ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտ. VII, № 6, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Л. А. Варданянц

Теория „оптических кривых" Е. С. Федорова и вращательного варианта стереоконоскопического метода

Введение

Вращательный вариант стереоконоскопического метода, как это уже было отмечено нами [2], тождествен методу „оптических кривых" Е. С. Федорова, предложенному им более полувека назад [4]. При этом методе посредством сочетания некоторых поворотов препарата производится построение на стереографической проекции особых кривых, представляющих геометрическое место проекций погасающих векторов. Используются следующие оси вращения и повороты: поворот шлифа вокруг нормали к его плоскости, т. е. вокруг внутренней вертикальной оси федоровского столика, наклон шлифа к себе и от себя поворотом около оси восток-запад столика и, наконец, поворот самого федоровского столика вместе со столиком микроскопа.

В принятой нами системе обозначений первый поворот определяется по положению индекса и соответствующему отсчету на внутреннем круге федоровского столика и обозначается буквой i; второй поворот определяется отсчетом по вертикальному барабану и обозначается буквой y. Третий поворот получаем из отсчетов по нониусу столика микроскопа и обозначаем его буквой F. Кривую, построенную при постоянном значении F, называем элементарной стереофигурой, а сочетание нескольких таких фигур — полной стереофигурой.

Отыскивание погасающих векторов производится следующим образом. При нулевом положении федоровского столика, т. е. когда его ось восток-запад совпадает с главным сечением одного из николей (при этом $F = 0$ или $F = 90°$, что тождественно одно другому), и при некотором произвольном исходном положении индекса i наклоняем шлиф к себе и от себя. Если наблюдалось погасание препарата, то соответствующий вектор наносим на диаграмму обычным образом, пользуясь при этом общеизвестной вертушкой с сеткой Вульфа.

После этого поворачиваем шлиф, т. е. внутренний круг федоровского столика, на некоторый угол и вновь наклоняем шлиф к себе и от себя. Этим путем находим второй погасающий вектор и наносим его на диаграмму и т. д. Если погасание при некотором положении индекса не наблюдалось, то поворачиваем шлиф дальше в том же направлении и т. д., пока внутренний круг совершит поворот на 180° и пока не будет найдено достаточное число точек, чтобы построить по ним плавную кривую. Это будет элементарная стереофигура при F = 0. Е. С. Федоров называл такие кривые „оптическими кривыми".

Построив первую стереофигуру, поворачиваем столик микроскопа вместе с федоровским столиком на некоторый угол и, оставляя его постоянным, вновь отыскиваем погасающие векторы наклоном шлифа к себе и от себя при разных положениях индекса. Векторы эти наносим на диаграмму и строим вторую кривую, т. е. стереофигуру для F = a.

Как будет доказано ниже, кривые линии всех элементарных стереофигур обязательно проходят через центр диаграммы, причем у каждой такой фигуры в центре перекрещиваются под 90° две ветви. Исключением служат только разрезы, перпендикулярные к оптической оси, у которых через центр диаграммы проходит лишь одна ветвь каждой стереофигуры. Таким образом, центр диаграммы представляет общую точку всех элементарных стереофигур.

Кроме центра диаграммы, кривые линии всех элементарных стереофигур проходят обязательно и через проекции оптических осей, так как вектор оптической оси бывает погасающим в момент его совмещения с осью микроскопа при прочих любых условиях. Никаких других общих точек пересечения кривых линий всех стереофигур на диаграммах быть не может.

Появление метода „оптических кривых" связано с той стадией развития федоровского столика, когда он содержал лишь две оси вращения — внутреннюю вертикальную и восток-запад. Но уже вскоре к столику была добавлена еще одна ось, называемая сейчас многими осью север-юг, которая позволяет наклонять шлиф вправо и влево. Удачность такого совмещения осей определила пути дальнейшего развития федоровского метода. В связи с этим метод „оптических кривых" был отставлен, и о нем после этого лишь очень кратко упоминалось в методической части оптической кристаллографии и при описании методов исследования в петрографии.

Е. С. Федоров установил только некоторые теоретические положения данного метода, полной же его теории мы не имели до самого последнего времени. Разработка такой теории сделалась возможной лишь на базе стереоконоскопического метода, теория которого для его нормального и диагонального вариантов была развита нами с полной детальностью посредством математического анализа на основе составленного нами уравнения стереофигур в общей его форме [1, 2, 3]. Это уравнение вполне применимо и для вращательного варианта, а следовательно и для метода „оптических кривых" Е. С. Федорова.

При вращательном варианте стереоконоскопического метода остается неиспользованной ось север-юг, так как наклоны вправо и влево не производятся. Поэтому переменная x, входящая в состав общей формы уравнения стереофигур, всегда равна нулю. Это дает некоторое упрощение общей формы уравнения. Но вместе с тем сама функция, т. е. tg2F, уже не равна, в общем случае, нулю или бесконечности. Следовательно, появляется новая переменная, F, представляющая угол поворота николей или, что то же самое, угол поворота столика микроскопа.

Для вращательного варианта общая форма уравнения стереофигур получает следующий вид

$$2F = 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} i}{\cos y} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{\cos y\cos\varphi - \sin y\sin i\sin\varphi}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi+v) - \sin y\cos i(\sin y\sin i\cos\varphi + \cos y\sin\varphi)} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{\cos y\cos\varphi - \sin y\sin i\sin\varphi}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi-v) - \sin y\cos i(\sin y\sin i\cos\varphi + \cos y\sin\varphi)}. \quad (1)$$

И в данном случае, подобно нормальному и диагональному вариантам метода, уравнение представляет непрерывную функцию, причем здесь независимыми переменными, определяющими ориентировку исследуемого сечения и положение федоровского столика в оптической системе, являются v, φ, ψ и F, а зависимые переменные y и i определяют координаты элементарной стереофигуры на стереографической проекции.

Переменная F имеет всегда два значения, отличающиеся одно от другого на 90°, так как угол поворота николей можно отсчитывать как по отношению к анализатору, так и к поляризатору. Поэтому удобнее оставлять в уравнении удвоенное значение функции, так как $\operatorname{tg}2F = \operatorname{tg}(180° + 2F)$. Нулевое значение F = 0 имеет место, когда оси федоровского столика север-юг и восток-запад совпадают обе с главными сечениями поляризатора и анализатора.

Переменная φ представляет угол между плоскостью шлифа и плоскостью оптических осей. Следующая переменная ψ — угол между линией пересечения плоскости шлифа с плоскостью оптических осей и близлежащей к ней биссектрисой, а i — угол между этой линией пересечения плоскостей и осью север-юг, причем этот угол должен отсчитываться всегда в одном направлении.

Общее уравнение стереофигур (1) имеет неявную форму, а приведение его к явной форме, показывающей зависимость переменных y и i друг от друга, усложняет уравнение и делает его в ряде случаев очень громоздким, мало пригодным для анализа стереофигур при тех или иных общих условиях. В связи с этим общее исследование проведено нами в некоторых случаях по материалам графических построений стереофигур.

Общие особенности стереофигур

Прежде чем перейти к анализу стереофигур, необходимо соответствующим образом осветить некоторые общие особенности стереофигур.

1. *Число ветвей стереофигур в центре диаграммы.* Для точк стереофигур, проектирующейся в центре диаграмм, должно быть $y=0$ поэтому общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$2F=2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}i)-\mathrm{arctg}\frac{\cos\varphi}{\mathrm{cotg}(\psi+v)}-\mathrm{arctg}\frac{\cos\varphi}{\mathrm{cotg}(\psi-v)},$$

или $$\mathrm{tg}2F=\frac{\dfrac{2\mathrm{tg}i}{1-\mathrm{tg}^2 i}-\dfrac{\cos\varphi[\mathrm{cotg}(\psi+v)+\mathrm{cotg}(\psi-v)]}{\mathrm{cotg}(\psi+v)\mathrm{cotg}(\psi-v)-\cos^2\varphi}}{1+\dfrac{2\mathrm{tg}i\cos\varphi[\mathrm{cotg}(\psi+v)+\mathrm{cotg}(\psi-v)]}{(1-\mathrm{tg}^2 i)[\mathrm{cotg}(\psi+v)\mathrm{cotg}(\psi-v)-\cos^2\varphi]}}, \quad ($$

или с условными обозначениями

$$\mathrm{tg}2F=\frac{2B\mathrm{tg}i-A(1-\mathrm{tg}^2 i)}{2A\mathrm{tg}i+B(1-\mathrm{tg}^2 i)}$$. Решая это уравнение, получим

$$\mathrm{tg}i=\frac{B-A\mathrm{tg}2F\pm\sec 2F\sqrt{A^2+B^2}}{-(A+B\mathrm{tg}2F)}. \quad ($$

Следовательно в общем случае переменная i имеет при кажд значении F, т. е. у всех стереофигур, два значения: i и $i\pm 90°$, т как $\mathrm{tg}i\,\mathrm{tg}(i\pm 90°)=-1$, что и соблюдается в уравнении (3). Ина говоря, кривые линии у каждой стереофигуры должны пересекать в центре диаграммы под прямым углом.

Но в частном случае, когда в уравнении (3) подкоренное вы жение равно нулю, угол i получает только одно значение. Для это должно быть $A^2+B^2=0$. Подставляя из уравнения (2) значения бу A и B, получим выражение

$$\cos^2\varphi[\mathrm{cotg}(\psi+v)+\mathrm{cotg}(\psi-v)]^2+[\mathrm{cotg}(\psi+v)\mathrm{cotg}(\psi-v)-$$
$$-\cos^2\varphi]^2=0,$$

справедливое только тогда, когда $\varphi=90°$ и $\psi+v=90°$, т. е. ко одна из оптических осей проектируется в центре диаграммы. В эт случае, который будет рассмотрен детально ниже, у каждой стер фигуры через центр диаграммы проходит только одна линия (см. ни случаи, представленные на рис. 13 и 14).

Центр диаграммы всегда заключен внутри сферического треуго ника, образуемого проекциями главных сечений индикатрисы. Поэто внутри этого треугольника каждая линия стереофигуры обязател проходит через центр диаграммы.

2. *Точки стереофигур на основном круге проекции.* При которых значениях угла поворота николей F линии стереофигур ресекают основной круг диаграммы и выходят за ее пределы в ласть нижней полусферы стереографической проекции. Математи ское определение таких точек пересечения может быть произведе посредством уравнения (1), если подставить в него $y=90°$.

$$2F = 2\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}\frac{-\sin i \sin\varphi}{\sin^2 i \operatorname{cotg}(\psi + v) - \sin i \cos i \cos\varphi} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{-\sin i \sin\varphi}{\sin^2 i \operatorname{cotg}(\psi - v) - \sin i \cos i \cos\varphi}, \quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{tg}2F = \frac{\sin\varphi \sin i\,[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)] -}{\sin^2 i \operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v) -}$$

$$\frac{-2\cos i \sin\varphi \cos\varphi}{-\sin i \cos i \cos\varphi[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)] + \cos^2 i \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}. \quad (4)$$

Для общего случая это уравнение позволяет решать задачу только путем подбора значений, т. е. подстановкой разных значений для i при тех или иных заданных значениях φ, ψ и v. В частных же случаях (см. ниже) уравнение (4) решается легко.

Задача может быть рашена также и графически с помощью обычной вертушки, применяемой при федоровских измерениях. Последовательность операций при этом следующая. Проектируем кристалл по заданным значениям φ, ψ и v на прозрачную бумагу вертушки (рис. 1) и затем находим тот меридиан сетки Вульфа (считая меридианы от центра), который делит пополам угол a2b, образуемый меридианами, проходящими через проекции оптических осей. На рис. 1 один из таких меридианов, делящих угол пополам, образует с центральным меридианом угол α, а другой — угол β. Представим мысленно, что федоровский столик наклонен на 90° от себя, и что ось микроскопа совмещена с осью сетки Вульфа так, что мы смотрим в направлении от полюса 2 к полюсу 1. Если условиться поворачивать николи только по часовой стрелке, то поворот их, при котором происходит погасание, будет равен β (если же столик наклонен на 90° к себе, то мы смотрим в микроскоп в направлении от полюса 1 к полюсу 2, и в этом случае необходимый поворот николей будет $90° - \beta = \alpha$).

Если вернуть федоровский столик в первоначальное положение и поставить шлиф нормально к оси микроскопа, то таковая будет проектироваться в центре диаграммы. При этом одна биссектриса угла a2b займет положение A_2, а другая — положение P_2. Так как первоначальное (нулевое) положение николей было A_0 и P_0, то следовательно для получения погасания необходим поворот николей на угол β по часовой стрелке или на α против часовой стрелки (если же столик был наклонен на 90° к себе, то после его возвращения в первоначальное положение биссектрисы займут положения A_1 и P_1, и для погасания нужны повороты на угол α по и на угол β против часовой стрелки).

Так как в общем уравнении стереофигур (1) величиной, определяющей фигуру для каждого данного положения николей, служит $2F$ или $\operatorname{tg}2F$, то очевидно, что противоположные концы одного и того же диаметра могут принадлежать одной и той же стереофигуре только тогда, когда $F = 0$ или $F = 90°$. Во всех же остальных случаях противоположные концы одного и того же диаметра принадлежат разным стереофигурам, характеризующимся углами F_1 и F_2, причем $F_1+F_2=90^\circ$.

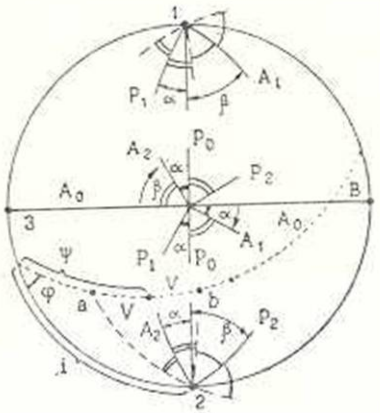

Рис. 1. Графическое решение прямой и обратной задачи по определению точек пересечения стереофигур с основным кругом.

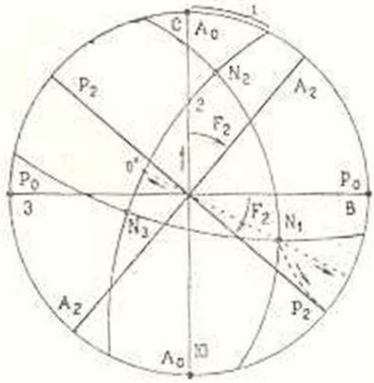

Рис. 2. Графическое решение задачи по определению точек пересечения стереофигур с проекциями главных сечений индикатрисы.

Поворачивая рамку вертушки, можно найти последовательно на основном круге точки, принадлежащие стереофигурам и для других значений угла F. При этом в некоторых случаях может оказаться, что F получает действительные значения только в пределах от $F=0$ до $F=z$ и от $F=90^\circ-z$ до $F=90^\circ$, для интервала же между z и $90^\circ-z$ угол F не получает действительных значений. Это показывает, что в таких случаях стереофигура не имеет точек на основном круге и представляет замкнутую кривую, подобную восьмерке, поясок которой совпадает с центром диаграммы. Если стереофигура имеет точки на основном круге, то она состоит из одной или двух разомкнутых линий, образующих петлю или крестообразное пересечение в центре диаграммы.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Когда $i=0$, т. е. когда плоскость оптических осей проходит через ось север-юг, уравнение (4) приводится к виду $\mathrm{tg}2F=-\mathrm{tg}2\varphi$, откуда получаем, что $F_1=-\varphi$ и $F_2=\varphi\pm90^\circ$, причем $F_1+F_2=90^\circ$.

б) Когда $F=0$ или $F=90^\circ$, числитель уравнения (4) должен быть равен нулю, т. е. должно быть

$$\sin\varphi\sin i\,[\mathrm{cotg}(\psi+v)+\mathrm{cotg}(\psi-v)]-2\cos i\sin\varphi\cos\varphi=0. \qquad (5)$$

Первым решением будет $\varphi=0$, независимо от значений переменных ψ, v и i, поэтому в качестве искомых точек на основном круге можно принять любые две противоположные точки. Следовательно, если разрез параллелен плоскости оптических осей, то при $F=0$ и $F=90^\circ$ основной круг входит полностью в состав стереофигуры. Второе решение дает

$$\operatorname{tg} i = \frac{2\cos\varphi}{\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)}. \tag{6}$$

Это уравнение показывает, что при $\varphi = 90^\circ$ (в разрезах перпендикулярно к плоскости оптических осей) решением будет $i = 0$, и искомыми точками будут концы диаметра, в виде которого проектируется плоскость оптических осей. Такое же решение $i = 0$ получается и при $\psi = v$, когда одна оптическая ось параллельна плоскости шлифа. В этом случае искомыми точками служат проекции этой оптической оси на основном круге.

3. *Точки стереофигур на проекциях главных сечений индикатрисы.* Способ отыскивания точек пересечения стереофигур с проекциями главных сечений индикатрисы показан на рис. 2, где N_1, N_2 и N_3 — оси индикатрисы, $A_0 A_0$ и $P_0 P_0$ — исходное (нулевое) положение главных сечений поляризатора и анализатора, СЮ и ВЗ — оси север-юг и восток-запад федоровского столика.

Из элементарной теории кристаллоптики известно, что если вектор, лежащий в одной из плоскостей симметрии индикатрисы, совмещен с осью микроскопа, то для приведения шлифа к погасанию нужно (независимо от величины угла оптических осей) повернуть его так, чтобы главное сечение одного из николей совместилось с той плоскостью симметрии индикатрисы, в которой лежит данный вектор.

Поэтому при каждом данном расположении на диаграмме треугольника проекций главных сечений индикатрисы точки пересечения этих проекций со стереофигурами не меняют своего положения и остаются постоянными для каждого значения угла F, независимо как от величины угла оптических осей, так и от наименования осей индикатрисы. В связи с этим можно принимать поочередно каждую ось индикатрисы в качестве оптической оси одноосного кристалла и находить нужные точки на перпендикулярном к ней сечении.

Отыскивание таких точек проще всего производить графически с помощью все той же вертушки. Для этого ставим ее так, чтобы ось сетки Вульфа совпадала с осью восток-запад федоровского столика, т. е. будем считать, что эта ось столика проектируется в полюсах сетки Вульфа. Этим определяется также и нулевое положение главных сечений николей $A_0 A_0$ и $P_0 P_0$, с которыми совпадают оси СЮ и ВЗ столика (рис. 2).

После этого поворачиваем мысленно николи на угол F_2 по часовой стрелке. При этом главные сечения николей должны занять положения $A_2 A_2$ и $P_2 P_2$, каковые отмечаем на самой сетке Вульфа. Затем поворачиваем рамку вертушки, а вместе с нею и проекцию кристалла так, чтобы ось индикатрисы N_1 (или какая-либо другая) совместилась с параллелью, проходящей через один из концов диаметров $A_2 A_2$ или $P_2 P_2$. Если после этого повернуть кристалл вокруг оси восток-запад так, чтобы проекция той же оси N_1 прошла по параллели (на рис. 2 — вдоль стрелки) и совместилась с близлежащим концом диаметра $A_2 A_2$

или P_2P_2 (на рис. 2 — это диаметр P_2P_2), то сечение индикатрисы N_2N_2 совместится с главным сечением одного из николей (на рис. 2 с сечением A_2A_2). Очевидно, что при этом вектор, совмещенный с центром диаграммы, окажется в положении погасания. Очевидно также, что таким вектором будет тот, который получается от пересечения плоскостей N_2N_2 и A_0A_0 (на рис. 2 этот вектор показан знаком „2").

Обратим внимание еще на то, что угол F поворота николей равен градусному расстоянию или от полюса сетки Вульфа до параллели, или от этой параллели до экватора сетки. Первый случай имеется тогда, когда ось индикатрисы совмещена с параллелью, проходящей через конец диаметра, соответствующего тому сечению николей, которое в нулевом положении было совмещено с осью восток-запад (как на рис. 2). Второй же случай имеет место тогда, когда имеем дело с параллелью, проходящей через конец диаметра, показывающего новое положение того сечения николей, которое первоначально совмещалось с осью север-юг.

Общее правило отыскивания точек на проекциях главных сечений индикатрисы сводится, таким образом, к следующему. Ставим сетку Вульфа как указано выше. Затем ось индикатрисы совмещаем с центральным меридианом на правой стороне сетки и находим градусное значение параллели, считая его от полюса. Это дает значение F, а искомая точка будет находиться на пересечении основного круга с проекцией сечения индикатрисы, перпендикулярного к данной ее оси. При этом верхняя точка пересечения принадлежит стереофигуре для F, а нижняя — для $90° - F$.

Затем поворачиваем рамку вертушки по часовой стрелке и совмещаем проекцию оси индикатрисы со следующими параллелями, более близкими к экватору сетки Вульфа. При этом искомые точки будут приближаться к середине проекции данного сечения индикатрисы, причем в верхней части значения F будут увеличиваться, а в нижней части значения $90° - F$ будут уменьшаться. В середине проекции этого сечения индикатрисы верхний ряд приводит к значению $F = 90°$, а нижний — к значению $F = 0$, каковые тождественны друг другу. Эти конечные значения получаются тогда, когда ось индикатрисы окажется на экваторе сетки Вульфа, а соответствующая этому искомая точка будет находиться на пересечении проекции этого сечения индикатрисы с диаметром, проведенным через принятую ось индикатрисы (точка 0° на рис. 2). Очевидно, что точки для значений F и $90° - F$ всегда располагаются симметрично (в равных расстояниях) от точки $F = 0$.

После того, как найдены искомые точки на всех трех главных сечениях индикатрисы, все значения F на контуре сферического треугольника сечений индикатрисы должны составлять три серии, в которых значения F изменяются последовательно только в одном направлении, трижды переходя от значений $F = 0$ к значениям $\dots F = 10°$, $\dots F = 40°$, $\dots F = 80°$ и $F = 90°$ (каковое тождественно $F = 0°$), а затем опять в том же порядке к значению $F = 90^\circ$ ($F = 0^\circ$) на другом главном сечении индикатрисы и т. д. (рис. 3).

Если имеем дело с одноосным кристаллом, то выбираем на экваториальном сечении индикатрисы любой вектор и, считая его осью индикатрисы, находим искомые точки на перпендикулярном к нему сечении. Наиболее удобно выбирать эти векторы в 90° один от другого и симметрично относительно основного диаметра, проходящего через проекцию оптической оси, так как в этом случае последовательности искомых точек для F одного и для $90^\circ - F$ второго дополнительного сечения индикатрисы также симметричны относительно основного диаметра (рис. 4).

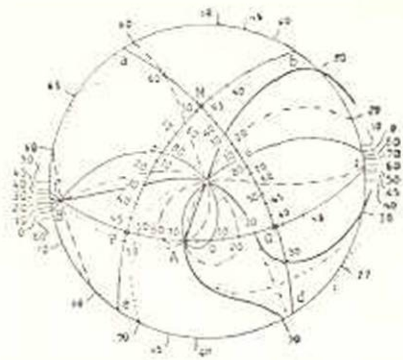

Рис. 3. Теоретическое построение стереофигур двуосного кристалла.

4. *Сопряженность стереофигур для F и $90^\circ - F$.* Линии стереофигур, пересекая основной круг, выходят за его пределы, т. е. имеют свое продолжение на нижней полусфере стереографической проекции, где составляют также какую то фигуру. При этом, если стереофигура верхней полусферы составлена для угла поворота николей F_1, то стереофигура нижней полусферы тождественна на верхней полусфере стереофигуре для $F_2 = 90^\circ - F_1$, повернутой на 180° вокруг нормали к плоскости проекции.

Пусть при некотором значении i положение погасающего вектора определяется наклоном к себе или от себя на угол y_1, который для нижней полусферы должен быть больше 90° и меньше 180°. Чтобы нанести этот вектор на уже имеющуюся диаграмму внутри основного круга, нужно отложить от центра угол $180^\circ - y_1$, притом с обратным знаком по отношению к y_1. Подставляя это значение в общее уравнение стереофигур (1), найдем, что при этом меняют знак первый член правой части и первое слагаемое числителей второго и третьего членов уравнения, а также второе слагаемое второго члена их знаменателей. Если же принять вместе с тем для i новое значение $i_2 = i_1 + 180^\circ$, то изменим знак второго слагаемого числителей и восстановим первоначальную форму второго члена знаменателей.

Таким образом, при $i_2 = i_1 + 180^\circ$ стереофигура нижней полусферы, спроектированная на верхнюю полусферу, меняет только свой знак, т. е. получаем $2F_1 = -2F_2$ и $F_1 + F_2 = 90^\circ$, так как $\mathrm{tg}2F_1 = -\mathrm{tg}(180^\circ - 2F_1)$ и $\mathrm{tg}2F_1 = -\mathrm{tg}2F_2$, откуда $180^\circ - 2F_1 = 2F_2$. Следовательно, построив обычным путем фигуру для $F_2 = 90^\circ - F_1$, и повернув ее на 180° вокруг нормали к плоскости проекции, будем иметь проекцию нижней половины стереофигуры для F_1, причем линии одной из фигур служат продолжением линий другой из них.

Сопряженную стереофигуру можно строить также и сразу, повернув предварительно диаграмму на 180°, т. е. откладывая каждый раз углы не i, а 180° + i.

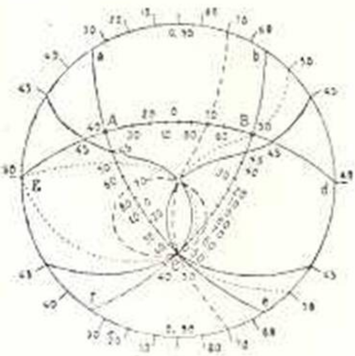

Рис. 4. Теоретическое построение стереофигур одноосного кристалла.

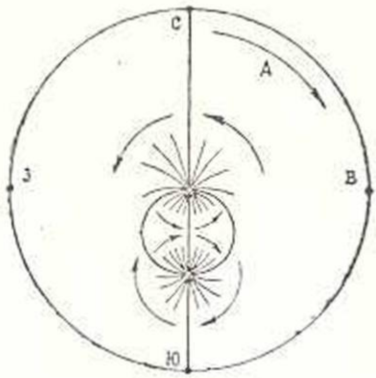

Рис. 5. Соотношение поворотов ветвей стереофигур в зависимости от направления поворотов николей.

5. *Перемещение ветвей стереофигур при поворачивании николей.* Из предыдущего описания общих особенностей стереофигур вытекает закономерность перемещения их линий при поворачивании николей микроскопа. Закономерность эта, в схематическом виде показанная на рис. 5, сводится к тому, что в центре диаграммы линии стереофигур поворачиваются всегда в направлении, обратном направлению поворота николей, а в проекциях оптических осей в том же направлении, в каком происходит поворот николей.

Стереофигуры одноосных кристаллов

1. *Косые разрезы (рис. 6 и 7).* У косых разрезов одноосных кристаллов $v = 0$ и $\varphi = 90°$. Общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$\operatorname{tg} F = \frac{\sin i \operatorname{cotg}\varphi}{\cos y \cos i \operatorname{cotg}\varphi - \sin y}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg} 2F = \frac{2\sin i \operatorname{cotg}\varphi (\cos y \cos i \operatorname{cotg}\varphi - \sin y)}{(\cos y \cos i \operatorname{cotg}\varphi - \sin y)^2 - \sin^2 i \operatorname{cotg}^2\varphi}. \qquad (8)$$

При $F = 0$ и $F = 90°$ должно быть $2\sin i \operatorname{cotg}\varphi (\cos y \cos i \operatorname{cotg}\varphi - \sin y) = 0$

$$\text{или } 2\sin i (\cos i \operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg} y) = 0. \qquad (9)$$

Первое решение здесь $i = 0$ и $i = 180°$, т. е. это диаметр, проходящий через проекцию оптической оси, так как в этом случае $\operatorname{tg} 2F = 0$ при любом значении F. Вторым решением является уравнение $\cos i \operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg} y = 0$ или $\operatorname{tg} y = \cos i \operatorname{cotg}\varphi$. Проверяя это уравнение, найдем, что ему отвечает замкнутая кривая, проходящая через центр диаграммы и через проекцию оптической оси, так как эта кривая не имеет точек на основном круге (для этого должно быть $\mathrm{tg}y = \infty$, между тем $\mathrm{cotg}\psi$ представляет конечную величину). Эта замкнутая кривая симметрична относительно диаметра первого решения и пересекает его под углом в 90°. При увеличении значения ψ средний диаметр этой кривой уменьшается и наоборот.

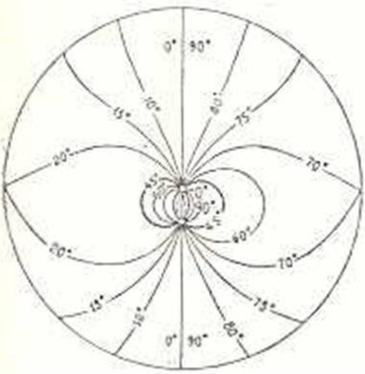

Рис. 6. Полная стереофигура одноосного кристалла для косого разреза при $\psi = 70°$.

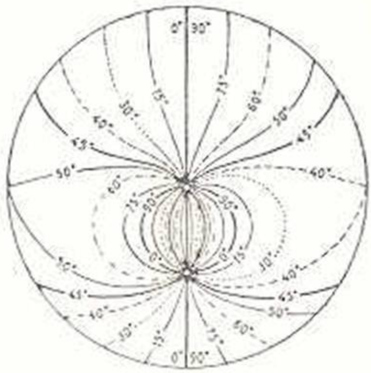

Рис. 7. Полная стереофигура одноосного кристалла для косого разреза при $\psi = 40°$.

Таким образом, при $F = 0$ и $F = 90°$ стереофигура представляет сочетание диаметра и замкнутой кривой, т. е. состоит из двух ветвей.

Выясним теперь тип фигуры, когда $0 < F < 90°$. В этом случае уравнение (8) приводится к сложному виду уравнения четвертой степени, не удобному для общего анализа. Поэтому исследование проведем косвенным путем. Найдем те значения i, при которых стереофигура имеет точки на основном круге. Подставив в уравнение (8) $y = 90°$, получим новое уравнение

$$\mathrm{tg}2F = \frac{-2\sin i\,\mathrm{cotg}\psi}{1 - \sin^2 i\,\mathrm{cotg}^2\psi}, \tag{10}$$

откуда

$$\sin i_1 = \mathrm{cotg}\,F\,\mathrm{tg}\psi \text{ и } \sin i_2 = -\mathrm{tg}F\,\mathrm{tg}\psi = -\mathrm{cotg}\,(90° - F)\,\mathrm{tg}\psi; \quad (11, 12)$$

кроме того, имеем $i_3 = 180° - i_1$ и $i_4 = 180° - i_2$. Следовательно в общем случае стереофигура состоит из двух разомкнутых кривых, пересекающихся в центре и в проекциях оптической оси.

При $F = 45°$ уравнение (8) приводит к условию $(\cos y \cos i\,\mathrm{cotg}\psi - \sin y)^2 - \sin^2 i\,\mathrm{cotg}^2\psi = 0$, показывающему, что стереофигура определяется двумя уравнениями $(\cos y \cos i\,\mathrm{cotg}\psi - \sin y) \pm \sin i\,\mathrm{cotg}\psi = 0$, т. е. состоит из двух кривых, которые при $\psi > 45°$ замкнутые, так как не имеют точек на основном круге. При $\psi = 45°$ кривые имеют по одной точке на основном круге, причем должно быть $i = \pm 90°$. При $\psi < 45°$ каждая из кривых становится разомкнутой и имеет на основном круге по две точки, для которых $\sin i = \pm \operatorname{tg}\psi$. Очевидно, что кривые эти зеркально симметричны относительно основного диаметра стереофигуры.

Когда $F = 0$, имеем, по уравнению (12), $i_2 = 0$ и $i_4 = 180°$; уравнение же (11') не имеет решений. Следовательно стереофигура состоит из диаметра и замкнутой кривой, как уже было показано выше. По мере увеличения угла F, значение i_2 по уравнению (12) тоже увеличивается, а i_4 уменьшается, т. е. концы диаметра, превратившегося в изогнутую линию, последовательно сближаются друг с другом. Замкнутая же кривая выпучивается в сторону, противоположную той, где происходит сближение концов разомкнутой линии.

Если значение F становится равным $90° - \psi$, то по уравнению (12) $\sin i_2 = 1$, следовательно $i_2 = i_4 = 90°$, т. е. кривая из разомкнутой становится замкнутой с одной точкой на основном круге. При дальнейшем увеличении значения F, кривая отрывается от основного круга и последовательно стягивается к основному диаметру.

Изменение же замкнутой кривой начальной стереофигуры происходит при увеличении F в обратном направлении. При $F = \psi$ она, по уравнению (11), достигает основного круга и получает на нем точку, для которой $i_1 = i_3 = 90°$. При дальнейшем увеличении F кривая становится уже разомкнутой, и ее концы последовательно раздвигаются, приближаясь к концам основного диаметра.

Превращение разомкнутых кривых в замкнутые и наоборот происходит одновременно только при $\psi = 45°$. При других значениях ψ это превращение кривых происходит разновременно, когда $F = \psi$ и $F = 90° - \psi$, и интервал между этими значениями увеличивается с увеличением разности $\psi - 45°$ или $45° - \psi$. В пределах этого интервала стереофигура состоит в общем случае всегда из двух асимметричных разомкнутых кривых. Симметричными они становятся только при $F = 45°$.

2. *Разрез параллельно оптической оси (рис. 8).* В таком разрезе $\psi = 0$, а для φ можно принять любое значение. Чтобы не изменять уравнений, принимаем $\varphi = 90°$. При этих условиях уравнение (8) получает вид

$$\operatorname{tg}2F = \frac{2\operatorname{tg}i\cos y}{\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}F = \frac{\operatorname{tg}i}{\cos y}. \tag{13}$$

При $F = 0$ должно быть или $\operatorname{tg}i\cos y = 0$ или $\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i = \infty$. В первом случае имеем $i = 0$ для произвольных значений y, и $y = 90°$ для произвольных значений i, т. е. это сочетание основного круга с основным диаметром, проходящим через проекцию оптической оси. Во втором случае получаем $\operatorname{tg}i = \infty$ и $i = 90°$, т. е. в состав стереофигуры входит и второй диаметр, перпендикулярный к первому.

Если $F \gtrless 0$, то из уравнения (13) выводим

$$\cos y_1 = \operatorname{tg}i\operatorname{cotg}F \quad \text{и} \quad \cos y_2 = -\operatorname{tg}i\operatorname{tg}F, \tag{14, 15}$$

т. е. стереофигура имеет две отдельные кривые, пересекающие основной круг только при $i = 0$ и независимо от значений F. Кривые эти S-образные, так как должны пересекаться в центре под 90°.

При изменении значения F изогнутость одной из кривых усиливается, а другая становится более пологой. В пределе, при $F = 0$ и $F = 90°$, первая из них совмещается с основным кругом и вторым диаметром, а другая — с основным диаметром.

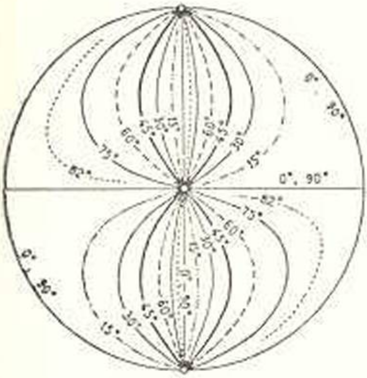

Рис. 8. Полная стереофигура одноосного кристалла для разреза, параллельного оптической оси.

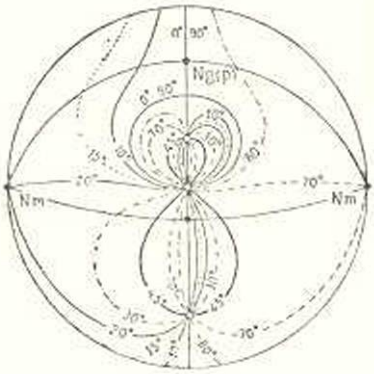

Рис. 9. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси N_m. $\varphi = 90°$, $\psi = 70°$, $v = 50°$, $\psi + v > 90°$.

Полную стереофигуру этого разреза можно вывести из стереофигуры косого разреза (рис. 6 и 7), если подтянуть проекцию оптической оси на основной круг последовательным уменьшением значения ψ.

3. *Разрез перпендикулярно к оптической оси.* В этом случае $\varphi = 90°$ и $\psi = 90°$, поэтому уравнения (1) и (8) получают вид $\mathrm{tg} 2F = 0$, т. е. удовлетворяются при $F = 0$ и $F = 90°$ любыми значениями переменных i и y. Вместе с тем уравнение не имеет решений, если F не равно нулю. При $F = 0$ элементарная стереофигура состоит лишь из основного диаметра, так как должна содержать только одну „кривую", как это было показано выше, в общей части. Замкнутая же кривая стереофигур косых разрезов, уменьшаясь с увеличением угла ψ, превращается здесь в точку.

Так как в подобных разрезах можно принимать для любого положения шлифа $i = 0$, то полная стереофигура при $F = 0$ превращается в сплошное темное пятно.

Стереофигуры двуосных кристаллов

Аналитическое исследование стереофигур двуосных кристаллов дано ниже только для некоторых, более простых разрезов и условий. В остальных же случаях ограничиваемся материалами графического построения фигур на основе общей их теории.

1. *Разрез параллельно оси* N_m. *Оптические оси проектируются по разные стороны от центра диаграммы (рис. 9)*. В таких разрезах угол $\varphi = 90°$. Подставляя это значение в уравнение (1), получим

$$2F = 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}i}{\cos y} - \operatorname{arctg}\frac{-\sin y \sin i}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi+v) - \sin y\cos y\cos i} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{-\sin y\sin i}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi - v) - \sin y\cos y\cos i}. \qquad (16)$$

При $F=0$ и $F=90°$ условие решаемости этого уравнения имеет следующий вид:

$$2\cos y\operatorname{tg}i\{[(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi+v) - \sin y\cos y\cos i]\times$$
$$\times[(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi-v) - \sin y\cos y\cos i] - \sin^2 y\sin^2 i\} +$$
$$+\{(1-\sin^2 y\cos^2 i)[\operatorname{cotg}(\psi+v)+\operatorname{cotg}(\psi-v)] -$$
$$-2\sin y\cos y\cos i\}(\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i)\sin y\sin i = 0. \qquad (17)$$

Первое решение этого уравнения $\sin i = 0$ и $i = 0$, а соответствующая часть стереофигуры представляет основной диаметр. Освободив уравнение (17) от общего множителя $\sin i$ и преобразовав его, получаем уравнение второй части стереофигуры

$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}y[\operatorname{cotg}(\psi+v)+\operatorname{cotg}(\psi-v)]}{2\operatorname{cotg}(\psi+v)\operatorname{cotg}(\psi-v)} = \frac{\operatorname{tg}y\sin 2\psi}{\cos 2\psi + \cos 2v}. \qquad (18)$$

Кривая, соответствующая уравнению (18), не имеет точек на основном круге. Она симметрична относительно основного диаметра и пересекает его в двух точках, в центре и в расстоянии от центра $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{cotg}(\psi+v)\operatorname{cotg}(\psi-v)}{\operatorname{cotg}(\psi+v)+\operatorname{cotg}(\psi-v)}$, причем проходит здесь между биссектрисой и оптической осью, более близкой к центру.

Определим теперь стереофигуру для $F=45°$. В этом случае условие решаемости уравнения (16) выражается уравнением

$$(\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i)\{[(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi+v) - \sin y\cos y\cos i]\times$$
$$\times[(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{cotg}(\psi-v) - \sin y\cos y\cos i] - \sin^2 y\sin^2 i\} = 0. \qquad (19)$$

Подставляя в это уравнение $i=0$, найдем, что кривая пересекает основной диаметр в точках $\operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(\psi+v)$ и $\operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(\psi-v)$, т. е. в проекциях оптических осей. Подставляя же $y=0$, получим, что $\operatorname{tg}^2 i = 1$, т. е. $i = \pm 45°$, следовательно кривая дважды проходит через центр. Наконец, подставляя $y = 90°$ и освобождая уравнение от общего множителя $\sin i$, учтенного уже выше, найдем, что должно было бы быть

$$\operatorname{cotg}(\psi+v)\operatorname{cotg}(\psi-v) = \operatorname{cosec}^2 i, \qquad (20)$$

что невозможно, так как левая часть этого выражения отрицательна, поскольку $\psi + v > 90°$. Поэтому кривая не имеет точек на основном круге и представляет „восьмерку", симметричную относительно основного диаметра.

Проверим еще стереофигуры при $0 < F < 90^\circ$. Определим, в каких точках они пересекают основной круг. Подставляя в уравнение (16) $y = 90^\circ$, получаем:

$$2F = 2\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sin^2 i \operatorname{cotg}(\psi + v)} - \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sin^2 i \operatorname{cotg}(\psi - v)}. \qquad (21)$$

или
$$\operatorname{tg}2F = \frac{\sin^2 i\,[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]}{\sin^4 i \operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v) - 1}. \qquad (22)$$

Одно из возможных решений мы уже имели, а именно, $i = 0$ для стереофигуры при $F = 0$. При $i = \pm 90^\circ$ получаем $\operatorname{tg}2F = \pm \operatorname{tg}2\psi$, следовательно при $F = \psi$ и $F = 90^\circ - \psi$ искомая точка стереофигуры на основном круге находится на его пересечении с диаметром, перпендикулярным к основному диаметру. Для остальных значений F уравнение приводится к виду

$$\sin^2 i = \frac{\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)}{2\operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v)\operatorname{tg}2F} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]^2 + 4\operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v)\operatorname{tg}^2 2F}}{2\operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v)\operatorname{tg}2F}, \qquad (23)$$

дающему только два решения: i_1 и $i_2 = 180^\circ - i_1$. Уравнение это слишком сложное для общего анализа, поэтому обзор последовательности изменения стереофигур проведем по материалам графического построения стереофигур (рис. 9). За исходное положение примем фигуру „восьмерки", получающуюся при $F = 45^\circ$. При изменении F от 45° до 0 или до 90° восьмерка теряет симметричность. Ее меньшая часть вытягивается в сторону замкнутой кривой, уподобляясь последовательно контуру замкнутой кривой, и при $F = 0$ и $F = 90^\circ$ совмещается с одной из ее половинок и с отрезком основного диаметра внутри замкнутой кривой. Вторая же, большая часть восьмерки вытягивается в противоположную сторону, к основному кругу, и при $F = \psi$ и $F = 90^\circ - \psi$ соприкасается с основным кругом в точке на диаметре, перпендикулярном к основному, причем ветви стереофигуры составляют здесь угол в 90°. При дальнейшем изменении F, от $F = \psi$ до $F = 90^\circ$ или от $F = 90^\circ - \psi$ до $F = 0$, стереофигура разрывается в точке соприкосновения с основным кругом, и затем ее концы раздвигаются от этой точки к концам основного диаметра, пересекаясь с основным кругом в точках i и $180^\circ - i$. Такая стереофигура состоит уже из одной разомкнутой и прихотливо изгибающейся кривой, образующей петлю внутри замкнутой кривой фигуры $F = 0$. Наконец, когда $F = 0$ или $F = 90^\circ$, разомкнувшиеся ветви стереофигуры совмещаются на одной стороне диаграммы с основным диаметром, а на другой — со второй половиной замкнутой кривой и с отрезком основного диаметра между этой кривой и основным кругом, причем возникает фигура, состоящая из основного круга и замкнутой кривой.

2. *Разрез параллельно оси* N_m *и одной из оптических осей (рис 10).* Стереофигуры этого разреза такие же, по типу, как и в предыдущем случае, и их можно получить, если у „восьмерки" на рис. 9 привести оптическую ось (более удаленную от центра) на основной круг. Главные стереофигуры (при $F = 0$, $F = 90°$ и $F = 45°$) такие же, т. е. это сочетание основного диаметра с замкнутой кривой и восьмерка. Существенная разница в том, что восьмерка имеет одну точку на основном круге в проекции оптической оси. Изменение стереофигур при изменении значения F происходит так же, как это было установлено в предыдущем случае. Все главные уравнения существенно изменяются, так как здесь $\psi - v = 0$.

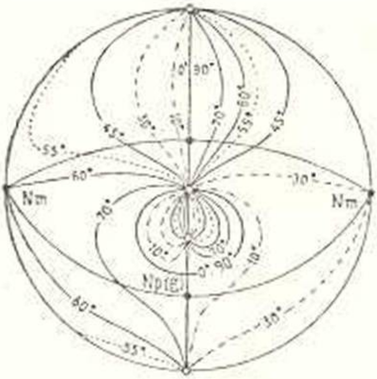

Рис. 10. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси N_m. $\varphi = 90°$, $\psi = 30°$, $v = 30°$, $\psi - v = 0$.

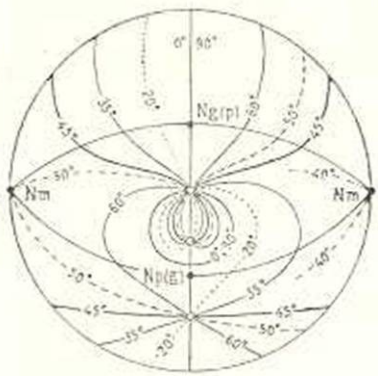

Рис. 11. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси N_m. $\varphi = 90°$, $\psi = 40°$, $v = 20°$.

3. *Разрез параллельно оси* N_m. *Обе оптические оси проектируются по одну сторону от центра диаграммы* (*рис. 11*). Стереофигуры этого разреза можно получить из фигур предыдущего случая, если выдвинуть оптическую ось с основного круга за его пределы. При этом данная оптическая ось вместе с проходящими через нее ветвями стереофигур появится на противоположной стороне диаграммы. Во всем остальном стереофигуры и порядок их изменения такие же, как и в случае рис. 9 и 10. Уравнения имеют, в общем, тот же вид, как и в случае стереофигуры, представленной на рис. 9.

4. *Разрез перпендикулярно биссектрисе (рис. 12).* В этом случае стереофигуры уже существенно иные, так как здесь, кроме $\varphi = 90°$, также и $\psi = 90°$. Общее уравнение получает вид

$$2F = 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}i}{\cos y} + \operatorname{arctg}\frac{-\sin y \sin i}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i)\operatorname{tg}v + \sin y \cos y \cos i} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{\sin y \sin i}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{tg} v-\sin y\cos y\cos i}. \qquad (24)$$

Условием решаемости этого уравнения при $F=0$ и $F=90^\circ$ может служить уравнение (17), если в нем подставить $\psi=90^\circ$. Первым решением будет $i=0$, т. е. это — основной диаметр. Второе решение, по уравнению (18) при $\psi=90^\circ$, дает $i=90^\circ$ — второй диаметр, перпендикулярный к основному. Наконец, подставив в уравнение (17) $\psi=90^\circ$ и $y=90^\circ$, найдем, что оно удовлетворяется при любых значениях i, следовательно в состав стереофигуры входит и основной круг.

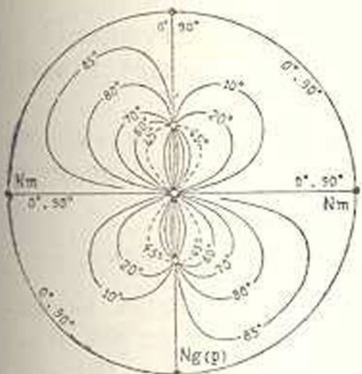

Рис. 12. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси N_m и перпендикулярно к биссектрисе. $\varphi=90^\circ$, $\psi=90^\circ$, $v=40^\circ$.

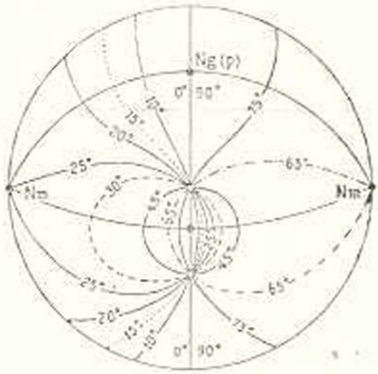

Рис. 13. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза перпендикулярно к оптической оси. $\varphi=90^\circ$, $\psi=65^\circ$, $v=25^\circ$, $\psi+v=90^\circ$.

При $F=45^\circ$ находим, по уравнению (19) и (20), подставив $\psi=90^\circ$ и $y=90^\circ$, что кривая не имеет точек на основном круге и представляет симметричную „восьмерку". Далее, пользуясь уравнением (22) и подставляя в него $\psi=90^\circ$, получим, что при $0<F<90^\circ$ стереофигуры не имеют точек на основном круге и представляют асимметричные восьмерки. При изменении F от 45° до 0 и до 90°, восьмерка раздувается по одной или по другой диагонали и в пределе сливается с основным кругом и с двумя диаметрами.

5. *Разрез перпендикулярно к оптической оси (рис. 13).* У таких разрезов $\varphi=90^\circ$, $\psi+v=90^\circ$, $\psi-v=90^\circ-2v$. Для анализа можно пользоваться уравнениями, выведенными выше для стереофигур на рис. 9. Подставив в уравнение (17) новые значения переменных, найдем, что при $F=0$ и $F=90^\circ$ стереофигура состоит только из основного диаметра, так как решение этого уравнения $i=0$. По уравнению же (18) найдем, что при новых значениях переменных оно получает вид $2\cos i=\operatorname{tg} y\operatorname{tg} 90^\circ$ и может иметь решение только при $y=0$, т. е. это — точка в центре, в каковую превращается замкнутая кривая уравнения (18). Для $F=45^\circ$ уравнение (19) при новых условиях дает

$$(\cos^2 y - tg^2 i)\{[(1 - \sin^2 y \cos^2 i)\, tg^2 v -$$

$$- \sin y \cos y \cos i]\sin y \cos y \cos i - \sin^2 y \sin^2 i\} = 0 \quad (25)$$

и после преобразования приводится к виду $tg y = \cos i\, tg 2v$, т. е. представляет замкнутую кривую.

Сравнивая уравнения стереофигур данного разреза при $F = 0$ и $F = 90°$ с уравнениями стереофигур косого разреза одноосного кристалла (уравнение 9 и выведенные из него), увидим, что они полностью совпадают. Таким образом, при $F = 0$ и $F = 90°$ стереофигура двуосного кристалла представлена одной частью стереофигуры одноосного кристалла (основным диаметром), а при $F = 45°$ — другой ее частью, замкнутой кривой, которая в точности совмещается с такой же кривой одноосного кристалла. При этом значение F одноосного кристалла равно 2F двуосного.

Подставив в общую форму уравнения (16) при $\varphi = 90°$ дополнительные условия данного разреза и кроме того $y = 90°$, получим уравнение

$$\sin i = - tg 2F \cot g 2v = tg 2F \cot g (180° - 2v), \quad (26)$$

показывающее, что стереофигура может иметь точки на основном круге только при $2F \leqslant 2v$ или $2F > 180° - 2v$, т. е. при $F \leqslant v$ или $F \geqslant 90° - v$, и в обоих случаях может быть лишь i и $180° - i$, а значит, только две точки и в вместе с тем только одна кривая, как это уже было выяснено выше. Соответствующая фигура тождественна одной части фигуры одноосного кристалла при том условии, что F одноосного кристалла равно 2F двуосного.

При $F = 0$ фигура представлена основным диаметром. При $0 < F < v$ — это разомкнутая кривая. При $F = v$ концы кривой смыкаются на диаметре, перпендикулярном к основному. Для $45° > F > v$ фигура представляет асимметричную замкнутую кривую, которая становится симметричной при $F = 45°$. Дальнейшее изменение происходит в обратном порядке.

6. *Разрез перпендикулярно к оптической оси при $2v = 90°$ (рис. 14).* В этом случае $\varphi = 90°$, $\psi = 45°$, $\psi + v = 90°$ и $\psi - v = 0$. Общее уравнение стереофигур (1) получает вид

$$2F = \operatorname{arctg} \frac{tg\, i}{\cos y} \quad \text{или} \quad tg 2F = \frac{tg\, i}{\cos y}. \quad (27)$$

Сравнивая его с уравнением (13) для разреза одноосного кристалла параллельно его оптической оси, можно установить, что стереофигуры этих разрезов геометрически тождественны, а математически отличаются тем, что, во-первых, у двуосного кристалла стереофигура содержит только одну кривую, и, во-вторых, тем, что F одноосного кристалла, для тождественных фигур, равно 2F двуосного.

7. *Разрез параллельно плоскости оптических осей (рис. 15 и 16).* Здесь $\varphi = 0$, а для ψ можно принять любое значение. Для упро-

щения уравнений лучше принять $\psi = 0$. Общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$2F = 2\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,i}{\cos y} - \mathrm{arctg}\,\frac{\cos y}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i)\,\mathrm{cotg}\,v - \sin^2 y \sin i \cos i} +$$

$$+ \mathrm{arctg}\,\frac{\cos y}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i)\,\mathrm{cotg}\,v + \sin^2 y \sin i \cos i}. \qquad (28)$$

Когда $F = 0$ и $F = 90°$, уравнение удовлетворяется: при $y = 90°$ любыми значениями i; при $i = 0$ и $i = 90°$ — любыми значениями y. Поэтому стереофигура состоит из основного круга и двух диаметров, проходящих через проекции осей индикатрисы.

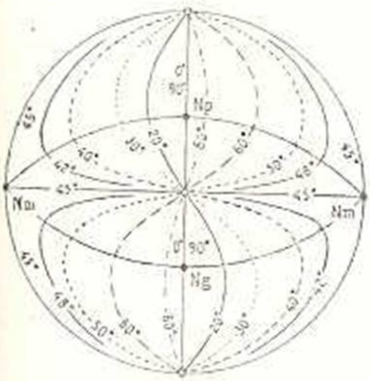

Рис. 14. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза перпендикулярно к оптической оси. $\varphi = 90°$, $\psi = 45°$, $v = 45°$, $\psi + v = 90°$, $\psi - v = 0$.

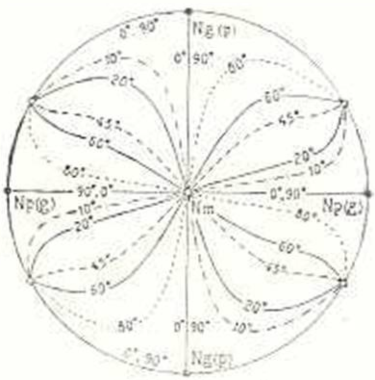

Рис. 15. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно плоскости оптических осей. $2v < 90°$.

При $0 < F < 90°$ и $y = 90°$ уравнение (28) получает решение только тогда, когда оно приводится к неопределенности, а это может быть при $i = \pm v$ или $i = 90° \pm v$. Следовательно, стереофигура имеет четыре точки на основном круге в проекциях оптических осей и состоит из двух перекрещивающихся кривых. При $F = 45°$ уравнение (28) имеет условием решаемости выражение $(1 - \sin^2 y \cos^2 i)\,\mathrm{cotg}\,v \pm \pm \sin^2 y \sin i \cos i = 0$, которое показывает, что стереофигура состоит из двух симметричных кривых. При изменении F от $F = 45°$ до $F = 0$ или $F = 90°$, кривые изгибаются, стремясь вписаться в контур, образуемый основным кругом и диаметрами.

При $2v = 90°$ стереофигура отличается лишь тем, что в ее составе фигура, соответствующая $F = 45°$, представлена прямоугольным крестом двух диаметров, проходящих через проекции оптических осей.

8. *Разрез параллельно одной из биссектрис (рис. 17).* Для таких разрезов имеется только одно ограничивающее условие, $\psi = 90°$, поэтому математический анализ очень усложняется. Общее уравнение (1) приводится к виду

$$2F = 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} i}{\cos y} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{\cos y\cos\varphi - \sin y\sin i\sin\varphi}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{tg} v + \sin y\cos i(\sin y\sin i\cos\varphi + \cos y\sin\varphi)} -$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{\cos y\cos\varphi - \sin y\sin i\sin\varphi}{(1-\sin^2 y\cos^2 i)\operatorname{tg} v - \sin y\cos i(\sin y\sin i\cos\varphi + \cos y\sin\varphi)}. \qquad (29)$$

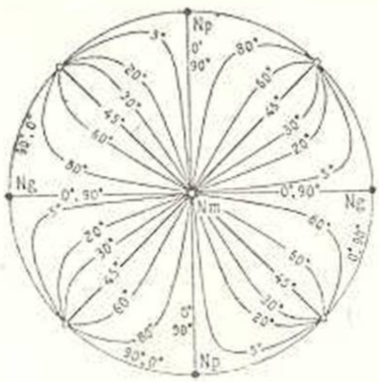

Рис. 16. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно плоскости оптических осей. $2v = 90°$.

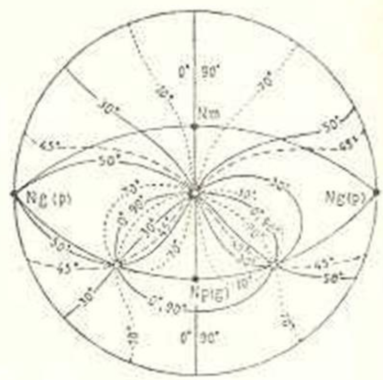

Рис. 17. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно биссектрисе. $\varphi = 40°$, $\psi = 90°$, $v = 35°$.

Когда $F = 0$ и $F = 90°$, стереофигура состоит из диаметра и замкнутой кривой. Наличие диаметра доказывается, если в уравнение (29) подставить $i = 90°$. При этом оно получает вид $2F = 2\operatorname{arctg}\infty$ и $\operatorname{tg}2F = \operatorname{tg}180° = 0$ и удовлетворяется при всех значениях φ и y. Присутствие замкнутой кривой доказывается тем, что при дополнительном условии $y = 90°$ уравнение (29) приводится к виду

$$\operatorname{tg}2F = \frac{2\cos i\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2 i\operatorname{tg}^2 v - \cos^2 i\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = 0, \qquad (30)$$

где решение $\cos i = 0$ и $i = 90°$ уже получено выше (диаметр в составе стереофигуры). После исключения множителя $\cos i$ оставшаяся часть уже не может быть равна нулю ни при каких значениях i и φ. Следовательно, соответствующая часть стереофигуры должна быть замкнутой кривой.

Не останавливаясь на математическом анализе последовательности изменения стереофигур, укажем, что при изменении F от 0 до 90° фигура диаметра и замкнутой кривой разрывается в точке их пересечения, и стереофигура превращается в сложную кривую, с одной петлей, и пересекается с основным кругом в точках i и $180° - i$. При $F = v$ и $F = 90° - v$ стереофигура получает еще третью точку на основном круге, $i = \pm 90°$, на противоположной стороне диаграммы, и в этом случае фигура состоит уже из двух кривых, сходящихся в этой, третьей точке. В интервале же между $F = v$ и $F = 90° - v$ стереофигура состоит из двух кривых. Например, при $F = 45°$ и $v = 90°$ уравнение (29) приводится к виду $\sin^2 i \operatorname{tg}^2 v - \cos^2 i \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$, откуда выводим, что $\sin i = \pm \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 v + \cos^2 \varphi}}$, т. е. что имеется четыре решения: $\pm i$ и $\pm(180° - i)$.

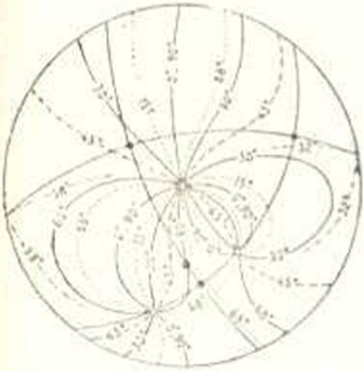

Рис. 18. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для $2v = 50°$, $\varphi = 40°$, $\psi = 55°$.

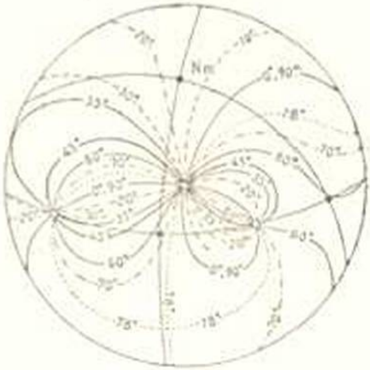

Рис. 19. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для $2v = 110°$, $\varphi = 60°$, $\psi = 75°$.

9. *Косые разрезы (рис. 18, 19 и 20).* В качестве примера косых разрезов даны полные стереофигуры трех кристаллов: со средним, большим и малым углом оптических осей. Математический анализ для них почти невозможен, так как в стереофигурах не имеется простых форм. Поэтому мы ограничимся лишь сравнением графически построенных фигур со стереофигурой предыдущего случая (рис. 17). Как там, так и здесь, одна из частных стереофигур содержит замкнутую кривую, но она асимметричная и сочетается не с диаметром, а с асимметричной же кривой. На рис. 18 такая фигура возникает при $F = 68°$, на рис. 19 — при $F = 78°$, а на рис. 20 — должна быть при $45° < F < 60°$.

Затем, и здесь стереофигуры при изменении угла F последовательно поворачиваются и превращаются из „восьмерок" в однопетельчатые кривые и в сочетание двух кривых. Обращает внимание крайняя прихотливость кривых, делающая невозможным их аналитическое исследование.

Теоретическое построение стереофигур

Примеры теоретического построения стереофигур даны на рис. 3 и 4, где на основном круге и на проекциях главных сечений индикатрисы показаны точки их пересечения со стереофигурами разных значений F.

1. *Двуосные кристаллы (рис. 3).* Проведение кривых линий стереофигур начинаем со сферического треугольника MPG, определяемого проекциями осей индикатрисы, внутри которого лежит всегда и центр диаграммы. На контуре этого треугольника расположены обычно четыре и как исключение — две точки для каждого значения F, причем одной из них служит проекция оптической оси. Так как внутри треугольника кривые обязательно проходят через центр (и если кривых две, то они пересекаются под 90°), то можно сразу же соединить накрест имеющиеся четыре точки, а затем проследить их продолжение в смежных контурах. После того, как построена первая стереофигура, построение остальных уже не представляет труда, так как они должны поворачиваться в центре в направлении, обратном повороту николей.

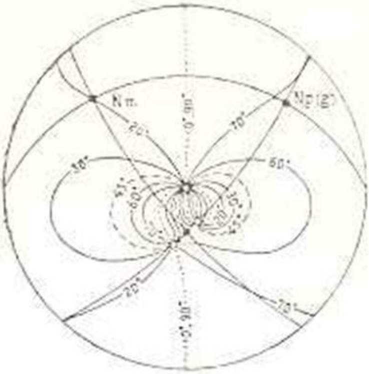

Рис. 20. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для $2v = 20°$, $\varphi = 70°$, $\psi = 70°$.

Для примера построим стереофигуру для $F = 20°$. Соединяем накрест точки внутри треугольника MPG, причем продолжение кривых входит из этого треугольника внутрь смежных контуров: MbcG, aMPf и PGde. В первом из них имеется только одна свободная точка для $F = 20°$, притом на дуге bc, поэтому протягиваем кривую к ней. На втором контуре тоже только одна свободная точка для $F = 20°$, это — проекция оптической оси B. Проведя кривую через эту точку B, входим внутрь контура Pef, где свободная точка имеется для $F = 20°$ только на основном круге. В третьем же контуре, PGde, свободных точек для $F = 20°$ нет, поэтому вошедшие туда концы кривых соединяем друг с другом.

Так же можно построить стереофигуры и для других значений угла F. Не приводя следующих примеров такого построения, укажем лишь некоторые случаи, когда проведение линий может показаться затруднительным. Так, при $F = 45°$ из срединного треугольника MPG две линии войдут внутрь контура MbcG, на котором имеются две свободные точки. Обращаясь к смежным контурам Mab и cdG, найдем и в них по одной свободной точке на дугах ab и cd. Так как ни одна из точек не должна оставаться неиспользованной и так как пересечение кривых внутри контура MbcG невозможно под 90°, то кривую, проходящую близ оси M, соединяем с точкой $F = 45°$ на дуге ab, а вторую кривую — с точкой на дуге cd.

Другой сложный случай имеем в контуре PGde для $F = 30°$. Сюда из срединного треугольника входят две кривые, и на контуре PGde имеются две свободные точки для $F = 30°$. Соединить эти точки можно либо накрест, либо „параллельно". Крестообразное пересечение принимаем только тогда, когда оно происходит под углом почти в 90° (на рис. 3 жирные линии для „параллельного" соединения линий и пунктир „тире — две точки" — для крестообразного). Объяснение кажущейся неопределенности этого случая следующее. При значениях $F = 27°$ и $F = 30°$ кривые линии располагаются подобно гиперболам обычной коноскопической фигуры до и после разрыва креста, т. е. по его диагоналям. При поворачивании николей от $F = 27°$ до $F = 30°$ гиперболы, показанные на рис. 3 точечным пунктиром, будут сближаться и при $F \approx 28.5°$ соединяются друг с другом, образуя крест, который при дальнейшем увеличении угла F разрывается и дает расходящиеся гиперболы.

Такие крестообразные пересечения уже были установлены выше, при описании стереофигур разных разрезов кристаллов, например, в виде сочетания замкнутых линий с диаметром. В данном случае, на рис. 3, замкнутой кривой является та, которая проходит через точки на дугах dG и cd. Недостающая часть замкнутой кривой находится за пределами основного круга. На противоположной стороне диаграммы к ней очень близка ветвь сопряженной стереофигуры для $F = 60°$.

2. *Одноосные кристаллы (рис. 4).* Построение стереофигур одноосного кристалла производится по тому же принципу, как и для двуосного. Для образования срединного сферического треугольника наносим проекции плоскостей AC и BC, пересекающихся под 90° и проходящих через оптическую ось C. Таким образом, кристалл уподобляется двуосному, но с очень малым углом оптических осей. Проведение кривых начинаем с того значения F, для которого на контуре срединного треугольника ABC имеются четыре точки: по одной на каждой стороне треугольника и, кроме того, проекция оптической оси в вершине C. В частном случае может быть на контуре ABC только три точки, считая и проекцию оптической оси. В этом случае проекция оптической оси соединяется с центром непосредственно двумя кривыми, касательными в точке C к дугам AC и BC.

Заключение

Теоретическое исследование метода „оптических кривых" Е. С. Федорова и тождественного ему вращательного варианта стереоконоскопического метода показывает, что соответствующие им стереофигуры отличаются, в общем, чрезвычайной сложностью. Поэтому такие стереофигуры трудно построить даже и тогда, когда уже имеется проекция главных элементов кристалла для данного его сечения, особенно, если оно косое. В тех же случаях, когда эти элементы неизвестны и их еще нужно найти, применение метода „оптических кривых" не обеспечивает получения положительного результата, ибо невозможно правильно построить прихотливо изгибающуюся кривую по небольшому числу точек (т. е. погасающих векторов), притом для сечения с неизвестной ориентировкой. Подбор же большого числа точек требует очень много времени и делает исследование очень трудоемким. Между тем для нормального варианта стереоконоскопического метода достаточно правильное построение первой стереофигуры возможно даже по нескольким точкам.

Это обстоятельство, на которое мы уже раньше обращали внимание, имело своим следствием то, что еще сам Е. С. Федоров отказался от метода „оптических кривых" и перешел к методу непосредственного отыскивания главных сечений индикатрисы.

Но, разработав вместе со своими учениками практическую сторону нового варианта метода, Е. С. Федоров не дал и для него полного теоретического обоснования. В связи с этим еще до сих пор нет соответствующей теоретической основы для способов отыскивания осей индикатрисы, особенно, первой по порядку работы, что, как известно, бывает сопряжено с некоторыми затруднениями. Отсутствие такой теоретической основы не удивительно, так как она могла быть составлена лишь на базе теории вращательного варианта стереоконоскопического метода; таковая же до сих пор не была разработана.

Теоретическое освещение и обоснование процедуры отыскивания осей индикатрисы, позволяющее находить их легко и быстро, будет изложено нами в специальной статье, после опубликования которой можно будет признать, что соответствующее теоретическое обоснование получила и практическая сторона федоровского метода.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступило 4 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варданянц Л. А.* Основы стереоконоскопического метода. Изд. АН Армянской ССР, 1947.
2. *Варданянц Л. А.* О стереоконоскопическом методе и его отношении к федоровскому методу. В сборнике „Универсальный столик Федорова". Изд. АН СССР, 1953. См. также Известия АН Армянской ССР (естеств. науки), 1947, № 1.
3. *Варданянц Л. А.* Стереоконоскопический метод исследования минералов. ДАН СССР, т. 50, 1945, стр. 425—427.
4. *Федоров Е. С.* Универсальный метод и изучение полевых шпатов. Часть I. Методические приемы. В сборнике „Универсальный столик Федорова". Изд. АН СССР, 1953, стр. 66—95.

Լ. Ա. Վարդանյանց

Ե. Ս. ՖՅՈԴՈՐՈՎԻ «ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԻ» ԵՎ ՍՏԵՐԵՈԿՈՆՈՍԿՈՊԻԿ ՄԵԹՈԴԻ ՊՏՏԱԿԱՆ ՎԱՐԻԱՆՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում շարադրվում է Ե. Ս. Ֆյոդորովի «օպտիկական կորերի» մեթոդի և նրա հետ համընկնող ստերեոկոնոսկոպիկ մեթոդի պտտական վարիանտի տեսությունը: Օպտիկական կորերի մեթոդը երևան է եկել ավելի

քան 50 տարի սրանից առաջ, բայց նրա համար Ե. Ս. Ֆյոդորովը սահմանել է միայն մի քանի նախնական էմպիրիկ ու տեսական դրույթներ, իսկ մեթոդի լրիվ տեսությունը մինչև վերջին ժամանակներս մնում էր անհայտ։ Այդ տեսության մշակումը հնարավոր դարձավ միմիայն այժմ, այն բանից հետո, երբ սահմանվեց ստերեոկոնոսկոպիկ մեթոդի ընդհանուր տեսությունը։ Այդպիսի տեսության հիմք է ծառայում ստերեոկոնոսկոպիկ պատկերների ընդհանուր հավասարումը։

Հոդվածում տրված են ստերեոպատկերների մանրամասն նկարագրությունը և մաթեմատիկական վերլուծությունը միառանցքանի ու երկառանցքանի բյուրեղների տիպային կտրվածքների շարքի համար, ինչպես նաև ստերեոպատկերների գրաֆիկ կառուցման եղանակները ամեն մի բյուրեղի կամայական կտրվածքի համար։ Այդ եղանակով ապացուցված է, որ ստերեոպատկերները տարբերվում են նրանց կազմող կորերի բարդությամբ, որոնք անպայման իրար հատում են դիագրամայի կենտրոնում։ Երկառանցքանի բյուրեղներն ընդհանուր դեպքում պետք է օպտիկական առանցքների պրոեկցիաներում ունենան դարձյալ երկու նույնպիսի կետեր և դրա շնորհիվ կդառնան, ասես, եռառանցքանիներ։ Այս հանգամանքը չափազանց դժվարացնում է ստերեոպատկերի կորերի ճիշտ կառուցումը և օպտիկական կորերի մեթոդը գործնական տեսակետից դարձնում է ավելի պիտանի։

Ինչպես հայտնի է, Ֆյոդորովի մեթոդը, չնայած նրա հանրաճանաչվածությանն ու տարածվածությանը, մինչև այժմ լրիվ տեսություն չի ունեցել, և որպես նրա հիմնավորում են ծառայել գլխավորապես էմպիրիկ ստուգմամբ հաստատված տեսական մի քանի նկատառումներ միայն։

Հոդվածում շարադրված տեսությունը, հեղինակի մշակած ստերեոկոնոսկոպիկ մեթոդի նորմալ և պատահական վարիանտների ավելի վաղ հրապարակված տեսության հետ մեկտեղ, վերացնում են այդ բացը և լիակատար տեսական հիմք են տալիս Ֆյոդորովի մեթոդի համար։