ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VIII, № 1, 1955 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси

В настоящей заметке вводятся два новых квази-аналитических класса функций наилучшего приближения.

Первый класс связан с наилучшими приближениями на всей оси целыми функциями экспоненциального типа, а второй — с наилучшими приближениями функций рациональными функциями.

1°. Известно (см. [1], статья (73)), что для любой ограниченной на всей оси $-\infty < x < +\infty$ функции $f(x)$ существует целая функция $G_\sigma(x)$ экспоненциального типа $\sigma > 0$, наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на всей оси. Функция $G_\sigma(x)$ характеризуется тем, что для всякой целой функции $g_\sigma(x)$ экспоненциального типа $\sigma > 0$,

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| \geq \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - G_\sigma(x)| = A_\sigma f(x). \tag{1}$$

Как было доказано С. Н. Бернштейном (см. [1], статья (84)), если при любом $\sigma > 0$

$$A_\sigma f(x) \leq B e^{-b\sigma}, \tag{2}$$

где B и $b > 0$ — константы, не зависящие от σ, то функция $f(z)$ голоморфна и ограничена внутри полосы $|\operatorname{Im} z| < b$. Отсюда следует, что если при условии (2), $f(x) \equiv 0$ на произвольном отрезке вещественной оси, то $f(x) \equiv 0$ при $-\infty < x < +\infty$.

Ниже мы покажем, что функции, для которых соотношение вида (2) имеет место не для всех $\sigma > 0$, а для некоторой последовательности чисел σ_n, стремящихся к бесконечности, обладают аналогичным свойством единственности.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ *ограничена на всей оси* $-\infty < x < +\infty$ *и удовлетворяет условиям:*

а) *Для некоторой последовательности чисел*

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < \cdots, \quad \lim \sigma_n = +\infty$$

$$A_{\sigma_n} f(x) \leq B_1 e^{-b\sigma_n}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где B_1 *и* $b > 0$ *— константы, не зависящие от* σ_n.

б) $f(x) \equiv 0$ *на некотором отрезке вещественной оси. Тогда* $f(x) \equiv 0$ *на всей оси* $-\infty < x < +\infty$.

Иначе говоря, семейство функций, удовлетворяющих условию а) теоремы, составляет квази-аналитический класс на всей оси, т. е. любая функция этого класса единственным образом определится на всей оси $-\infty < x < +\infty$ своими значениями, принимаемыми на произвольно малом отрезке.

Доказательство. Пусть $f(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. Обозначим через $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ множества чисел таких, что $f(x) \equiv 0$ на любом отрезке вида $[\alpha, \beta]$.

Предполагая, вопреки утверждению теоремы, что $f(x) \neq 0$, заключаем, что хоть одно из чисел $\sup\{\beta\}$ и $\sup\{\alpha\}$ конечно.

Положим, без ограничения общности, что $\sup\{\beta\} = \beta' < +\infty$, тогда для произвольно выбранного $\delta > 0$ существует число δ', $0 < \delta' < \delta$, такое, что

$$f(x) \equiv 0, \text{ на отрезке } [\alpha_0, \beta' - \delta']$$
$$f(\beta' + \delta') \neq 0. \tag{4}$$

Но простым линейным преобразованием отрезок $[\alpha_0, \beta' - \delta']$ можно перевести в отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси. Тогда, очевидно, что функция $f(x)$ переходит в функцию $f_*(x)$, для которой выполняются условия

1. $A_{\sigma_n} f_*(x) \leqslant B_1 e^{-b_1 \sigma_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $b_1 > 0$ — некоторая новая константа.

2. $f_*(x) \equiv 0$ на отрезке $[-1, +1]$.

3. Для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ в отрезке $[1, 1 + \varepsilon]$ существуют точки, где $f_*(x) \neq 0$.

Мы покажем, что из условий 1 и 2 будет следовать, что $f_*(x) \equiv 0$ и в отрезке $[1, a]$, где $a > 1$ — некоторое определенное число. Это будет противоречить свойству 3 функции $f_*(x)$ и таким образом теорема будет доказана.

Пусть $G^*_{\sigma_n}(x)$ — целая функция экспоненциального типа σ_n, для которой

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| f_*(x) - G^*_{\sigma_n}(x) \right| = A_{\sigma_n} f_*(x), \tag{5}$$

тогда из ограниченности функции $f_*(x)$ будет следовать, что

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| G^*_{\sigma_n}(x) \right| \leqslant B_2 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где B_2 не зависит от n.

Далее, из свойства 2 функции $f_*(x)$ и из (5) заключаем, что

$$\max_{-1 < x < 1} \left| G^*_{\sigma_n}(x) \right| \leqslant B_1 e^{-b_1 \sigma_n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

По известной теореме для функций экспоненциального типа из (6) следует, что (см. [1], статья (82))

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| G^*_{\sigma_n}(x+iy) \right| \leqslant B_2 e^{\sigma_n |y|} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Обозначим через C_{b_1} эллипс с фокусами в точках ± 1, проходящий через точки $\pm ib_1$ плоскости z. Функция $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ конформно отображает внешнюю часть отрезка $[-1, +1]$ на область $|w| > 1$, при этом эллипс C_{b_1} переходит в окружность радиуса $r_2 > 1$, где r_2 есть корень уравнения

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right),$$

больший единицы.

Функция

$$\varphi_n(w) = G^*_{\sigma_n}\left\{\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right\}$$

голоморфна в кольце $1 \leqslant |w| < r_2$, при этом, в силу оценок (7) и (8), имеем:

$$\max_{|w|=1} |\varphi_n(w)| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| G^*_{\sigma_n}(x) \right| \leqslant B_1 e^{-b_1\sigma_n}, \tag{9}$$

$$\max_{|w|=r_2} |\varphi_n(w)| \leqslant \sup_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ |y| \leqslant b_1}} \left| G^*_{\sigma_n}(x+iy) \right| \leqslant B_2 e^{b_1\sigma_n}. \tag{10}$$

Если $1 \leqslant r \leqslant r_1$, то из оценок (9) и (10) по теореме о трех окружностях получим:

$$\log\{\max_{|w|=r} |\varphi_n(w)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \log\{B_1 e^{-b_1\sigma_n}\} \frac{\log\frac{r_2}{r}}{\log r_2} + \log\{B_2 e^{b\sigma_n}\} \frac{\log r}{\log r_2} = \log(B_1 B_2) -$$

$$- \frac{b_1\sigma_n}{\log r_2}\{\log r_2 - 2\log r\}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$\log\left\{\max_{1 \leqslant |w| \leqslant r_2^{\frac{1}{4}}} |\varphi_n(w)|\right\} \leqslant \log(B_1 B_2) - \frac{b\sigma_n}{2}. \tag{12}$$

Устремив $n \to \infty$, отсюда получим, что последовательность функций $\{\varphi_n(w)\}$ равномерно сходится к нулю в замкнутом кольце $1 \leqslant (w) \leqslant r_2^{\frac{1}{4}}$. Это значит, что последовательность целых функций $\left\{G^*_{\sigma_n}(z)\right\}$ равномерно сходится к нулю в замкнутом эллипсе с фокусами

± 1, проходящем через точку $a = \frac{1}{2}\left(r_2^{-\frac{1}{4}} + r_2^{\frac{1}{4}}\right) > 1$. Иначе говоря, $f_*(x) = 0$ на отрезке $[-a, +a]$, $a > 1$, что доказывает теорему.

Отметим, наконец, что дифференциальные свойства функции $f(x)$, подчиненной условию вида

$$A_{\sigma_n} f(x) \leqslant B e^{-\sigma_n b} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

существенно зависят от характера возрастания последовательности чисел σ_n.

Легко установить следующие утверждения:

1) Если $\sup\left\{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right\} < +\infty$, то функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| < a$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log \sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 0$, то функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей оси.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log \sigma_{n+1}}{\sigma_n} = R > 0$, то функция $f(x)$ имеет на всей оси производные до порядка $\left[\frac{1}{R}\right]$ включительно.

2°. Докажем теперь теорему об оценке в комплексной области рациональных функций, ограниченных на вещественной оси. Эта теорема необходима нам для определения квази-аналитического класса наилучшего приближения рациональными функциями.

Пусть $\lambda_k = \alpha_k^* + i\alpha_k$, $\mu_k = \beta_k^* - i\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ две последовательности комплексных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &1.\ |\alpha_k^*| \leqslant R, \quad |\beta_k^*| \leqslant R, \quad (k = 1, 2, \ldots). \\ &2.\ \alpha_k \geqslant c > 0, \quad \beta_k \geqslant c > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots). \\ &3.\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} = +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} = +\infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим рациональную функцию вида

$$R_{n,m}(z) = \frac{P_{n+m}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z - \lambda_k) \prod\limits_{k=1}^{n}(z - \mu_k)}, \tag{14}$$

где $P_{n+m}(z)$ — любой полином степени не выше $n + m$.

Теорема 2. Если

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |R_{n,m}(x)| \leqslant M < +\infty, \tag{15}$$

тогда

а) *для любого* θ, $0 < \theta < 1$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |R_{n,m}(x+iy)| \leqslant M\exp\left\{\frac{2y}{(1-\theta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}\right\}, \tag{16}$$

при $0 \leqslant y \leqslant \theta c$

и

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |R_{n,m}(x+iy)| \leqslant M\exp\left\{\frac{2|y|}{(1-\theta)^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\beta_k}\right\} \tag{16'}$$

при $-\theta c \leqslant y \leqslant 0$.

Кроме того, для любого $p \geqslant 1$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |R^{(p)}_{n,m}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant p!\,\theta^{-p}\,e^{\frac{2\theta}{(1-\theta)^2}}\,M\,\Omega^p_{n,m}, \text{ при } \Omega_{n,m} \geqslant \frac{1}{c}. \tag{17}$$

где

$$\Omega_{n,m} = \max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}\right), \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\beta_k}\right)\right\}. \tag{17'}$$

б) в случае, когда

$$\begin{gathered} c \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots, \ \lim \alpha_n = +\infty, \\ c \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \cdots, \ \lim \beta_n = +\infty. \end{gathered} \tag{18}$$

имеют место предельные соотношения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sup_{-\infty < x < +\infty} |R_{n,m}(x+iy)|\right\}^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-1}} \leqslant e^{2y}, \text{ при } 0 \leqslant y < \alpha_1 \tag{19}$$

равномерно относительно $m \geqslant 1$ и

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sup_{-\infty < x < +\infty} |R_{n,m}(x+iy)|\right\}^{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{\beta_k}\right)^{-1}} \leqslant e^{2|y|}, \text{ при } -\beta_1 \leqslant y \leqslant 0 \tag{19'}$$

равномерно относительно $n \geqslant 1$.

Кроме того, при любом $p \geqslant 1$

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}}\left\{\sup_{-\infty < x < +\infty} |R^{(p)}_{n,m}(x)|\right\}\Omega^{-p}_{n,m} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{5}\,M\cdot p!\left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{p}{2}} e^{\sqrt{2p}}. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначая

$$A_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z-\bar{\lambda}_k},$$

рассмотрим функцию

$$\omega_{n,m}(z)=R_{n,m}(z)\cdot A_n(z)=\frac{P_{n+m}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\bar{\lambda}_k)\prod\limits_{k=1}^{m}(z-\mu_k)},$$

которая голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и удовлетворяет условиям:

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|\omega_{n,m}(x)|=\sup_{-\infty<x<+\infty}|R_{n,m}(x)|\leqslant M$$

$$\lim_{|z|\to\infty}|\omega_{n,m}(z)|<+\infty.$$

Отсюда, по принципу максимума, вытекает, что $|\omega_{n,m}(x+iy)|\leqslant\leqslant M$, при $y\geqslant 0$, иначе говоря,

$$|R_{n,m}(x+iy)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x+iy-\bar{\lambda}_k}{x+iy-\lambda_k}\right|,\ y\geqslant 0. \tag{21}$$

Из (21) имеем, что при $y\geqslant 0$

$$|R_{n,m}(x+iy)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(x-\alpha_k^*)^2+(y+\alpha_k)^2}{(x-\alpha_k^*)^2+(y-\alpha_k)^2}}=$$

$$=M\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{4\alpha_k y}{(x-\alpha_k^*)^2+(y-\alpha_k)^2}}. \tag{22}$$

a) Из (22) получим, что для любого θ, $0<\theta<1$ при $0\leqslant y\leqslant\theta c$

$$|R_{n,m}(x+iy)|\leqslant M\exp\left\{\frac{2y}{(1-\theta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}\right\},$$

т. е. оценку (16) теоремы. Ясно, что вполне аналогичным образом будут установлены и оценки (16').

Переходя к установлению оценки (17), для данного θ, $0<\theta<1$, положим, что

$$r_{n,m}=\theta\Omega_{n,m}^{-1}<\theta c; \tag{23}$$

тогда из (16) и (16') вытекает, что

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|R_{n,m}(x+iy)|\leqslant M\,e^{\frac{2\theta}{(1-\theta)^2}},\ \text{при}\ |y|\leqslant r_{n,m}. \tag{24}$$

Далее, для любой точки $-\infty<x<+\infty$ имеем:

$$R_{n,m}^{(p)}(x)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|z-x|=r_{n,m}}\frac{R_{n,m}(z)}{(z-x)^{p+1}}\,dz\quad(p\geqslant 1).$$

откуда, в силу (24), получим:

$$| R^{(p)}_{n,m}(x) | \leq p!\, M\, r^{-p}_{n,m}\, e^{\frac{2\delta}{(1-\delta)^2}}, \quad p \geq 1. \tag{25}$$

Из (23) и (25) следует (17).

б) В силу условия (18) из (22) при $0 \leq y < \alpha_1$ имеем:

$$| R_{n,m}(x+iy) | \leq M \sqrt{1 + \frac{4\alpha_1^2}{(\alpha_1 - y)^2}} \exp\left\{ 2y \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k - \alpha_1)^2} \right\}. \tag{26}$$

Но не трудно заметить, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k - \alpha_1)^2} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} \right\}^{-1} = 1, \tag{27}$$

поэтому из (26) и (27) следует оценка (19) теоремы. Вполне аналогично устанавливается и оценка (19′).

Наконец, чтобы установить оценку (20), заметим, что имеет место неравенство, аналогичное неравенству (26)

$$| R_{n,m}(x+iy) | \leq M \sqrt{1 + \frac{4\beta_1^2}{(\beta_1 - y)^2}} \exp\left\{ 2\, | y | \sum_{k=2}^{m} \frac{\beta_k}{(\beta_k - \beta_1)^2} \right\} \tag{26′}$$

при $-\beta_1 < y \leq 0$.

Из (26) и (26′) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$, $A > 0$ при

$$| y | \leq \rho_{n,m} = A\Omega^{-1}_{n,m}, \quad n, m \geq N_0(\varepsilon) \tag{28}$$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} | R_{n,m}(x+iy) | \leq Q_{n,m} =$$

$$= \sqrt{5+\varepsilon}\, M \exp\left\{ 2A \frac{\max\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k - \alpha_1)^2},\ \sum_{k=2}^{m} \frac{\beta_k}{(\beta_k - \beta_1)^2} \right)}{\Omega_{n,m}} \right\}. \tag{29}$$

Но легко видеть, что в силу (27) и аналогичного соотношения для последовательности $\{\beta_k\}$

$$\overline{\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}}}\ \Omega^{-1}_{n,m} \max \left\{ \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k - \alpha_1)^2},\ \sum_{k=2}^{m} \frac{\beta_k}{(\beta_k - \beta_1)^2} \right\} \leq 1, \tag{30}$$

поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}}}\ Q_{n,m} \leq \sqrt{5}\, M e^{2A}. \tag{31}$$

Из формулы

$$R^{(p)}_{n,m}(x)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|z-x|=\rho_{n,m}}\frac{R_{n,m}(z)}{(z-x)^{p+1}}dz,\quad p\geqslant 1$$

имеем при $n, m\geqslant N_0$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|R^{(p)}_{n,m}(x)|\,\rho^p_{n,m}\leqslant p!\;Q_{n,m},$$

откуда по (28) и (31) получим:

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}}\left\{\sup_{-\infty<x<+\infty}|R^{(p)}_{n,m}(x)|\right\}\Omega^{-p}_{n,m}\leqslant\sqrt{5}M\,p!\,A^{-p}e^{2A}. \tag{32}$$

При $A=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$ левая часть (32) принимает минимальное значение. Подставив в (32) $A=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$, получим оценку (20) теоремы.

3°. Покажем теперь, что достаточно быстрое убывание наилучших приближений обеспечивает аналитичность и ограниченность приближаемой на оси $-\infty<x<+\infty$ функции в некоторой полосе вида $|\operatorname{Im}z|<a$.

Положим опять, что последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (13).

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ *ограничена на всей оси* $-\infty<x<+\infty$ *и для любого* $n\geqslant 1$ *и* $m\geqslant 1$ *существует рациональная функция* $R_{n,m}(z)$ *вида (14), такая, что*

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)-R_{n,m}(x)|\leqslant A\exp\{-bU_{n,m}\}, \tag{33}$$

где $A>0$ *и* $b>0$ *постоянные и*

$$U_{n,m}=\min\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k},\ \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\beta_k}\right\}, \tag{33'}$$

тогда функция $f(z)$ *голоморфна и ограничена в некоторой полосе* $|\operatorname{Im}z|<a$.

Доказательство. Так как по условию $\alpha_k\geqslant c>0$, $\beta_k\geqslant c>0$ $(k=1, 2, \ldots)$, то последовательности целых чисел

$$1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_r<\cdots$$
$$1\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_r<\cdots$$

возможно выбрать таким образом, чтобы имели

$$\frac{r}{c}\leqslant\sum_{k=1}^{n_r}\frac{1}{\alpha_k}<\frac{r+1}{c}\quad(r=1, 2, \ldots).$$

$$\frac{r}{c} \leqslant \sum_{k=1}^{m_r} \frac{1}{\beta_k} < \frac{r+1}{c}. \tag{34}$$

Из (33) следует, что при $r \geqslant 2$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} | R_{n_r, m_r}(x) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x) | \leqslant$$

$$\leqslant 2A \exp\left\{-b\, U_{n_{r-1}, m_{r-1}}\right\}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) вытекает, что

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| R_{n_r, m_r}(x) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2A \exp\left\{-b\frac{r-1}{c}\right\}, \quad r \geqslant 2, \tag{35'}$$

откуда, в силу (33), следует, что имеет место разложение

$$f(x) = R_{n_1, m_1}(x) + \sum_{r=2}^{\infty} \left\{R_{n_r, m_r}(x) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x)\right\}, \tag{36}$$

равномерно сходящееся на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Но разность $R_{n_r, m_r}(x) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x)$ есть рациональная функция вида $R_{n_r, m_r}(x)$, поэтому в силу оценок (16) и (16') теоремы 2 из (35') получим:

а) для $0 < \theta < 1$, $0 \leqslant y \leqslant \theta c$, $r \geqslant 2$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| R_{n_r, m_r}(x+iy) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x+iy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2A \exp\left\{-b\frac{r-1}{c} + \frac{2y}{(1-\theta)^2} \sum_{k=1}^{n_r} \frac{1}{\alpha_k}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2A \exp\left\{-b\frac{r-1}{c} + 2\frac{y}{(1-\theta)^2}\frac{r+1}{c}\right\} =$$

$$= 2A \exp\left\{\frac{b}{c} + \frac{2y}{c(1-\theta)^2} - \left(b - \frac{2y}{(1-\theta)^2}\right) r\right\}; \tag{37}$$

б) для $0 < \theta < 1$, $-\theta c \leqslant y \leqslant 0$, $r \geqslant 2$ аналогично получим:

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| R_{n_r, m_r}(x+iy) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(x+iy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2A \exp\left\{\frac{b}{c} + \frac{2|y|}{c(1-\theta)^2} - \left(b - \frac{2|y|}{(1-\theta)^2}\right) r\right\}. \tag{37'}$$

Поэтому из (37) и (37′) вытекает, что при

$$|y| \leqslant a < \min\left\{\theta c, \frac{b(1-\theta)^2}{2}\right\} \text{ряд}$$

$$R_{n_1, m_1}(z) + \sum_{r=2}^{\infty}\left\{R_{n_r, m_r}(z) - R_{n_{r-1}, m_{r-1}}(z)\right\}$$

равномерно сходится в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant a$, а это в силу (36) означает, что функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant a$.

4°. Из теоремы 3, очевидно, вытекает, что если при условии (33), $f(x) \equiv 0$ на некотором отрезке, то $f(x) \equiv 0$ на всей оси.

Но это свойство единственности сохранится, если условие (33) имеет место не для всех $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, а для некоторых бесконечных последовательностей $\{n_p\}$ и $\{m_p\}$.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ *ограничена на всей оси* $-\infty < x < +\infty$ *и удовлетворяет условиям:*

а) *Для некоторых бесконечных последовательностей целых чисел* $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_p < \cdots$, *подчиненных условию*

$$0 < \rho_1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m_p} \frac{1}{\beta_k}\right)^{-1} \leqslant \rho_2 < +\infty \quad (p \geqslant 1), \tag{38}$$

где ρ_1 *и* ρ_2 *не зависят от* p, *существуют рациональные функции* R_{n_p, m_p} $(p \geqslant 1)$ *вида (14), для которых*

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left|f(x) - R_{n_p, m_p}(x)\right| \leqslant A \exp\left\{-b\, U_{n_p, m_p}\right\} (p \geqslant 1), \tag{39}$$

где $A > 0$ *и* $b > 0$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* $p \geqslant 1$, *а* $U_{n, m}$ *определяется из (33′).*

б) $f(x) \equiv 0$ *на некотором отрезке оси* $-\infty < x < +\infty$.

Тогда $f(x) \equiv 0$ *на всей оси* $-\infty < x < +\infty$.

Иначе говоря, семейство функций, удовлетворяющих условию а) теоремы, составляют квази-аналитический класс наилучшего приближения рациональными функциями на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Доказательство. Полагая, вопреки утверждениям теоремы, что $f(x) \not\equiv 0$ на всей оси, мы можем аналогичным рассуждением, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, утверждать, что существует функция $f_*(x)$, для которой:

1. Имеются рациональные функции $R^*_{n_p, m_p}(x)$ вида (14) со знаменателями, равными

$$\prod_{k=1}^{n_p}(z - \alpha - \lambda_k)\prod_{k=1}^{m_p}(z - \alpha - \mu_k),$$

где α — фиксированное вещественное число, для которого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| f_*(x) - R^*_{n_p, m_p}(x) \right| \leqslant A \exp\left\{ -b U_{n_p, m_p} \right\} \quad (p \geqslant 1). \tag{39'}$$

2. $f_*(x) = 0$ на отрезке $[-1, +1]$.

3. Для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$, в отрезке $[1, 1+\varepsilon]$ существуют точки, где $f(x) \neq 0$.

Из ограниченности функции $f_*(x)$ и из (39) следует, что

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| R^*_{n_p, m_p}(x) \right| \leqslant A_1, \ p \geqslant 1, \tag{40}$$

где $A_1 > 0$ постоянная, не зависящая от p.

Из свойства 2 функции $f_*(x)$ вытекает, что

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| R^*_{n_p, m_p}(x) \right| \leqslant A \exp\left\{ -b U_{n_p, m_p} \right\}. \tag{41}$$

По теореме 2 из (40) вытекает, что для любого θ, $0 < \theta < 1$, при $|y| \leqslant \theta c$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| R^*_{n_p, m_p}(x+iy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant A_2 \exp\left\{ \Omega_{n_p, m_p} \frac{2|y|}{(1-\theta)^2} \right\} \quad (p \geqslant 1), \tag{42}$$

где $\Omega_{n, m}$ определяется из (17').

Но из свойства (38) последовательностей $\{n_p\}$ и $\{m_p\}$ вытекает, что

$$U_{n_p, m_p} \geqslant \rho_3 \sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k}, \quad \Omega_{n_p, m_p} \leqslant \rho_4 \sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k},$$

где $\rho_3 > 0$ и $\rho_4 > 0$ постоянные, не зависящие от $p \geqslant 1$.

Следовательно, имеем для

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| R^*_{n_p, m_p}(x) \right| \leqslant A \exp\left\{ -\rho_5 \sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k} \right\}, \tag{41'}$$

при $|y| \leqslant \theta c$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| R^*_{n_p, m_p}(x+iy) \right| \leqslant A_2 \exp\left\{ \rho_6 |y| \sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k} \right\}, \tag{42'}$$

где $\rho_5 > 0$ и $\rho_6 > 0$ также постоянные.

Далее доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 1, с заменой функции $G^*_{\sigma_n}(x)$ функцией $R^*_{n_p, m_p}(x)$ и последовательности σ_n последовательностью $\sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k}$ $(p \geqslant 1)$.

В заключение отметим, что и здесь дифференциальные свойства приближаемой функции $f(x)$ существенно зависят от характера возрастания последовательности $\sum_{k=1}^{n_p} \frac{1}{\alpha_k}$.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 13 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. I и II, М., 1953—1954.

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ԿՎԱԶԻ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԴԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում սահմանվում են լավագույն մոտավորության երկու նոր կվազի-անալիտիկ ֆունկցիաների դասեր։

Առաջին դասը կապված է իրական առանցքի վրա ֆունկցիաների էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաներով մոտենալու խնդրի հետ, իսկ երկրորդը՝ իրական առանցքի վրա ֆունկցիաների բևեռների տված բազմություն ունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաներով մոտենալու խնդրի հետ։

Այդ արդյունքների թվում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

Թող $f(x)$ լինի սահմանափակ ամբողջ $-\infty < x < +\infty$ առանցքի վրա և բավարարի հետևյալ պայմաններին՝

$$1)\ \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < \cdots,\ \lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$$

հաջորդականության համար։

$$A_{\sigma_n} f(x) \leqslant B_1 e^{-b\sigma_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

որտեղ $B_1 > 0$ $b > 0$ հաստատուններ են, իսկ $A\sigma_n$ $f(x)$-ը $f(x)$-ի լավագույն մոտավորությունն է σ_n տիպի և առաջին կարգի ամբողջ ֆունկցիաներով ամբողջ $-\infty < x < \infty$ առանցքի վրա։

2) $f(x) \equiv 0$ իրական առանցքի մի որոշ հատվածի վրա, ապա $f(x) \equiv 0$ ամբողջ $-\infty < x < +\infty$ առանցքի վրա։