ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ-մաթ., բն. և տեխն. գիտ. VII, № 6, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния в железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. В работе показывается, что, пользуясь методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2], можно получить решение основных уравнений нелинейной теории ползучести бетона. Сущность метода заключается в том, что решение интегрального уравнения заменяется решением системы алгебраических уравнений. Как пример применения этого метода рассматриваются: 1) напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах и 2) усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах, с учетом нелинейной ползучести бетона. При решении этих задач рассматривается самый общий случай, когда одновременно учитываются старение, наследственность и изменяемость модуля мгновенной деформации бетона.

Общее решение этих задач по линейной теории ползучести бетона было дано в работах [3, 4]. При решении этих задач будем пользоваться нелинейной теорией ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном [3].

§ 1. *Решение интегральных уравнений, определяющих напряженное состояние в железобетонных элементах методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.* Согласно [3], основное уравнение нелинейной теории ползучести бетона имеет вид:

$$\varepsilon_б(t) = \frac{\sigma_б(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau} d\tau, \qquad (1.1)$$

где t — координата времени,

τ_1 — возраст бетона в момент приложения нагрузки,

$\varepsilon_б(t)$ — полная продольная деформация бетона,

$E(t)$ — модуль мгновенной деформации бетона, изменяющийся во времени,

$C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона, т. е. деформация ползучести в момент времени t, вызванная единичным напряжением ($\sigma = 1$ *кг/см²*) в возрасте бетона τ,

$\sigma_б(t)$ — нормальная составляющая напряжений бетона в момент времени t с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона,

$f[\sigma_б(t)]$ — некоторая, определенная из опыта, функция $\sigma_б(t)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона. Функция $f[\sigma_б(t)]$ должна удовлетворять условию

$$f(1) = 1.$$

Пользуясь основным уравнением (1.1), условиями равновесия и совместной работы арматуры и бетона для определения $\sigma_б(t)$, получим следующие интегральные уравнения Вольтера [5, 6]:

$$\sigma_б(t) = \frac{N}{F_б[1+\mu m(t)]} + \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] \frac{d\tau}{1+\mu m(t)} +$$

$$+ \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1+\mu m(t)}, \tag{1.2}$$

а при отсутствии внешних сил и влиянии только усадки бетона в симметрично армированных железобетонных элементах будем иметь

$$\sigma_б(t) = -\frac{\mu E_а}{1+\mu m(t)} S(t) + \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] \frac{d\tau}{1+\mu m(t)} +$$

$$+ \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1+\mu m(t)}, \tag{1.3}$$

где $E_а$ — модуль деформации арматуры,

$m(t) = \frac{E_а}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени,

$F_б$ — площадь поперечного сечения бетона,

μ — процент армирования,

N — центрально сжимающая сила,

$S(t)$ — функция, характеризующая закон изменения усадки.

Напряжения в арматуре $\sigma_а(t)$ определяются условием равновесия

$$\sigma_б F_б + \sigma_а F_а = N.$$

Решение интегральных уравнений (1.2) и (1.3) сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Полученные уравнения в общем случае не интегрируются. Для их интегрирования нужно предполагать [5, 6]: 1) что модуль мгновенной деформации бетона во времени не изменяется и 2) функция $\varphi(t)$ принимает свое предельное значение $\varphi(\infty) = C_0$; это означает, что полученное уравнение будет характеризовать состояние установившейся ползучести бетона. При этих двух предположениях решение интегральных уравнений (1.2) и (1.3) сводится к решению таких нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые интегрируются.

Нужно отметить, что допущение о неизменяемости во времени величины модуля мгновенной деформации $E = E_0 = \text{const}$ и замена функции $\varphi(t)$ ее предельным значением, т. е. $\varphi(\infty) = C_0$, вносит много условности в физическую достоверность полученного решения. Отсюда следует, что нужно найти такой метод решения данной задачи, который позволил бы с необходимой точностью определять искомые величины и тем самым более точно учесть влияние тех факторов, которые наиболее характерны для исследуемого явления.

Таким приближенным методом может служить метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2]. Этот метод применен к интегральным уравнениям типа Фредгольма, но его можно применить и к интегральным уравнениям Вольтерра. Доказательство этого метода для интегрального уравнения Вольтера можно получить аналогично доказательству, данному для интегрального уравнения Фредгольма. Метод Крылова-Боголюбова к решению уравнения линейной теории ползучести впервые применен Швецовым [4].

Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\sigma_б(t) = \Phi_б(t) + E(t)\int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau + {}$$

$$+ E(t)\int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)]\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{1.4}$$

где $\Phi_б(t)$ — заданная функция, $\tau_1 \geqslant 0$, а функции $C(t,\tau)$, $\frac{1}{E(\tau)}$ и $f[\sigma_б(\tau)]$ имеют произвольный вид, сохраняя конечное значение при $\tau = 0$ и являясь непрерывным в рассматриваемом промежутке времени $t - \tau_1$. Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова состоит в том, что в интегральном уравнении (1.4) нужно верхнему пределу t дать последовательно возрастающие конкретные значения $t_1, t_2, \ldots t_n$. Тогда уравнение (1.4) может быть переписано для каждого значения t_n в следующем виде:

$$\sigma_б(t_1) = \Phi_б(t_1) + E(t_1)\int_{\tau_1}^{t_1} \sigma_б(\tau)\frac{\partial}{d\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau + {}$$

$$+ E(t_1)\int_{\tau_1}^{t_1} f[\sigma_б(\tau)]\,\frac{\partial C(t_1,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \tag{1.5}$$

$$\sigma_\delta(t_2)=\Phi_\delta(t_2)+E(t_2)\left\{\int_{\tau_1}^{t_1}\sigma_\delta(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau+\right.$$

$$+\left.\int_{t_1}^{t_2}\sigma_\delta(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau\right\}+E(t_2)\left\{\int_{\tau_1}^{t_1}f[\sigma_\delta(\tau)]\frac{\partial C(t_2,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}f[\sigma_\delta(\tau)]\frac{\partial C(t_2,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right\}. \qquad (1.6)$$

$$\sigma_\delta(t_n)=\Phi_\delta(t_n)+E(t_n)\left\{\int_{\tau_1}^{t_1}\sigma_\delta(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\sigma_\delta(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau+\cdots+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\sigma_\delta(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau\right\}+$$

$$+E(t_n)\left\{\int_{\tau_1}^{t_1}f[\sigma_\delta(\tau)]\frac{\partial C(t_n,\tau)}{\partial\tau}+\int_{t_1}^{t_2}f[\sigma_\delta(\tau)]\frac{\partial C(t_n,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\cdots+\right.$$

$$\left.+\int_{t_{n-1}}^{t_n}f[\sigma_\delta(\tau)]\frac{\partial C(t_n,(\tau)}{\partial\tau}d\tau\right\}. \qquad (1.7$$

Если интегрировать уравнение (1.5) по частям и иметь в виду, что $C(t_1,t_1)=0$, то получим:

$$\frac{\Phi_\delta(t_1)}{E(t_1)}-\frac{\sigma_\delta(\tau_1)}{E(\tau_1)}-f[\sigma_\delta(\tau_1)]\,C(t_1,\tau_1)=$$

$$=\int_{\tau_1}^{t_1}\frac{1}{E(\tau)}\frac{\partial\sigma_\delta(\tau)}{\partial\tau}d\tau+\int_{\tau_1}^{t_1}C(t_1,\tau)\frac{\partial f[\sigma_\delta(\tau)]}{\partial\tau}d\tau.$$

Применяя к интегралам в правой части полученного выражения теорему о среднем и делая некоторые преобразования, найдем:

$$C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}f[\sigma_\delta(t_1)]+\frac{1}{E(\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}}\sigma_\delta(t_1)=\frac{\Phi_\delta(t_1)}{E(t_1)}-\sigma_\delta(\tau_1)\left[\frac{1}{E(\tau_1)}-\frac{1}{E(\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}}\right]-$$

$$-f[\sigma_\delta(\tau_1)]\left[C(t_1,\tau_1)-C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right]. \qquad (1.8)$$

Символом $C(t_m,\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}$ и $\dfrac{1}{E(\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}}$ здесь и в дальнейшем обозначено среднее значение функции $C(t_m,\tau)$ и $\dfrac{1}{E(\tau)}$ в интервале (t_k, t_{k-1}).

Положим, что $f(\sigma)$ является степенной функцией вида

$$f(\sigma) = \beta_0\sigma + \beta\sigma^2,$$

где β — некоторый параметр, характеризующий степень нелинейности, и удовлетворяет условию:

$$\beta_0 + \beta = 1.$$

Подставляя значение $f[\sigma_{\text{б}}(\tau)]$ в (1.8), получим:

$$\beta C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\sigma_{\text{б}}^2(t_1) + \left[\frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}} + \beta_0 C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right]\sigma_{\text{б}}(t_1) - \left\{\frac{\Phi_{\text{б}}(t_1)}{E(t_1)} - \right.$$

$$\left. - \sigma_{\text{б}}(\tau_1)\left[\frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}}\right] - f[\sigma_{\text{б}}(\tau_1)]\left[C(t_1,\tau_1) - C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right]\right\} = 0. \quad (1.9)$$

Решение этого квадратного уравнения будет:

$$\sigma_{\text{б}}(t_1) = -\frac{\dfrac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}} + \beta_0 C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}}{2\beta C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}} + \frac{1}{2\beta C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}}\left\{\left[\frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}} + \right.\right.$$

$$+ \beta_0 C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\Bigg]^2 + 4\beta C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\left[\frac{\Phi_{\text{б}}(t_1)}{E(t_1)} - \sigma_{\text{б}}(\tau_1)\left(\frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - f(\sigma_{\text{б}}(\tau_1))\left(C(t_1,\tau_1) - C(t_1,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right)\right]\right\}^{1/2}. \quad (1.10)$$

Здесь перед квадратным корнем взят знак плюс, исходя из физических соображений.

Аналогичным образом из уравнений (1.6) и (1.7) получим:

$$\sigma_{\text{б}}(t_2) = -\frac{\dfrac{1}{E(\xi)\big|_{t_1}^{t_2}} + \beta_0 C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2}}{2\beta C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2}} + \frac{1}{2\beta C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2}}\left\{\left[\frac{1}{E(\xi)\big|_{t_1}^{t_2}} + \right.\right.$$

$$+ \beta_0 C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2}\Bigg]^2 + 4\beta C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2} - \sigma_{\text{б}}(\tau_1)\left(\frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_2}}\right) -$$

$$- f(\sigma_{\text{б}}(\tau_1))\left(C(t_2,\tau_1) - C(t_2,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right) - \sigma_{\text{б}}(t_1)\left(\frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}} - \frac{1}{E(\xi)\big|_{t_1}^{t_2}}\right) - \quad (1.11)$$

$$\left.\left. - f(\sigma_{\text{б}}(t_1))\left(C(t_2,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1} - C(t_2,\xi)\Big|_{t_1}^{t_2}\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

$$\sigma_{\text{б}}(t_n) = -\frac{\dfrac{1}{E(\xi)\big|_{t_{n-1}}^{t_n}} + \beta_0 C(t_n,\xi)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}}{2\beta C(t_n,\xi)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}} + \frac{1}{2\beta C(t_n,\xi)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}}\left\{\left[\frac{1}{E(\xi)\big|_{t_{n-1}}^{t_n}} + \right.\right.$$

$$+ \beta_0 C(t_n,\xi)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}\Bigg]^2 + 4\beta C(t_n,\xi)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\frac{\Phi_{\text{б}}(t_n)}{E(t_n)} - \sigma_{\text{б}}(\tau_1)\left(\frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)\big|_{\tau_1}^{t_1}} - \right.\right.$$

$$-f(\sigma_б(\tau_1))\left(C(t_n,\tau_1)) - C(t_n,\xi)\Big|_{\tau_1}^{t_1}\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_б(t_i)\left(\frac{1}{E(\xi)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}} - \frac{1}{E(\xi)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}}\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} f(\sigma_б(t_i))(C(t_n,\xi))\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - C(t_n,\xi)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\Big)\Big]\Big\}^{1/2}. \tag{1.12}$$

В выражении (1.12) $n \geqslant 3$ и принято $t_0 = \tau_1$.

При начальном условии

$$\sigma_б(\tau_1) = 0 \tag{1.13}$$

формулы (1.10), (1.11) и (1.12) примут более простой вид.

Формулы (1.10), (1.11) и (1.12) в общем виде являются точным решением уравнения (1.4). Для определения численных значений искомых напряжений $\sigma_б(t_n)$ необходимо применить приближенный метод определения средних величин

$$\frac{1}{E(\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}} \text{ и } C(t_n,\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}.$$

Этим единственно определяется приближенный характер данного решения. В практических расчетах эти величины с достаточной точностью могут быть определены с помощью приближенных равенств:

$$\frac{1}{E(\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}} = \frac{1}{E\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)},$$

$$C(t_n,\xi)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} = C\left(t_n, \frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right). \tag{1.14}$$

Подставляя эти выражения в (1.10) (1.11) и (1.12), получим приближенное решение интегрального уравнения (1.4) в следующем виде:

$$\sigma_б(t_1) = -\frac{\frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}{2\beta C\left(\tau_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\Bigg\{\Bigg[\frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} +$$

$$+ \beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\Bigg]^2 + 4\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\Bigg[\frac{\Phi_б(t_1)}{E(t_1)} - \sigma_б(\tau_1)\Bigg(\frac{1}{E(\tau_1)} -$$

$$- \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\Bigg) - f(\sigma_б(\tau_1))\Bigg(C(t_1,\tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg\}^{1/2}, \tag{1.15}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_б(t_2) = &-\frac{\dfrac{1}{E\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)}{2\beta C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} \left\{ \left[\frac{1}{E\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} + \right.\right. \\
&\left. + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \right]^2 + 4\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \left[\frac{\Phi_б(t_2)}{E(t_2)} - \sigma_б(\tau_1)\left(\frac{1}{E(\tau_1)} - \right.\right. \\
&\left. - \frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\right) - f(\sigma_б(\tau_1))\left(C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right) - \sigma_б(t_1)\left(\frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)} - \right. \\
&\left.\left.\left. - \frac{1}{E\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)}\right) - f(\sigma_б(t_1))\left(C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2}, \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_б(t_n) = &-\frac{\dfrac{1}{E\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_n, \dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}{2\beta C\left(t_n, \dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \\
&+ \frac{1}{2\beta C\left(t_n, \dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} \left\{ \left[\frac{1}{E\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) \right] + \right. \\
&+ 4\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) \left[\frac{\Phi_б(t_n)}{E(t_n)} - \sigma_б(\tau_1)\left(\frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\right) - \right. \\
&- f\left(\sigma_б(\tau_1)\right)\left(C(t_n, \tau_1) - C\left(t_n, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_б(t_i)\left(\frac{1}{E\left(\dfrac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{E\left(\dfrac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)}\right) - \sum_{i=1}^{n} f\left(\sigma_б(t_i)\right)\left(C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) - \right. \\
&\left.\left.\left. - C\left(t_n, \frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2}. \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Последовательно решая эти уравнения, находим искомые величины $\sigma_б(t_1)$, $\sigma_б(t_2)$ $\cdots$ $\sigma_б(t_n)$.

Уменьшая расчетные интервалы времени, мы можем получить решение любой степени точности. Нужно заметить, что для бетона и железобетона расчет по формуле (1.17) благодаря медленной изменяемости функций $E(t)$, $C(t, \tau)$ и $\Phi_{\text{б}}(t)$ дает в достаточной мере точные результаты даже при сравнительно больших интервалах. В том случае, когда изменения этих величин происходят довольно быстро, расчетные интервалы времени должны фиксировать все характерные моменты этих изменений. Как будет показано ниже, применение этого метода к задачам теории ползучести оказывается весьма эффективным, так как большая точность получается при выборе сравнительно небольшого числа интегралов.

§ 2. *Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона.* Применяя вышеизложенный метод к интегральному уравнению (1.2), определяющему напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона, получим:

$$\sigma_{\text{б}}(t_1) = -\frac{\dfrac{1}{\mu E_a} + \dfrac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}{2\beta C\left(t_1, \dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_1, \dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_a} + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right] + 4\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{\mu E_a} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\right)\sigma_{\text{б}}(\tau_1) - f\left(\sigma_{\text{б}}(\tau_1)\right)\left(C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2}, \qquad (2.1)$$

$$\sigma_{\text{б}}(t_2) = -\frac{\dfrac{1}{\mu E_a} + \dfrac{1}{E\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)}{2\beta C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} +$$

$$+\frac{1}{2\beta C\left(t_2, \dfrac{t_1+t_2}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\right]^2 + \right.$$

$$+ 4\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\right)\sigma_{\text{б}}(\tau_1) - \right.$$

$$- f\left(\sigma_{\text{б}}(\tau_1)\right)\left(C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right) - \sigma_{\text{б}}(t_1)\left(\frac{1}{E\left(\dfrac{\tau_1+t_1}{2}\right)} - \right.$$

$$-\frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\Bigg)-f\left(\sigma_б(\tau_1)\right)\left(C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)-C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}^{1/2}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_б(t_n) = -\frac{\frac{1}{\mu E_а}+\frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}+\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}{2\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}+$$

$$+\Bigg\{\left[\frac{1}{\mu E_а}+\frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}+\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)\right]^2+$$

$$+4\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)\Bigg[\left(\frac{1}{\mu E_а}+\frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\sigma_б(\tau_1)-f\left(\sigma_б(\tau_1)\right)\right)\Bigg(C(t_n, \tau_1)-$$

$$-C\left(t_n, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\Bigg)-\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_б(t_i)\left(\frac{1}{E\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)}-\frac{1}{E\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\sigma_б(t_i)\right)\left[C\left(t_n, \frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)-C\left(t_n, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\right]\Bigg]\Bigg\}^{1/2}. \quad (2.3)$$

где в выражении (2.3) $n \geqslant 3$ и $t_0 = \tau_1$.

Последовательно решая уравнения (2.1), (2.2) и (2.3), найдём искомые величины $\sigma_б(t_1)$, $\sigma_б(t_2) \cdots \sigma_б(t_n)$; определяющие приближенные значения напряжений в бетоне в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Затем с помощью уравнения равновесия

$$F_б\,\sigma_б(t) + F_а\,\sigma_а(t) = N$$

найдем соответствующие напряжения в арматуре.

Точное решение поставленной задачи имеется в двух случаях: 1) при линейной ползучести бетона, когда $E = E_0 = \text{const}$ у Н. Х. Арутюняна [3] и 2) при нелинейной установившейся ползучести бетона, когда $E = E_0 = \text{const}$ и $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$ в нашей работе [5]. Чтобы проверить, какую точность дает вышеизложенный приближенный метод, решим эти задачи приближенным методом и сравним результаты приближенного решения с точным решением.

При линейной ползучести, когда $E = E_0 = \text{const}$, решения (2.1), (2.2) и (2.3) примут следующий вид:

$$\sigma_б(t_1) = \frac{\frac{1}{\mu E_а}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)-C(t_1, \tau_1)}{\frac{1}{\mu E_а}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_1, \frac{t_1+\tau_1}{2}\right)}\,\sigma_б(\tau_1), \quad (2.4)$$

$$\sigma_б(t_2)=\frac{1}{\frac{1}{\mu E_a}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_2,\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_a}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_2,\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-C(t_2,\tau_1)\right]\sigma_б(\tau_1)-\left[C\left(t_2,\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)+C\left(t_2,\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right]\sigma_б(t_1)\right\}, \quad (2,5)$$

$$\sigma_б(t_n)=\frac{1}{\frac{1}{\mu E_a}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_n,\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_a}+\frac{1}{E_0}+C\left(t_n,\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-C(t_n,\tau_1)\right]\sigma_б(\tau_1)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_б(t_i)\left[C\left(t_n,\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)-C\left(t_n,\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\right]\right\}, \quad (2.6)$$

где в выражении (2.6) $n \geqslant 3$ и $t_0=\tau_1$.

Решая уравнения (2.4), (2.5) и (2.6), определим приближенные значения напряжений в бетоне в сжатых железобетонных элементах с учетом линейной ползучести бетона.

На примере следующей задачи вычислим погрешность, получаемую при решении уравнений (2.4), (2.5) и (2.6).

Пример 1. Как будут изменяться во времени напряжения $\sigma_б(t)$ и $\sigma_a(t)$ в сжатом железобетонном элементе с учетом линейной ползучести бетона, если за характеристику меры ползучести бетона принято следующее выражение:

$$C(t,\tau)=\left(\frac{4{,}82}{\tau}+0{,}9\right)\left[1-e^{-0{,}026(t-\tau)}\right]10^{-5},$$

причем $\mu=1\%$, $E_a=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}, $E=E_0=2\cdot10^5$ *кг/см*^{2}, $m=\frac{E_a}{E_0}=10$.

Для нахождения искомого решения $\sigma_б(t)$ разобъем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов: $\tau_1=28$, $t_1=45$, $t_2=90$, $t_3=180$ и $t_4=360$ дням. Соответствующие значения $\sigma_б(t)$ и $\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$ для различных моментов времени t сведены в таблицу 1.

Сравнивая результаты этой таблицы с результатами точного решения, видим, что погрешность найденных величин не превышает 1%.

Такая же погрешность получается и при решении задачи нелинейной ползучести, когда $E=E_0=\text{const}$ и $\varphi=\varphi(\infty)=C_0$.

Отсюда следует, что приближенный метод Крылова и Боголюбова дает хорошие результаты при определении напряжений в сжатом железобетонном элементе.

В качестве конкретного приложения формул (2.1), (2.2) и (2.3) рассмотрим общий случай сжатой железобетонной колонны, когда модуль мгновенной деформации изменяется во времени.

Таблица 1

Значения $\sigma_б(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t, при $\tau_1 = 28$ дням, $\sigma_б(\tau_1) = 40$ *кг/см²*

t	28 дней	1,5 мес.	3 мес.	6 мес.	1 год
$\sigma_б(t)$ *кг/см²*	40	37,3140	34,3676	33,4532	33,3392
$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	1	0,93285	0,85919	0,83633	0,83348

Пример 2. Как будет изменяться во времени напряжение $\sigma_б(t)$ в сжатом железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона, если последний имеет следующий вид [3]:

$$E(t) = 2\left(1 - e^{-0{,}03t}\right)10^5.$$

Характеристика меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ принимается такая же, как и в предыдущем примере.

Для нахождения искомой функции $\sigma_б(t)$ опять разобьем промежуток времени в 360 дней на пять интервалов: $\tau_1 = 28$, $t_1 = 45$, $t_2 = 90$, $t_3 = 180$, $t_4 = 360$ дням. Соответствующие значения $\sigma_б(t)$ для различных моментов времени t и при различных значениях параметра нелинейности β сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Значения $\sigma_б(t)$ в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени t, модуля мгновенной деформации $E(t)$, функции $\varphi(t)$ и коэффициента нелинейности β, при $\tau_1 = 28$ дн. и $\sigma_б(t) = 40$ *кг/см²*

t	$\sigma_б(t)$ *кг/см²*			
	$\beta = 0$	$\beta = 0{,}001$	$\beta = 0{,}01$	$\beta = 0{,}1$
28 дней	40	40	40	40
1,5 мес.	37,428	37,335	36,566	29,738
3 мес.	34,507	34,346	32,871	24,114
6 месяц.	33,484	33,294	31,770	23,598
1 год	33,449	33,276	31,751	23,562

Из этой таблицы видно, что: 1) начальное напряжение в бетоне $\sigma_б(t)$ с течением времени быстро затухает, причем степень затухания доходит до 41%; 2) это затухание зависит от меры нелинейной ползучести β; чем больше β, тем быстрее происходит затухание; 3) затухание напряжения бетона происходит в течение только первого полугодия, после чего изменения $\sigma_б(t)$ почти не происходит; 4) сравнивая эту таблицу с таблицами, помещенными в статье [4] для этой же задачи, при $E = E_0 = \text{const}$ и $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$, видим, что при изменяемости $E(t)$ и $\varphi(t)$ затухание напряжений бетона происходит быстрее.

С помощью уравнения равновесия

$$F_б \sigma_б(t) + F_а \sigma_а(t) = N$$

можно найти соответствующие значения напряжения $\sigma_а(t)$ в арматуре.

§ 3. *Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона.* Применяя вышеизложенный метод к интегральному уравнению (1.3), определяющему усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона, получим:

$$\sigma_б(t_1) = -\frac{\frac{1}{\mu E_а} + \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_а} + \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)\right]^2 -\right.$$

$$\left. - 4\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) S(t_1)\right\}^{1/2}, \qquad (3.1)$$

$$\sigma_б(t_2) = -\frac{\frac{1}{\mu E_а} + \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)}{2\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_а} + \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\right]^2 -\right.$$

$$- 4\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\left[S(t_2) + \sigma_б(t_1)\left(\frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\right) +\right.$$

$$\left.\left. + f\left(\sigma_б(t_1)\right)\left(C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_2}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2} \qquad (3.2)$$

$$\sigma_б(t_n) = -\frac{\frac{1}{\mu E_а} + \frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}{2\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} +$$

$$+\frac{1}{2\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}\left\{\left[\frac{1}{\mu E_a}+\frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}+\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)\right]^2-\right.$$

$$-4\beta C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)\left[S(t_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_б(t_i)\left(\frac{1}{E\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{E\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)}\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\sigma_б(t_i)\right)\left(C\left(t_n, \frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-C\left(t_n, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2}, \tag{3.3}$$

где $n \geqslant 3$.

Здесь принято начальное условие

$$\sigma_б(\tau_1)=0.$$

Последовательно решая уравнения (3.1), (3.2) и (3.3), найдем искомые величины $\sigma_б(t)_1$, $\sigma_б(t_2)\cdots\sigma_б(t_n)$, определяющие усадочные напряжения в симметрично армированном железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона. Затем, с помощью уравнения равновесия

$$F_a\sigma_a(t)+F_б\sigma_б(t)=0, \tag{3.4}$$

найдем соответствующие напряжению $\sigma_б(t)$ в арматуре.

Точное решение поставленной задачи имеется также в двух случаях: 1) при линейной ползучести, когда $E=E_0=\text{const}$, у Н. Х. Арутюняна [3] и 2) при нелинейной ползучести, когда $E=E_0=\text{const}$, $\varphi=\varphi(\infty)=C_0$ в статье [6]. Чтобы получить, какую точность дает вышеизложенный приближенный метод при определении усадочных напряжений, решим последнюю задачу приближенным методом и сравним полученные результаты с результатами точного решения.

Пример 1. Примем те же данные, которые приводятся в статье [6], т. е.

$$S(t)=S_0\left(1-e^{-\alpha t}\right),\quad C(t,\tau)=C_0\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$

$$E=E_0=\text{const},\quad E_a=2.10^6\ кг/см^2,\quad m=10,$$

$$C_0=0{,}9.10^{-5},\quad \gamma=0{,}026,\quad \alpha=0{,}026,\quad \mu=1\%,$$

$$\tau_1=1\ \text{дню},\ \beta=0{,}001.$$

Точное решение обозначим через $\sigma_б(t)$, а приближенное — $\widetilde{\sigma_б(t)}$.

Для нахождения искомой функции $\sigma_б(t)$ разобьем промежуток времени в 360 дней на шесть последовательно возрастающих интервалов: $\tau_1=1$, $t_1=7$, $t_2=14$, $t_3=28$, $t_4=90$ и $t_5=360$ дням.

Соответствующие значения $\widetilde{\sigma_{\text{б}}(t)}$ и $\sigma_{\text{б}}(t)$ для различных моментов времени t сведены в таблицу 3.

Таблица 3

Значения усадочных напряжений в бетоне $\sigma_{\text{б}}(t)$ в зависимости от времени t

t	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\sigma_{\text{б}}(t)$ *кг/см²* . . .	−0,50567	−0,99027	−1,7053	−2,8469	−3,0478
$\widetilde{\sigma_{\text{б}}(t)}$ *кг/см²* . . .	−0,50567	−0,99041	−1,7062	−2,8564	−3,0484

Из этой таблицы видно, что погрешность найденных значений $\widetilde{\sigma_{\text{б}}(t)}$ не превышает $0{,}4\%$, что полностью подтверждает эффективность применения метода Крылова - Боголюбова к решению задач теории ползучести бетона.

В качестве конкретного приложения формул (3.1), (3.2) и (3.3) рассмотрим общий случай усадочных напряжений в асимметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона.

Пример 2. Определить значения усадочных напряжений бетона $\sigma_{\text{б}}(t)$, если функции $S(t)$, $C(t, \tau)$ и $E(t)$ даны в следующем виде [3]:

$$S(t) = 2\left(e^{-0.011\tau_1} - e^{-0.011t}\right)10^4,$$

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4.82}{\tau} + 0{,}9\right)\left[1 - e^{-0{,}026(t-\tau)}\right]10^5,$$

$$E(t) = 2\left(1 - e^{-0{,}03t}\right)10^5,$$

причем $\mu = 3\%$, $E_{\text{а}} = 2.10^6$ *кг/см²*, $\tau_1 = 1$ дню.

Для нахождения искомой функции $\sigma_{\text{б}}(t)$ опять разобьем промежуток времени в 360 дней на шесть последовательно возрастающих интервалов: $\sigma_1 = 1$, $t_1 = 7$, $t_2 = 14$, $t_3 = 28$, $t_4 = 90$ и $t_5 = 360$ дням.

Соответствующие значения $\sigma_{\text{б}}(t)$ для различных моментов времени t сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Значения $\sigma_{\text{б}}(t)$ в асимметрично армированных железобетонных элементах в зависимости от времени t, модуля мгновенной деформации $E(t)$, функции $\varphi(t)$ и коэффициента нелинейности β, при $\tau_1 = 1$ дню

t	$\sigma_{\text{б}}(t)$ *кг/см²*				
	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\beta = 0{,}001$	−0,17095	−0,46473	−1,30367	−3,54312	−5,45903
$\beta = 0$	−0,20226	−0,56177	−1,31773	−3,54568	−5,4600
без учета ползучести	−0,29338	−0,84353	−1,9960	−5,6066	[illegible]

Пользуясь условием равновесия (3.4), получим соответствующие значения напряжений в арматуре $\sigma_a(t)$. Эти значения сведены в таблицу 5.

Таблица 5

Значения $\sigma_a(t)$ в симметрично армированных железобетонных элементах в зависимости от времени t, модуля мгновенной деформации $E(t)$, функции $\varphi(t)$ и коэффициента нелинейности β, при $\tau_1 = 1$ дню

t	$\sigma_a(t)$ $кг/см^2$				
	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\beta = 0{,}001$	5,6983	9,2946	26,0734	70,8622	109,1806
$\beta = 0$	6,7420	11,2354	26,3546	70,9136	109,2000
без учета ползучести	9,7703	16,8706	39,9200	112,1320	179,0760

Из данных, приведенных в таблицах 4 и 5, видно, что: 1) абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне $\sigma_б(t)$ и арматуре $\sigma_a(t)$ с течением времени быстро возрастает; 2) при нелинейной ползучести абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне и арматуре меньше, чем при линейной ползучести; а как известно [5], если считать $E = E_0 = \mathrm{const}$ и $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$, то получается наоборот, т. е. усадочных напряжений по абсолютной величине при нелинейной ползучести больше, чем при линейной ползучести. Это показывает, что допущение о неизменяемости во времени величины модуля мгновенной деформации и замена функции $\varphi(t)$ ее предельным значением искажает истинную картину напряженного состояния в железобетонных элементах от влияния усадки; 3) с течением времени разность между значениями усадочных напряжений при нелинейной и линейной ползучести уменьшается, причем через 3 месяца эти величины почти совпадают; 4) вследствие ползучести бетона начальные упруго-мгновенные напряжения в армированных элементах от усадки бетона затухают, причем затухание этих напряжений в данном случае, когда они вызваны в возрасте $\tau_1 = 1$ дню, достигает 55,7%.

Заметим, что наибольшая математическая погрешность найденных значений $\sigma_б(t)$ и $\sigma_a(t)$ не превышает 2,5%, в чем нетрудно убедиться, произведя несколько уточненных расчетов при уменьшенных интервалах времени.

Ереванский государственный университет
имени В. М. Молотова

Поступило 20 IX 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н.* ДАН, 1929, № 12.
2. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л.—М., 1949.

3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Москва, 1952.
4. *Швецов А. В.* Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. Гидротехническое строительство, 8, 1952.
5. *Манукян М. М.* Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 1, 1954.
6. *Манукян М. М.* Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 3, 1954.

Մ. Մ. Մանուկյան

ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՐԿԱԹԱԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԱԿՆԹԱՐԹԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄՈԴՈՒԼԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ, օգտագործելով ինտեգրալ հավասարման մոտավոր արժեքը գտնելու Ն. Մ. Կռիլով—Ն. Ն. Բոգոլյուբովի մեթոդը, կարելի է ստանալ երկաթբետոն էլեմենտի լարումները, բետոնի ոչ-գծային սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման հաշվառումով։ Որպես այս մեթոդի կիրառություն քննարկվում է երկու խնդիր՝

ա) սեղմված երկաթբետոն էլեմենտի լարվածային վիճակը և

բ) համաչափ երկաթապատված երկաթբետոն էլեմենտի կծկման լարումները՝ ոչ-գծային սողքի հաշվառումով։

Այս խնդիրները լուծելիս քննարկվում է ամենաընդհանուր դեպքը, երբ միաժամանակ հաշվի է առնվում բետոնի ծերացումը, ժառանգականությունը և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի կախումը ժամանակից։

Հոդվածում օգտագործվում է բետոնի ոչ-գծային սողքի մասին Ն. Խ. Հարությունյանի տեսությունը։