

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян

Изгиб полуэллиптической плиты

Решение задачи об изгибе равномерно нагруженной полуэллиптической плиты, защемленной по криволинейному контуру и опертой по прямолинейному, дано Б. Г. Галеркиным [1], причем им рассмотрено два случая: 1) когда полуэллипс получается вследствие разреза эллипса по большому диаметру и 2) по малому диаметру.

Приведенное ниже решение той же задачи нам представляется более эффективным.

§ 1. *Эллиптическая плита, разрезанная по большому диаметру.* Нагрузим защемленную по всему контуру эллиптическую плиту в области $y > 0$ равномерно распределенной нагрузкой p , а в области $y < 0$ — равномерной нагрузкой $(-p)$ (оси x и y совмещены соответственно с большим и малым диаметрами эллипса). При такой нагрузке свободное опирание полуэллиптической плиты по большому диаметру обеспечивается заранее. Поэтому, если мы решим задачу об изгибе защемленной по всему контуру эллиптической плиты при указанной нагрузке, то получим решение задачи об изгибе равномерно нагруженной полуэллиптической плиты, защемленной по криволинейному контуру и опертой по большому диаметру.

При рассматриваемой нагрузке общее выражение прогиба можно представить в следующем виде [2]:

при $y \geq 0$

$$w = \frac{p}{384 D} (z - \bar{z})^4 + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.1)$$

при $y \leq 0$

$$w = -\frac{p}{384 D} (z - \bar{z})^4 + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.2)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, D — жесткость плиты.

Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ определяются из условий защемления эллиптической плиты по всему контуру.

Пользуясь способом, изложенным в предыдущей работе [3], определим эти функции:

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi(z) = \frac{ipb^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})(\zeta^{2k} + \zeta^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(\zeta) = \chi(z) = & \frac{ipRb^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \times \\ & \times \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(2k + 3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \\ & \left. + \frac{(2k + 2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k + 5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} - (2k + 2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} (\zeta^{2k+1} + \zeta^{-2k-1}), \quad (1.4) \end{aligned}$$

причем связь между комплексными переменными z и ζ дана с помощью отображающей функции

$$z = R \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса.

$$\text{На контуре эллипса } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} > 1.$$

Внеся (1.3) и (1.4) в (1.1), найдем уравнение упругой поверхности полуэллиптической плиты:

$$\begin{aligned} w = & \frac{p}{24D} y^4 - \frac{2pRb^3}{\pi D} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})[(\rho^{2k+1} - \rho^{-2k-1}) \sin(2k-1)\theta + \right. \\ & \left. + (\rho^{2k-1} - \rho^{-2k+1}) \sin(2k+1)\theta]}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \times \right. \\ & \times \left[\frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(2k + 3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \\ & \left. + \frac{(2k + 2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k + 5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} - (2k + 2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right] (\rho^{2k+1} - \\ & \left. - \rho^{-2k-2}) \sin(2k + 1)\theta \right\}. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Таким образом поставленная задача полностью решена. Ряды, входящие в (1.5), сходятся для всех значений $\rho_0 > 1$. При определении расчетных величин легко можно усилить сходимость указанных рядов.

Полагая в (1.5) $\theta = \frac{\pi}{2}$, найдем прогиб по оси симметрии полуэллиптической плиты:

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{\rho y^4}{24D} + \frac{2pb^3y}{\pi D} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})(\rho^{2k} - \rho^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho^{-4k})]} - \\
 & - \frac{2\rho Rb^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} - \rho^{-2k}}{(2k - 3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \\
 & + \left. \frac{(2k + 2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k + 5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} - (2k + 2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} (\rho^{2k+1} - \rho^{-2k-1}). \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Контурный изгибающий момент выражается формулой:

$$\begin{aligned}
 M = & -\frac{\rho y^2}{2} + \frac{16pb^3}{\pi R(1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2}\cos 2\theta)} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} \left[(\rho_0^{2k-1} - \right. \\
 & \left. - \rho_0^{-2k-3}) \sin (2k - 1)\theta - (\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-1}) \sin (2k + 1)\theta \right]. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Максимальный момент получается в точке $y = b$, $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
 M_{\max} = & -\frac{pb^2}{2} + \\
 & + \frac{16pb^5}{\pi a} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]}. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

В частности, для полукруга получим:

$$M_{\max} = -\frac{pb^2}{2} + \frac{16pb^2}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = -0,0756 \, pb^2,$$

что совпадает с известным результатом.

Для бесконечной полосы из (1.8) получим

$$M_{\max} = -\frac{pb^2}{2} + \frac{48pb^2}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = -0,125pb^2,$$

что также согласуется с известным результатом.

Пользуясь равенством

$$\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = \frac{1}{12}$$

усиливаем сходимость ряда (1.8):

$$M_{\max} = -\frac{pb^2}{2} + \frac{4pb^3}{3\pi a} + \frac{32pb^3}{a\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k[k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 1 + \rho_0^{-4k}]}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \quad (1.9)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами последнего ряда, получим значение момента с недостатком

$$M_{\max}^- = -0,5pb^2 + \frac{4pb^3}{3\pi a} + \frac{32pb^2}{15\pi a(\rho_0^2 - 1)} \left[1 + \frac{2(2\rho_0^2 + 1 + \rho_0^{-2})}{7\rho_0^4(\rho_0^2 + 2 + 4\rho_0^{-2} + 2\rho_0^{-4} + \rho_0^{-6})} \right] \quad (1.10)$$

Если учесть также и третий член ряда, то получим значение момента с избытком. Вычисления показывают, что допущенная погрешность формулы (1.10) по сравнению с (1.9) при $a = b$ равна нулю, при $a = 3b$ меньше, чем 1,4%, а при $a \rightarrow \infty$ становится 3%. Приведем некоторые значения для $M_{\max}^-$, вычисленные по формуле (1.10).

a:b	1	2	3	∞
$\frac{M_{\max}^-}{pb^2}$	-0,0756	-0,1120	-0,1185	-0,1217

Максимальная опорная реакция возникает в точке $x=0$, $y=b$ и равна перерезывающей силе, действующей в той же точке.

Учитывая это, найдем максимальную реакцию

$$Q_{\max} = -pb - \frac{16pb^3}{\pi a^2(1 + \rho_0^{-2})} \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k[k(1 + \rho_0^{-2})(\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k}) - (1 - \rho_0^{-2})(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2]}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} \quad (1.11)$$

Полагая $a=b$, получим известное значение максимальной опорной реакции для полукруга

$$Q_{\max} = -pb + \frac{16pb}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(2k+1)(4k^2-9)} = -0,424 pb.$$

Пользуясь равенствами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)(4k^2-9)} = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{18},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-9} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{18},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)(4k^2-9)} = \frac{2}{9} - \frac{\pi}{24},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(4k^2-9)} = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{9}.$$

усиливаем сходимость ряда (1.11):

$$Q_{\max} = -pb + \frac{pb^3}{a^2} - \frac{4pb^4}{3\pi a^3} + \frac{32pb^4}{\pi a^3} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k^2(\rho_0^2+1)[2k-1+(2k+1)\rho_0^{-2}] + k(1-\rho_0^{-4k})}{(4k^2-1)(4k^2-9)[\rho_0^{4k}-\rho_0^{-4k}-2k(\rho_0^2-\rho_0^{-2})]}. \quad (1.12)$$

Учитывая первые два члена ряда, получим значение опорной реакции с недостатком

$$Q_{\max}^- = -pb \left(1 - \frac{b^3}{a^2} + \frac{4b^3}{3\pi a^3} \right) + \frac{32pb^4}{15\pi a^3} \left\{ \frac{5 + \rho_0^2 + 3\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4}}{\rho_0^4 - \rho_0^{-4} - 2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} + \frac{2(17 + 6\rho_0^2 + 10\rho_0^{-2} - \rho_0^{-8})}{7[\rho_0^8 - \rho_0^{-8} - 4(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\}. \quad (1.13)$$

Учитывая также и третий член ряда, найдем значение реакции с избытком

$$Q_{\max}^+ = Q_{\max}^- - \frac{32pb^4}{315\pi a^3} \frac{37 + 15\rho_0^2 + 21\rho_0^{-2} - \rho_0^{-12}}{\rho_0^{12} - \rho_0^{-12} - 6(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}. \quad (1.14)$$

При $a = b$ формулы (1.13) и (1.14) совпадают и дают точный результат.

При $a = 2b$ имеем $Q_{\max}^- = -0,581 pb$.

$Q_{\max}^+ = -0,583 pb$, погрешность $\delta = 0,3\%$.

При $a = 3b$ $Q_{\max}^- = -0,603 pb$, $Q_{\max}^+ = -0,608 pb$, $\delta = 0,8\%$.

При $a \rightarrow \infty$ $Q_{\max}^- = -0,6216 pb$,

$Q_{\max}^+ = -0,6260 pb$, $\delta = -0,7\%$.

точное значение $Q_{\max} = -0,6250 pb$.

Для практических целей в фигурных скобках (1.13) достаточно сохранение лишь первого слагаемого, тогда

$$Q_{\max} = -pb \left[1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{4b^3}{3\pi a^3} - \frac{16(a-b)(a^2+ab-b^2)}{15\pi a^3} \right].$$

Эта формула при $a = b$ дает точный результат. При $a = 2b$ дает погрешность 1,7%, при $a = 3b - 4\%$, а при $a \rightarrow \infty - 6\%$.

§ 2. *Равномерно нагруженная полуэллиптическая плита, защемленная по криволинейному краю и свободно опертая по малому диаметру.* Эта задача решается таким же способом как и предыдущая; надо только формулы (1.1) и (1.2) заменить следующими:

при $x \geq 0$

$$w = \frac{P}{384D} (z + \bar{z})^4 + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.1)$$

при $x \leq 0$

$$w = -\frac{P}{384D} (z + \bar{z})^4 + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.2)$$

при котором расположение осей координат остается прежним.

Не повторяя деталей решения, приводим окончательные результаты, при $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} w = & \frac{px^4}{24D} - \frac{2pRa^3}{\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} + 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \times \\ & \times [(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) \cos(2k-1)\theta + (\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) \cos(2k+1)\theta] + \\ & + \frac{2pRa^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)(2k+1)(2k+3)} \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(2k-3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} + 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} - \right. \\ & \left. - \frac{(2k+2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-7k-4}) + \rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2}}{(2k+5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} + (2k+2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} \times \\ & \times (\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) \cos(2k+1)\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Изгибающий момент на контуре определяется формулой

$$\begin{aligned} M = & -\frac{px^3}{2} + \frac{16pa^3}{\pi R(1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2} \cos 2\theta)} \times \\ & \times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k}]} \left[(\rho_0^{2k-1} + \right. \\ & \left. + \rho_0^{-2k-3}) \cos(2k-1)\theta - (\rho_0^{2k-3} + \rho_0^{-2k-1}) \cos(2k+1)\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Путем несложных преобразований представим выражение (2.4) так:

$$M = -\frac{px^3}{2} + \frac{16pa^3}{\pi R \rho_0 (1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2} \cos 2\theta)} \times$$

$$\times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k [\cos(2k-1)\theta - \rho_0^{-2} \cos(2k+1)\theta]}{(4k^2-1)(4k^2-9)} +$$

$$16\rho_0^2(1-\rho_0^{-2}) \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k [2k(1+\rho_0^{-2})-1+\rho_0^{-4k}] \cos(2k+1)\theta}{(4k^2-1)(4k^2-9) [2k(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k}-\rho_0^{-4k}]} \right.$$

$$\left. - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k [2k(\rho_0^2+1)+1-\rho_0^{-4k}] \cos(2k-1)\theta}{(4k^2-1)(4k^2-9) [2k(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k}-\rho_0^{-4k}]} \right\}. \quad (2.5)$$

Ряды, входящие в (2.5), сходятся при $\rho_0 > 1$ довольно быстро и вычислении их достаточно ограничиться двумя первыми членами. Приведем значения контурного изгибающего момента для случая 2б.

θ	0	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{M}{\rho_0^2}$	0,01747	0,02780	0,03971	0,04451	0,03957	0

Построение эпюры контурного изгибающего момента показывает, что максимальный изгибающий момент возникает в точке $x = 0,5a$, $y = 0,43a$ ($\theta = 60^\circ$) и равен $M_{\max} = -0,0445 \rho_0^2$.

ский политехнический институт
им. Карла Маркса

Поступило 24 IV 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

- еркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, Л.—М., 1933.
онджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.
онджян О. М. Изгиб эллиптической плиты. Известия АН Армянской ССР, (серия ФМЕТ наук), том V, № 5, 1954.

О. М. Սոնժյան

ԿԻՍԱԷԼԻՊՏԻԿ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

իսաէլիպտիկ սալի ծոման խնդիրը լուծել է Բ. Գ. Գալյորկինը [1], ով երկու դեպք՝
1) Նրբ կիսաէլիպսն ուսացվում է էլիպսի հատումով ըստ մեծ առանց-
2) — ըստ փոքր առանցքի: Յուրաքանչյուր դեպքում ենթադրվում է, թե կորագծային եզրույթով ամրակցված է, իսկ ուղղագծայինով՝ ազատ
es VII, № 6—3.

հենված: Պարզության համար դիտվում է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության դեպքը: Վերջնական արդյունքներն ստանալու համար անհրաժեշտ է լինում լուծելու անվերջ հավասարումների սխեման:

Նույն խնդիրը, նույն պայմանների դեպքում, լուծված է ներկա հոդվածում: Օգտագործված է կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդը: Լուծումը ներկայացված է հայտնի գործակիցներ ունեցող շարքերի միջոցով: Ուսումնասիրված են սալի հաշվային մեծությունները: