовая постоянная.

Считаем, что движение атмосферы состоит из основного зонального потока со скоростью

$$\bar{v}_\lambda(\theta, z) = \alpha(z) a \sin \theta \quad (6)$$

и тепловых возмущений последнего, $\alpha(z)$ — угловая скорость вращения основного зонального потока, т. е.

$$\begin{aligned}
 v_\theta &= v'_\theta(\theta, \lambda, z, t), \quad v_z = v'_z(\theta, \lambda, z, t), \\
 v_\lambda &= \bar{v}_\lambda(\theta, z) + v'_\lambda(\theta, \lambda, z, t), \\
 T &= \bar{T}(\theta, z) + T'(\theta, \lambda, z, t).
 \end{aligned} \quad (7)$$

причем элементы возмущения $v'_\theta, v'_\lambda, v'_z, T'$ не считаем малыми.

Вставляя (7) в систему уравнений, воспользуясь уравнением статики (2) и состояния (5), а также пренебрегая отношением $\frac{\alpha}{\omega}$ по отношению к единице $\left(\frac{\alpha}{\omega} \cong 3 \cdot 10^{-2}\right)$, переходя к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 T_1, \quad M = T_0 M_1, \\
 v_\theta &= V \cdot v_{\theta 1}, \quad v_\lambda = V \cdot v_{\lambda 1}, \quad v_z = \frac{H}{a} V \cdot v_{z 1}, \\
 \omega &= \frac{V}{a} \omega_1, \quad \alpha = \frac{V}{a} \alpha_1, \quad t = t_0 t_1, \quad z = H z_1,
 \end{aligned} \quad (8)$$

получим следующую систему из четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций:

$$v_\theta(\theta, \lambda, z, t), \quad v_\lambda(\theta, \lambda, z, t), \quad v_z(\theta, \lambda, z, t), \quad T(\theta, \lambda, z, t)$$

(индексы отбросили):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \alpha \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta - 2\omega \cos \theta v_\theta = \\
 = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_z^\infty T dz + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \alpha \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta + 2\omega \cos \theta v_\theta =$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty T dz + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}, \quad (9')$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_\theta M \sin 2\theta + \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

T_0 , V , H , a , t_0 — характерные соответственно перепад температуры, скорость, высота, длина и время, причем за характерную длину по горизонтали принят радиус Земли, а характерные длина, время и скорость связаны соотношением $t_0 = \frac{a}{V}$;

M — безразмерный перепад температуры от экватора к полюсу.

Принимая число Прандтля равным единице ($\nu = k$), для характерных величин получаем следующие соотношения:

$$V = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{T} \right)^{1/2}, \quad H = (\nu a)^{1/2} \left(\frac{g T_0}{T} \right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Следуя А. А. Дородницыну, сделаем следующие преобразования координат:

$$t = t_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \frac{z}{2Vt} = \zeta, \quad \sqrt{t} = \tau \quad (11)$$

(далее значки „один“ опускаем), кроме того, положим:

$$T = \tau^2 \Theta(\theta, \lambda, \zeta, \tau), \quad v_\theta = \tau^2 \varphi(\theta, \lambda, \zeta, \tau),$$

$$v_z = \tau^2 \sigma(\theta, \lambda, \zeta, \tau), \quad v_\lambda = \tau^2 \psi(\theta, \lambda, \zeta, \tau). \quad (12)$$

Тогда система приведет к следующим четырем уравнениям для определения φ , ψ , σ , Θ (полагаем $\alpha = c_1 z = c\tau^2$).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - 10\varphi - 2\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + 8\tau^2 \omega \cos \theta \varphi - 4c\zeta\tau^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} =$$

$$= 8 \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\zeta \Theta d\zeta + 4\tau^2 \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \varphi^2 \operatorname{ctg} \theta \right], \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 10\psi - 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 8\tau^2 \omega \cos \theta \psi - 4c\zeta\tau^3 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} =$$

$$= \frac{8}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\zeta \Theta d\zeta + 4\tau^2 \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \varphi \psi \operatorname{ctg} \theta \right]. \quad (14)$$

$$\frac{2}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\varphi \sin\theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \right] + \frac{\partial\sigma}{\partial\zeta} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta} - 4\Theta - 2\zeta \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - 4c\zeta^2 \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - 4M\tau^2 \sin 2\theta \varphi = \\ = 4\tau^2 \left[\varphi \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \frac{\psi}{\sin\theta} \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n, & \sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n, \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n, & \Theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя ряды (17) в систему (13)–(16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим системы уравнений для определения всех членов рядов (17).

Граничные условия будут:

$$\begin{aligned} 1) \varphi_n = \psi_n = \sigma_n = 0, \quad \Theta_n = f_n(\theta, \lambda) \quad \text{при } \zeta = 0, \\ 2) \varphi_n = \psi_n = \Theta_n = 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение системы мы начнем с уравнения (16). Для $n=0$; 1; 2 это уравнение дает:

$$\frac{\partial^2\Theta_n}{\partial\zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial\Theta_n}{\partial\zeta} - 2(n+2)\Theta_n = G,$$

откуда:

$$\Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) = c_1(\theta, \lambda) L_{n+2}(\zeta) + c_2(\theta, \lambda) P_{n+2}(\zeta),$$

где $P_{n+2}(\zeta)$ — полиномы степени $(n+2)$.

$$L_n(\zeta) = A_n \int \left[\int \left[\int \left[\int \dots \int e^{-x^2} (dx)^n \right] dx \right] dx \right] dx, \quad (19)$$

$$\text{В частности } L_0 = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$A_n = 2nA_{n-2}, \quad A_0 = \frac{2}{\pi}, \quad A_1 = 2. \quad (19')$$

Эти постоянные определены так, что

$$L_n(0) = 1.$$

Между этими функциями L_n существует следующее соотношение:

$$\zeta L_n = \frac{A_n}{A_{n+1}} (n+1) [L_{n+1} - L_{n-1}], \quad (20)$$

c_1 и c_2 постоянные интегрирования, зависящие от θ , λ .

Второе граничное условие из (18) дает $c_2 = 0$, а первое — $c_1 = f_n(\theta, \lambda)$, так как $L_{n+2}(\zeta) = 1$, при $\zeta = 0$.

Итак

$$\Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) = f_n(\theta, \lambda) L_{n+2}(\zeta) \quad (n=0; 1; 2). \quad (21)$$

Далее, для $n=3, 4$ уравнение (16) дает:

$$\frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \Theta_n}{\partial \zeta} - 2(n+2)\Theta_n = 4c\zeta \frac{\partial \Theta_{n-3}}{\partial \lambda}.$$

Но правая часть нами уже определена по (21), тогда, пользуясь еще соотношением (20) и граничными условиями (18), получим:

$$\Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) = f_n L_{n+2} + \frac{nc}{2} \frac{\partial f_{n-3}}{\partial \lambda} \frac{A_{n-1}}{A_n} [L_{n+2} - 2L_n + L_{n-2}].$$

Итак до $n=6$ включительно. Но для определения Θ_n при $n=5; 6$ нужно знать еще φ_{n-5} , как это видно из (16), причем уравнение остается линейным. Нелинейные члены в уравнениях появляются, начиная с $n=7$ и выше.

Обратимся к уравнениям движения (13) и (14).

Для $n=0; 1$ имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \varphi_n}{\partial \zeta} - 2(n+5)\varphi_n = 8 \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{\zeta} \Theta_n d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_n}{\partial \zeta} - (n+5)\psi_n = \frac{8}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\zeta} \Theta_n d\zeta.$$

Подставляя в правую часть этой системы Θ_n из (21), при тех же граничных условиях (18) легко получим:

$$\varphi_n = 2 \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}),$$

$$\psi_n = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}).$$

Так последовательно найдутся все φ_n и ψ_n .

Уравнение (15) при граничных условиях (18) дает:

$$\sigma_n = - \frac{2}{\sin \theta} \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi_n \sin \theta) + \frac{\partial \psi_n}{\partial \lambda} \right] d\zeta.$$

Выпишем некоторые результаты:

$$\Theta_n = f_n L_{n+2} \quad (n = 0; 1; 2),$$

$$\Theta_n = f_n L_{n+2} + \frac{\pi c}{2} \frac{\partial f_{n-3}}{\partial \lambda} \frac{A_{n-1}}{A_n} (L_{n+2} - 2L_n + L_{n-2}) \quad (n = 3; 4), \quad (22)$$

и т. д.

$$\varphi_0 = 2 \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}),$$

$$\psi_n = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}) \quad (n = 0; 1),$$

$$\varphi_n = 2 \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}) - \frac{2\omega \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial \lambda} \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+5} - 2L_{n+3} + L_{n+1}), \quad (23)$$

$$\psi_n = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \frac{A_{n+2}}{A_{n+3}} (L_{n+5} - L_{n+3}) + 2\omega \cos \theta \frac{\partial f_{n-2}}{\partial \theta} \frac{A_n}{A_{n+1}} (L_{n+5} - 2L_{n+3} + L_{n+1}) \quad (n = 2).$$

и т. д.

$$\sigma_0 = -\frac{\Delta f_0}{12} (5L_6 - 6L_4 + 1), \quad (24)$$

$$\sigma_2 = -\frac{\Delta f_2}{24} (7L_8 - 8L_6 + 1) - 4\omega \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \frac{A_2}{A_3} \left[\frac{A_7}{A_8} (L_8 - 1) - \right. \\ \left. - 2 \frac{A_5}{A_6} (L_6 - 1) + \frac{A_3}{A_4} (L_4 - 1) \right]$$

и т. д.

Здесь $\Delta f = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right]$ — оператор Лапласа.

Начиная с $n = 7$ и выше, в правых частях уравнений (13)–(16) появляются нелинейные члены, как произведения уже полученных ранее линейных членов.

Например: при $n = 7$ (16) дает:

$$\frac{\partial^2 \Theta_7}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \Theta_7}{\partial \zeta} - 18\Theta_5 = 4c\zeta \frac{\partial \Theta_4}{\partial \lambda} + 4M \sin 2\theta \varphi_2 + 4 \left[\varphi_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\psi_0}{\sin \theta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \lambda} + \frac{\sigma_0}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} \right].$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено вариацией постоянных.

Замечательно то обстоятельство, что скобки в выражениях для φ_n , ψ_n , σ_n , Θ_n могут быть протабулированы, ибо они зависят только от ζ , и, кроме того, решение нелинейной нестационарной задачи про-

водится до конца при произвольном распределении температуры по поверхности Земли.

По (12) и (17) имеем:

$$T = \tau^2 \Theta(\theta, \lambda, \zeta, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n.$$

Температура на поверхности Земли

$$T(\theta, \lambda, 0, \tau) = \tau^2 \Theta(\theta, \lambda, 0, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, \lambda, 0) \tau^n,$$

и по (18)

$$T(\theta, \lambda, 0, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta, \lambda) \tau^n. \quad (25)$$

Таким образом, если бы нам было известно разложение (25), т. е. все функции $f_n(\theta, \lambda)$, то мы по формулам (22)–(24) определяли бы все элементы движения.

Распределение температуры по поверхности Земли можно либо аппроксимировать по какому-либо закону, пользуясь данными наблюдений, либо можно определять, исходя из условия баланса тепла на Земле. В частности, задаваясь годовым ходом температуры, мы сможем получить муссоны. В настоящей статье мы покажем, как, пользуясь условием баланса тепла на Земле, определить распределение температуры воздуха по поверхности Земли.

§ 2. Определение температуры почвы

Прежде всего найдем распределение температуры почвы. Уравнение теплопроводности почвы имеет вид:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = k^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}. \quad (26)$$

Здесь $T^*(\theta, \lambda, z, t)$ — возмущение температуры почвы.

$k^*(\theta, \lambda)$ — коэффициент теплопроводности почвы.

Остальные обозначения приведены выше.

Перейдем к тем же безразмерным величинам (8) и

$$T^* = T_0 T_1^*. \quad (27)$$

Вставляя (27) в (26) и вспоминая соотношение $\frac{VH^2}{a} = k$ (10), получим:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{k^*}{k} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}$$

(индексы „один“ опускаем).

Сделаем замену $z \sqrt{\frac{k}{k^*}} = -z_1$; тогда:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial z_1^2}. \quad (28)$$

Это уравнение будем решать методом, изложенным в предыдущем параграфе.

Сделаем преобразование координат по (11), только вместо ζ теперь будем иметь $\zeta_1 = \frac{z_1}{2l/\tau} = \frac{z_1}{2\tau}$; тогда уравнение (28) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_1} - 4t \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0. \quad (29)$$

Положим:

$$T^*(\theta, \lambda, \zeta_1, t) = t\theta^*(\theta, \lambda, \zeta_1, t). \quad (30)$$

Тогда придем окончательно к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial \theta^*}{\partial \zeta_1} - 2\tau \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} - 4\theta^* = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) описывает нестационарное распределение температуры почвы по глубине (θ и λ входят параметрически) и является аналогом уравнения (16), описывающего распределение температуры воздуха по высоте.

Естественно, решение уравнения (31) мы будем искать в том же виде (17).

$$\theta^*(\theta, \lambda, \zeta_1, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1) \tau^n. \quad (32)$$

Подставляя ряд (32) в уравнение (31) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях τ , мы получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения Θ_n^* .

Так, для всех n будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \Theta_n^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial \Theta_n^*}{\partial \zeta_1} - 2(n+2)\Theta_n^* = 0. \quad (33)$$

Уравнения (33) второго порядка по ζ_1 .

Прежде чем поставить краевые условия, заметим следующее.

Так как мы ищем отклонения температуры, то, естественно, поставить условие затухания температурных возмущений на большой глубине, т. е. при $\zeta_1 \rightarrow \infty$ $\Theta_n^* = 0$.

На поверхности же Земли мы будем считать, что температуры почвы и воздуха совпадают, а это означает, что $\Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1)$ при $\zeta_1 = 0$

должны совпадать с теми функциями $f_n(\theta, \lambda)$, с которыми совпадают $\Theta_n(\theta, \lambda, \zeta)$ при $\zeta=0$ из атмосферной задачи.

Итак, краевые условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } \zeta_1 = 0 \quad \Theta_n^* &= f_n(\theta, \lambda), \\ 2) \text{ при } \zeta_1 \rightarrow \infty \quad \Theta_n^* &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

При указанных краевых условиях уравнение (33) имеет следующее решение:

$$\Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1) = f_n(\theta, \lambda) \cdot L_{n+1}(\zeta_1), \quad (35)$$

где $L_n(\zeta_1)$ те же функции (19) аргумента ζ_1 .

Таким образом найдено распределение температуры почвы по (32), где коэффициенты разложения определяются по (35), причем снова при произвольном распределении температуры по поверхности Земли. После того как мы нашли распределение температур воздуха и почвы, можем составить условие баланса на Земле.

§ 3. Определение функций $f_n(\theta, \lambda)$

При наличии собственного излучения Земли, как черного тела, и встречного притока тепла от Солнца, условие баланса энергии на Земле имеет вид (см. [3], [11] и т. д.):

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} + K^* \frac{\partial T^*}{\partial z} = (1 - A)W - bT, \quad \text{при } z = 0. \quad (36)$$

Здесь: $T(\theta, \lambda, z, t)$ и $T^*(\theta, \lambda, z, t)$ — возмущения температур воздуха и почвы,

A — альбедо земной поверхности,

$W(\theta, t)$ — отклонение притока тепла от Солнца от его зонального значения,

$$K = c_p \rho k,$$

$$K^* = c^* \rho^* k^*,$$

c_p, c^* — коэффициенты теплоемкости воздуха и почвы,

ρ, ρ^* — плотности воздуха и почвы,

k, k^* — коэффициенты температуропроводности воздуха и почвы,

K, K^* — коэффициенты теплопроводности воздуха и почвы.

$$b = 4\sigma \bar{T}^3 - \text{постоянная,}$$

σ — постоянная Больцмана,

\bar{T} — средняя по всему земному шару температура.

Перейдем к тем же безразмерным величинам (8) и (27). Тогда, отбросив индексы, условие баланса (36) приведем к виду:

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} + K^* \frac{\partial T^*}{\partial z_1} = (1 - A) \frac{H}{T_0} W - bHT, \quad \text{при } z = z_1 = 0.$$

Вспомогательные преобразования:

$$\frac{z}{2\sqrt{t}} = \zeta, \quad \frac{-z_1 \sqrt{\frac{k}{k^*}}}{2\sqrt{t}} = \zeta_1, \quad \sqrt{t} = \tau$$

и соотношения (12), (30), приведем к следующему виду условия баланса:

$$-K\tau \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - K^*\tau \frac{\partial \theta^*}{\partial \zeta_1} \sqrt{\frac{k}{k^*}} = \frac{2H}{T_0} (1-A)W - 2bH\tau^2\theta, \quad (37)$$

при $\zeta = \zeta_1 = 0$.

Для θ и θ^* мы имеем разложения (17) и (32). Представим приток тепла от Солнца, зависящий от широты и времени, в таком же виде (32)

$$W(\theta, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\theta) \tau^n. \quad (38)$$

Подставляя (17), (32) и (38) в (37) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ слева и справа, получим следующие соотношения для определения $f_n(\theta, \lambda)$ при всех n :

$$-K \left(\frac{\partial \theta_n}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} - K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}} \left(\frac{\partial \theta_n^*}{\partial \zeta_1} \right)_{\zeta_1=0} = \frac{2H}{T_0} (1-A)W_{n-1} - 2bH\theta_{n-1, \zeta=0}. \quad (39)$$

Воспользуемся теперь решениями (22) для θ_n и (35) для θ_n^* , кроме того, вспомним, что по самому определению

$$\frac{d}{d\zeta} L_{n, \zeta=0} = \frac{A_n}{A_{n-1}} L_{n-1, \zeta=0} = \frac{A_n}{A_{n-1}}, \quad \text{так как } L_n(0) = 1,$$

тогда из (39) получим:

$$-K f_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} - K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}} f_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{2H}{T_0} (1-A)W_{n-1} - 2bH f_{n-1},$$

или

$$f_n = -\frac{A_{n+1}}{A_{n+2}} \left(\frac{2H}{T_0} \frac{W_{n-1}}{\Pi} - \frac{2Hb}{\Pi} f_{n-1} \right) \quad (n = 0; 1; 2).$$

Здесь и далее $(1-A)W_n$ обозначаем снова через W_n :

$$\Pi = K + K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}}. \quad (40)$$

Итак:

$$f_0 = 0, \\ f_1 = -\frac{A_2}{A_3} \frac{2H}{T_0} \frac{W_0}{\Pi},$$

$$i_2 = -\frac{2H}{A_4 T_0 \Pi} \left(A_3 W_1 + A_2 \frac{2Hb}{\Pi} W_0 \right). \quad (41)$$

При $n = 3; 4$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \right|_{z=0} &= f_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} L_{n+1}|_{z=0} + \frac{nc}{2} \frac{A_{n-1}}{A_n} \frac{\partial i_{n-3}}{\partial \lambda} \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} L_{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{A_n}{A_{n-1}} L_{n-1} + \frac{A_{n-2}}{A_{n-3}} L_{n-3} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= f_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} + \frac{nc}{2} \frac{\partial i_{n-3}}{\partial \lambda} \frac{A_{n-1}}{A_n} \left(\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} - 2 \frac{A_n}{A_{n-1}} + \frac{A_{n-2}}{A_{n-3}} \right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} i_n; \text{ кроме того, } A_n = 2nA_{n-2}.$$

Подстановка в (39) дает:

$$\begin{aligned} i_3 &= -\frac{2H}{A_5 T_0 \Pi} \left[A_4 W_2 + A_3 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right) W_1 + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_0 \right], \\ i_4 &= -\frac{2H}{A_6 T_0 \Pi} \left[A_5 W_3 + A_4 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right) W_2 + A_3 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_1 + \right. \\ &\quad \left. + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^3 W_0 + A_2 Kc \frac{\partial W_0}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Так последовательно найдутся все $i_n(\theta, \lambda)$.

Выпишем еще i_5 .

$$\begin{aligned} i_5 &= -\frac{2H}{A_{10} T_0 \Pi} \left\{ A_9 W_7 + A_8 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right) W_6 + A_7 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_5 + \right. \\ &\quad + A_6 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^3 W_4 + A_5 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^4 W_3 + A_4 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^5 W_2 + \\ &\quad + A_3 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^6 W_1 + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^7 W_0 + 4KM \sin 2\theta \left[A_4 \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi} + \right. \\ &\quad \left. + A_7 2Hb \left(\frac{1}{\Pi} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi} + \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi^2} \right) + A_2 (2Hb)^2 \left(\frac{1}{\Pi^2} \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Pi} \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi} + \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi^2} \right) \right] + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

и т. д.

В $i_5(\theta, \lambda)$ уже появляются нелинейные члены:

$$\frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \frac{4H^2}{T_0} \frac{K}{\Pi} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \theta} \frac{1}{\Pi} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \frac{4H^2}{T_0} \frac{K}{\Pi} \frac{W_0}{\Pi} \Delta \frac{W_0}{\Pi},$$

где Δ — оператор Лапласа.

Во всех этих выражениях W_n зависит только от широты, а

$\Pi = K + K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}}$ существенно зависит как от широты, так и от дол-

готы места, поскольку коэффициент теплопроводности почвы совершенно различен для различных типов подстилающей поверхности, как, напр., водное пространство, песок, растительный покров, снег и т. д.

Таким образом, решение всей задачи — отыскание тепловых возмущений зонального движения атмосферы сведось к тому, что приток тепла от Солнца нужно представлять в виде (38). Тогда по формулам (41) и далее определяются все $f_n(\theta, \lambda)$, а по (22)—(24) и т. д. все элементы движения. Во всех $f_n(\theta, \lambda)$ множитель $(1-A)$ нами был опущен, поэтому все $W_n(\theta)$ нужно предварительно умножать на $(1-A)$.

В решение вошла так же и функция $\Pi(\theta, \lambda)$, которую следует рациональным образом задать, учитывая реальную конфигурацию материков и океанов.

§ 4. Определение $W_n(\theta)$

Для определения $W_n(\theta)$ обратимся к [8].

В таблице 8 приводятся суточные суммы притока тепла от Солнца при различных коэффициентах прозрачности атмосферы, как функция от широты и времени.

$$W(\theta, t) \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$$

Таблица 8

θ°	t	21/III	6/V	22/VI	8/VIII	23/IX	8/XI	22/XII	4/II
0		1	2	3	4	5	6	7	8
0		-0,0781	0,0774	0,2370	0,0760	-0,0781	-0,0781	-0,0781	-0,0781
10		-0,0762	0,0890	0,2313	0,0876	-0,0762	-0,0852	-0,0852	-0,0851
20		-0,0566	0,1182	0,2203	0,1162	-0,0513	-0,1136	-0,1136	-0,1136
30		-0,0279	0,1380	0,2178	0,1346	-0,0313	-0,1382	-0,1535	-0,1375
40		-0,0088	0,1383	0,1992	0,1348	-0,0116	-0,1379	-0,1768	-0,1372
50		0,0058	0,1245	0,1661	0,1210	0,0023	-0,1233	-0,1746	-0,1219
60		0,0162	0,0888	0,1217	0,0946	0,0114	-0,0976	-0,1489	-0,0962
70		0,0226	0,0670	0,0725	0,0635	0,0170	-0,0663	-0,1128	-0,0637
80		0,0251	0,0313	0,0181	0,0278	0,0202	-0,0303	-0,0645	-0,0277
90		0,0260	-0,0366	-0,0344	-0,0101	0,0205	0,0066	-0,0121	0,0101
100		0,0232	-0,0141	-0,0850	-0,0168	0,0184	0,0441	0,0420	0,0441
110		0,0193	-0,0793	-0,1300	-0,0821	0,0137	0,0789	0,0963	0,0831
120		0,0115	-0,1029	-0,1634	-0,1120	0,0067	0,0987	0,1455	0,1129
130		0,0091	-0,1339	-0,1859	-0,1352	-0,0034	0,1326	0,1889	0,1368
140		-0,0154	-0,1465	-0,1854	-0,1472	-0,0181	0,1443	0,2206	0,1477
150		-0,0363	-0,1445	-0,1598	-0,1452	-0,0376	0,1421	0,2365	0,1449
160		-0,0623	-0,1192	-0,1192	-0,1192	-0,0630	0,1216	0,2375	0,1237
170		-0,0809	-0,0900	-0,0900	-0,0900	-0,0809	0,0912	0,2480	0,0926
180		-0,0826	-0,0826	-0,0826	-0,0826	-0,0826	0,0791	0,2533	0,0805

Принимая коэффициент прозрачности атмосферы равным 0,7 (среднее годовое значение этого коэффициента для всего земного шара около 0,74), нами вычислены средние значения суточных сумм притока тепла от Солнца на каждой широте, затем вычислены отклонения от этих средних.

Кроме того, эти отклонения разделены на 24×60 , чтобы получить отклонения от зональных значений минутных сумм притока тепла от Солнца.

Результаты сведены в табл. 1.

Функцию $W(\theta, t)$, представленную в таблице 1, можно разложить в ряд по простым полиномам Лежандра. Ясно, что коэффициенты этого разложения будут функциями времени; последние можно разложить в ряд по синусам.

Тогда:

$$W(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) p_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin m\Omega t p_n(\cos\theta), \quad (42)$$

где $p_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра,

Ω — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца.

$$D_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} W(\theta, t) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad (43)$$

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) \sin m\Omega t dt. \quad (44)$$

Раскладывая, теперь, $\sin m\Omega t$ в ряд, получим:

$$W(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} p_n(\cos\theta) \left[m\Omega t - \frac{(m\Omega t)^3}{3!} + \frac{(m\Omega t)^5}{5!} - \frac{(m\Omega t)^7}{7!} + \dots \right]. \quad (45)$$

$$\text{Но } t = \frac{a}{V} t_1.$$

Полагая также $\Omega = \frac{V}{a} \Omega_1$, будем иметь $\Omega t = \Omega_1 t_1 = \Omega_1 \tau^2$, причем дальше отбросим индексы, но будем оперировать уже безразмерными величинами — Ω и t .

Сравниваем между собой (38) и (45)

$$\tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\theta) \tau^n = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} p_n(\cos\theta) \left[m\Omega - \frac{(m\Omega)^3}{3!} \tau^4 + \frac{(m\Omega)^5}{5!} \tau^8 - \frac{(m\Omega)^7}{7!} \tau^{12} + \dots \right]. \quad (47)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \Omega(c_{0,1}p_0 + c_{1,1}p_1 + c_{2,1}p_2 + c_{3,1}p_3 + \dots), \\
 W_1 &= 0, \\
 W_2 &= 0, \\
 W_3 &= 0, \\
 W_4 &= -\Omega^2(c_{0,2}p_0 + c_{1,2}p_1 + c_{2,2}p_2 + c_{3,2}p_3 + \dots), \\
 W_5 &= W_6 = W_7 = 0, \\
 W_8 &= \Omega^3(c_{0,3}p_0 + c_{1,3}p_1 + c_{2,3}p_2 + c_{3,3}p_3 + \dots), \\
 W_9 &= W_{10} = W_{11} = 0, \\
 W_{12} &= -\Omega^4(c_{0,4}p_0 + c_{1,4}p_1 + c_{2,4}p_2 + c_{3,4}p_3 + \dots)
 \end{aligned} \tag{48}$$

и т. д.

Здесь:

$$\begin{aligned}
 c_{n,1} &= (a_{n,1} + 2a_{n,2} + 3a_{n,3} + 4a_{n,4} + \dots), \\
 c_{n,2} &= \frac{1}{3!}(a_{n,1} + 2^2a_{n,2} + 3^2a_{n,3} + 4^2a_{n,4} + \dots), \\
 c_{n,3} &= \frac{1}{5!}(a_{n,1} + 2^5a_{n,2} + 3^5a_{n,3} + 4^5a_{n,4} + \dots), \\
 c_{n,4} &= \frac{1}{7!}(a_{n,1} + 2^7a_{n,2} + 3^7a_{n,3} + 4^7a_{n,4} + \dots).
 \end{aligned} \tag{49}$$

(Все W_n имеют размерность $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}$.)

Воспользовавшись таблицей 1, по (43) подсчитаны $D_n = D_n(t)$ и по полученным восьми дискретным значениям построены графики $D_n(t)$. Из этих графиков сняты значения $D_n(t)$ через каждые 10° аргумента и результаты сведены в особую таблицу. По (44) легко определяются $a_{n,m}$, а по (49) — $c_{n,m}$. Вставляя все эти результаты, а также $p_n(\cos\theta)$ в (48) и собирая члены, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \Omega(0,0106 + 0,1929\cos\theta + 0,0657\cos 2\theta - 0,0426\cos 3\theta), \\
 W_4 &= -\Omega^2(0,0106 + 0,0361\cos\theta + 0,0459\cos 2\theta - 0,0107\cos 3\theta), \\
 W_8 &= \Omega^3(0,0024 + 0,0061\cos\theta + 0,0117\cos 2\theta - 0,0023\cos 3\theta), \\
 W_{12} &= -\Omega^4(0,0003 + 0,0013\cos\theta + 0,0017\cos 2\theta - 0,0005\cos 3\theta), \\
 W_1 &= W_2 = W_3 = W_5 = W_6 = W_7 = W_9 = W_{10} = W_{11} = 0.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Мы здесь ограничивались первыми четырьмя полными, причем точность для наших целей достаточная.

Обратимся, наконец, к определению функции $\Pi(\theta, \lambda)$, (40).

Эта функция, как было отмечено выше, существенно зависит от обеих горизонтальных координат.

В настоящей работе мы несколько схематизируем нашу задачу. Считаем, что по некоторой параллели $\theta = \theta_0$ проходит береговая черта, отделяющая однородный материк $\theta \leq \theta_0$ от океана $\theta > \theta_0$. Итак,

севернее параллели θ_0 имеем сплошной материк, южнее — океан, и каждая из этих подстилающих поверхностей имеет постоянный коэффициент теплопроводности.

Ясно, что наша функция (40) будет теперь зависеть только от широты, а потому ни одна из искомым функций нашей задачи не будет зависеть от долготы,

Таким образом, мы упрощаем задачу, отнюдь не ограничивая общности; в конце работы мы покажем, как решать задачу при реальной конфигурации береговой черты.

Итак,

$$\Pi(\theta) = c_p \rho k + c^* \rho^* \sqrt{kk^*}. \quad (51)$$

Приводим таблицу значений, входящих сюда величин для почвы волнующегося океана и воздуха.

Таблица 2

Величина	Почва	Море	Воздух	Размерность
c	0,33	1,00	0,24	$\frac{\text{кал}}{\text{г. град}}$
	1,50	1,00	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
k	0,54	$3 \cdot 10^2$	$1,2 \cdot 10^6$	$\frac{\text{см}^2}{\text{мин}}$
K	0,27	$3 \cdot 10^2$	$3,73 \cdot 10^2$	$\frac{\text{кал}}{\text{см мин град}}$
Π	$0,08 \cdot 10^4$	$1,94 \cdot 10^4$	—	$\frac{\text{кал}}{\text{см мин град}}$

В то время, как первое слагаемое в (51) не зависит от рода подстилающей поверхности, второе сильно меняется в зависимости от того, какова подстилающая поверхность — почва (и какая?) или море (спокойное или волнующееся?).

Так, например, для приведенных в таблице 2 данных имеем:

$$c^* \rho^* \sqrt{kk^*} = 3,985 \cdot 10^2 \text{ для почвы,}$$

$$c^* \rho^* \sqrt{kk^*} = 1,897 \cdot 10^4 \text{ для волнующегося моря.}$$

Как видно, величина $c^* \rho^* \sqrt{kk^*}$ для волнующегося моря во много раз больше, чем для почвы. Таким образом, мы приходим к выводу, что функция (51) над волнующимся морем значительно больше, чем над материком, а на самой береговой черте терпит разрыв непрерывности, т. е. имеет вид ступеньки (фиг. 1).

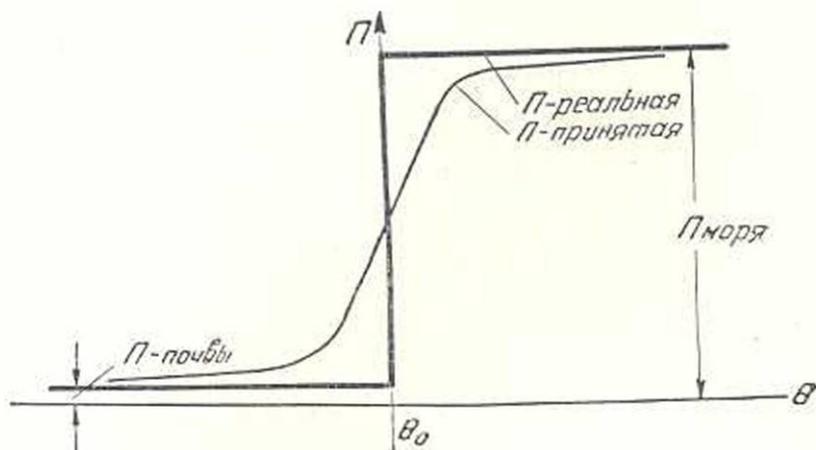
Для наших целей эту функцию можно заменить гиперболическим тангенсом

$$\Pi(\theta) = c_1 + c_2 \operatorname{th} \varepsilon (\theta - \theta_0).$$

Здесь c_1 и c_2 постоянные, определяемые из условий:

- 1) при $\varepsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow \infty$ $\Pi(\theta) = \Pi(\theta)$ для моря,
 - 2) при $\varepsilon(\theta - \theta_0) \rightarrow -\infty$ $\Pi(\theta) = \Pi(\theta)$ для почвы,
- (θ_0 — береговая черта).

ε подбирается из условия, чтобы указанный предельный переход имел место на достаточно близком расстоянии от берега. Увеличивая ε , мы принятую нами кривую приближаем к реальной-ступенчатой кривой.



Фиг. 1.

Принимая, например, что предельный переход совершается на расстоянии одного градуса широты (на поверхности Земли), получаем $\varepsilon \approx 10^2$; θ — при этом берется в радианах.

Итак, для принятых нами величины

$$\Pi = c_0 \Pi_1, \quad \Pi_1(\theta) = 1,01 + 0,93 \operatorname{th} \varepsilon(\theta - \theta_0), \quad (52)$$

$$c_0 = 10^4 \frac{\text{кал}}{\text{см мин град}}, \quad \varepsilon = 10^2. \quad (53)$$

Π_1 — безразмерная величина (в дальнейшем индекс „один“ отбрасываем).

§ 5. Некоторые результаты

Пользуясь полученным решением (41), разложением (50) и представлением (52) в случае нестационарной зональной циркуляции атмосферы, получаем:

$$f_0 = 0,$$

$$f_1 = B_{1,1} \frac{W_0}{\Pi},$$

$$f_2 = B_{2,1} \frac{W_0}{\Pi^2},$$

$$f_2 = B_{3,1} \frac{W_0}{\Pi^2},$$

$$f_4 = B_{4,1} \frac{W_0}{\Pi^4},$$

$$f_2 = B_{5,1} \frac{W_0}{\Pi^2} + B_{5,2} \frac{W_4}{\Pi},$$

$$f_4 = B_{6,1} \frac{W_0}{\Pi^6} + B_{6,2} \frac{W_4}{\Pi^2} + B_{6,3} \frac{\sin 2\theta}{\Pi^3} \left(\Pi \frac{\partial W_0}{\partial \theta} - W_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right),$$

$$f_2 = B_{7,1} \frac{W_0}{\Pi^2} + B_{7,2} \frac{W_4}{\Pi^2} + B_{7,3} \frac{\sin 2\theta}{\Pi^4} \left(2\Pi \frac{\partial W_0}{\partial \theta} - 3W_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right),$$

$$f_4 = B_{8,1} \frac{W_0}{\Pi^8} + B_{8,2} \frac{W_4}{\Pi^4} + B_{8,3} \frac{\sin 2\theta}{\Pi^5} \left(3\Pi \frac{\partial W_0}{\partial \theta} - 6W_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right),$$

$$f_2 = B_{9,1} \frac{W_0}{\Pi^2} + B_{9,2} \frac{W_4}{\Pi^2} + B_{9,3} \frac{\sin 2\theta}{\Pi^6} \left(4\Pi \frac{\partial W_0}{\partial \theta} - 10W_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + B_{9,4} \frac{W_8}{\Pi} +$$

$$+ B_{9,5} \frac{1}{\Pi^3} \left(\Pi \frac{\partial W_0}{\partial \theta} - W_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right)^2 + B_{9,6} \frac{W_0}{\Pi^2} \Delta \frac{W_0}{\Pi} \quad (54)$$

и т. д.

$$\text{В нашем случае } \Delta \frac{W_0}{\Pi} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \frac{W_0}{\Pi} \right) \right].$$

Постоянные $B_{n,m}$ имеют следующие значения:

$$B_{n,1} = - \frac{A_2}{A_{n+2}} \frac{2H\Omega}{T_0 c_0} \left(\frac{2Hb}{c_0} \right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 9),$$

$$B_{n,2} = - \frac{A_0}{A_{n+2}} \frac{2H\Omega^2}{T_0 c_0} \left(\frac{2Hb}{c_0} \right)^{n-5} \quad (n = 5, 6, \dots, 9),$$

$$B_{n,3} = - \frac{A_2}{A_{n+2}} \frac{2H\Omega}{T_0 c_0} \frac{4KM}{c_0} \left(\frac{2Hb}{c_0} \right)^{n-6} \quad (n = 6, 7, 8, 9). \quad (55)$$

(При $n < 5$, $B_{n,2} = 0$, $n < 6$ $B_{n,3} = 0$),

$$B_{9,4} = - \frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{2H\Omega^3}{T_0 c_0},$$

$$B_{9,5} = \frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{0,0488}{9\sqrt{\pi}} \frac{K}{c_0} \left(\frac{2H\Omega}{T_0 c_0} \right)^2,$$

$$B_{9,6} = \frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{0,0216}{9\sqrt{\pi}} \frac{K}{c_0} \left(\frac{2H\Omega}{T_0 c_0} \right)^2,$$

и т. д.

Постоянные A_n берутся по (19').

Выпишем еще численные значения входящих сюда постоянных и характерных величин применительно к нашей задаче.

$$\begin{aligned} a &= 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}, \\ M &= 40^\circ\text{C}, \\ \bar{T} &= 2,7 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

Принимая за характерный перепад температуры в нашей задаче $T_0 = 4^\circ\text{C}$ и беря $\nu = 2 \text{ м}^2/\text{сек}$, из таблицы 2, мы по формулам (10), получаем:

$$V = 10 \text{ м/сек}, \quad H = 1,04 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad t_0 = 6,4 \cdot 10^3 \text{ сек}. \quad (56)$$

Так как $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/сек}$, $\Omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ 1/сек}$, то согласно (8) и (46)

$$\omega_1 = 46,44, \quad \Omega_1 = 0,127.$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,825 \cdot 10^{-10} \text{ кал/см мин град}^4, \\ b &= 0,72 \cdot 10^{-2} \text{ кал/см мин град}, \\ c_0 &= 10^4 \text{ кал/см мин град}, \quad M_1 = 10. \end{aligned} \quad (57)$$

Все $B_{n,m}$ имеют размерность $\left[\frac{1}{W_n} \right]$, т. е. $\left[\frac{\text{см}^2 \text{мин}}{\text{кал}} \right]$, кроме двух последних, размерность которых $\left[\frac{1}{W_n} \right]^2$.

§ 6. Заключение

Используя приведенные значения параметров, легко вычислить все постоянные $B_{n,m}$ по (55). Беря тогда $W_n(\theta)$ по (50) и $\Pi(\theta)$ по (52), можно подсчитать все функции $f_n(\theta)$ по (54) для заданных значений θ , а по (22)–(24) — все искомые функции. Задача об отыскании тепловых возмущений чисто-зональной циркуляции, таким образом, решается до конца. Подчеркнем еще раз, что указанные возмущения, налагающиеся на основной зональный поток, не считаются малыми, и уравнения не линеаризируются. Решается нелинейная задача. Благодаря тому, что в уравнениях (13)–(16) нелинейные члены появляются при высоких степенях времени, сперва решается линейная задача.

По истечении некоторого времени, достаточного для развития собственно тепловой конвекции, нелинейные (конвективные) члены становятся большими, возникает горизонтальный перенос, а в решении это сказывается тем, что в правых частях наших уравнений (13)–(16) появляются нелинейные члены, как произведения полученных ранее линейных членов.

Мы здесь решили задачу для случая зональной конфигурации материков и океанов, рассматриваемых однородными.

В действительности мы не имеем принятой нами береговой черты—по параллели. Реально существующая конфигурация берега влияет только на вид функции $\Pi(\theta, \lambda)$, так как приток тепла от Солнца практически не зависит от долготы, в то время как поглощение этого тепла одинаково зависит от обеих горизонтальных координат.

Желая учесть заданную реальную конфигурацию материков и океанов (напр. для юго-востока Евразии), мы воспользуемся тем же представлением (52), только теперь будем считать, что $\theta_0 = \theta_0(\lambda)$, т. е.

$$\Pi(\theta, \lambda) = c_1 + c_2 \text{th} \varepsilon [\theta - \theta_0(\lambda)]. \quad (52')$$

Здесь $\theta_0 = \theta_0(\lambda)$ — уравнение береговой черты.

Ход решения задачи остается таким же, только вместо (52) следует теперь исходить из представления (52'), причем береговая черта задается по реальной конфигурации.

Всю задачу можно было упростить заданием непосредственно распределения температуры по поверхности Земли, пользуясь материалами наблюдений. Решением незоональной задачи в последнем случае и построением примера мы предполагаем заняться в ближайшее время.

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 6 XI 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Блинова Е. Н. К вопросу о среднем распределении температуры в земной атмосфере с учетом материков и океанов. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. XI, № 1, 1947.
2. Дилитриев А. А. Влияние материков и океанов на общую циркуляцию атмосферы. Докт. диссертация. Морск. гидрофиз. лаборатория АН СССР, 1946.
3. Дородницын А. А. К теории суточного хода температуры в слое перемешивания. ДАН СССР, т. XXX, № 5, 1940.
4. Кибель И. А. Применение к метеорологии уравнений механики бароклинической жидкости. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 1940.
5. Кибель И. А. О распределении температуры в земной атмосфере. ДАН СССР, т. XXXIX, № 1, 1943.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, М.—Л., 1948.
7. Линейкин П. С. Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. XI, № 2, 1947.
8. Миланкович М. Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата. НКТП СССР, М.—Л., 1939.
9. Мхитарян А. М. Нестационарная задача о муссонной циркуляции. ДАН Армянской ССР, т. XIX, № 2, 1951.
10. Обухов А. М. Турбулентность в температурно неоднородной атмосфере. Труды Инст. теорет. геофиз., № 2, 1948.
11. Швец М. Е. Суточный ход температуры и лучистый теплообмен. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1943.

Ա. Մ. Մխիթարյան

ՄԵԾ ՄԱՍՇՏԱԲԻ ԿՈՆՎԵԿՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում լուծվում է ոչ ստացիոնար տարածական խնդիր մեծ մաս-
շտարի ազատ կոնվեկցիայի մասին երկրի գնդային մակերևույթի վրա,
Կորիոլիսի ուժի գաշտում, ընդ որում ընդունվում է, որ կոնվեկցիայից
ստաջ գոյություն ունի հիմնական զոնայ հոսք, իսկ բուն կոնվեկցիան գիտ-
վում է իրրև այդ հոսքի ջերմային գրգռումներ: Մթնոլորտի ուղղաձիգ տար-
բույլենտ մածուցիկության գործակիցը ընդունվում է հաստատուն: Մենք
կընտրում ենք հիդրոտերմոդինամիկայի հավասարումների (1)–(5) սխեմեից
Հիմնական զոնայ հոսքը արվում է (6) տեսքով, նրա գրգռումները (7),
այս վերջինները չեն գիտվում որպես փոքր մեծություններ, հետևաբար
և հավասարումները զծայնացման չեն ենթարկվում: Կատարելով անկախ
փոփոխականների (11) ձևափոխությունները և անցնելով նոր անհայտների
(12) արտահայտությունների, ստանում ենք հավասարումների (13)–(16)
սխեմեից: Ինչպես երևում է վերջին հավասարումներից, ոչ զծային անդամ-
ները մասնակցում են ժամանակի ավելի բարձր աստիճանով: Դա մեզ
հնարավորություն է տալիս փնտրել լուծումը (17) տեսքով, ընդ որում
շարքի գործակիցների համար ստացվում են սովորական դիֆերենցիալ հա-
վասարումներ: (18) սահմանային պայմանների դեպքում լուծումը ստաց-
վում է (22)–(24) տեսքով: Մնկրթը լուծվում է երկրագնդի վրա օդի ջեր-
մաստիճանի կամայական բաշխման դեպքում, երբ վերջինս ներկայացվի (25)
տեսքով: Այնուհետև, որպեսզի գանձնք օդի ջերմաստիճանի բաշխումը երկրա-
գնդի մակերևույթի վրա, նախ դանում ենք հողի ջերմաստիճանի բաշխումը
բառ խորություն, օգտվելով (26) հավասարումից: Այստեղ էլ կատարում ենք
նույն ձևափոխությունները և փնտրելով լուծումը (32) տեսքով, մենք շար-
քի բոլոր գործակիցները համար ստանում ենք (33) հավասարումը, որը
(34) սահմանային պայմանների դեպքում ունի (35) լուծումը: Մ'վ (22)–
(24), և՛ (35) լուծումներն արտահայտում են τ (0, λ) ֆունկցիաներով,
որոնց որոշման համար օգտվում ենք երկրի վրա ջերմային բալանսի (36)
պայմանից:

Արևից ստացվող ջերմությունը ներկայացնում ենք (38) տեսքով,
զրա համար օգտվում ենք 1 աղյուսակից և (45) շարքից, գործակիցների
համար ստանում ենք (50) արտահայտությունները:

Եթե ցամաքն ու օվկիանոսը բաժանվում են արևի զուգահեռականով,
ազա (49) ֆունկցիան ընդունում է (51) տեսքը: Վերջինս ներկայացվում
է աստիճանածև կորով \mathcal{N} 1 գրաֆիկի վրա: Մենք հնարավոր ենք համա-
բույլ աչն փոխարինել հիդրոբուսական տանգենտով:

Այս դեպքում մեզ հետաքրքրող ֆունկցիաների համար ստանում ենք
(54) արտահայտությունները: Իրականում օվկիանոսի և ցամաքի բաժան-
ման դիժը չի համընկնում ոչ մի զուգահեռականի նետ, այդ դեպքում
(52)-ի փոխարեն կունենանք (52')-ը, որտեղ $\theta_0 = \theta_0$ (λ) ափի հավասա-
րումն է: Մնկրթի լուծման ընթացքը մնում է նույնը: