ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 6, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований

В нашей работе [1] была построена теория обобщенных интегральных преобразований с несимметрическими ядрами вида e^{-z^ρ} и $E_\rho(z;\mu)$, где

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})},\quad \left(-\infty<\mu<\infty,\ \rho\geqslant\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

целая функция типа Миттаг-Лефлера порядка ρ и типа 1. Было доказано, что если преобразуемая функция непрерывна, удовлетворяет условиям Дирихле и некоторым дополнительным условиям на полуоси $(0,+\infty)$, то она представима обобщенным интегралом типа Фурье.

В работе [2] была построена полная теория интегральных преобразований с ядрами вида e^{-z^ρ} и $E_\rho(z;\mu)$ в классе L_2 и было показано, что теория Планшереля для классического интеграла Фурье распространяется на указанные обобщенные интегральные преобразования.

Полученные результаты позволили установить ряд теорем о приближении целыми функциями на лучах в комплексной области и о параметрическом представлении определенных классов целых функций.

В настоящей работе доказывается, что обобщенные интегральные преобразования с ядрами вида e^{-z^ρ} и $E_\rho(z;\mu)$ по Абелю суммируются для произвольной непрерывной функции, заданной на полуоси $(0,+\infty)$ и удовлетворяющей некоторым условиям роста в окрестности точки $+\infty$.

Как в вышеуказанных работах, так и в настоящей работе мы существенно будем опираться на асимптотические свойства целой функции $E_\rho(z;\mu)$. Поэтому мы здесь приводим формулировку основных асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$, доказательство которых содержится в работах [1, 3].

Лемма 1. а) *Пусть* $\rho>\frac{1}{2}$ *и число* β *определяется из условий*

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\pi,\qquad \text{при}\quad \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1.$$

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\frac{\pi}{\rho}, \quad \text{при} \quad \rho\geqslant 1. \tag{2}$$

Если $|\arg z|\leqslant\beta$, *то при* $|z|\to\infty$

$$E_\rho(z;\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{3}$$

а если $|\arg z|\geqslant\beta$, *то при* $|z|\to\infty$

$$E_\rho(z;\mu)=O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4}$$

б) *Пусть* $\rho=\frac{1}{2}$ и $\mu>0$, *тогда при* $x\to+\infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(-x;\mu)=x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\cos\left(\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}(1-\mu)\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5}$$

Заметим, что асимптотическая формула (3) представляет интерес при $\mu<1+\frac{1}{\rho}$, а формула (5) — при $\mu<3$.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В §1 приводятся некоторые предварительные леммы, необходимые в дальнейшем.

В §2 строится преобразование с ядром e^{-z^ρ} для функций, заданных на полуоси $(0, +\infty)$, и доказывается суммируемость по Абелю обратного преобразования с ядром вида $E_\rho(z;\mu)$.

В §3 решается обратная задача, т. е. строится преобразование с ядром $E_\rho(z;\mu)$ для функций, заданных на полуоси $(0, +\infty)$, и устанавливается суммируемость по Абелю обратного преобразования с ядром e^{-z^ρ}.

§ 1. Некоторые предварительные леммы

1°. Из асимптотических формул (3) и (5) следует, что

$$|E_\rho(xe^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}},\mu)|\leqslant A_1, \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$|E_\rho(xe^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)|\leqslant A_2(1+x^{\rho(1-\mu)}), \quad \text{при} \quad x\geqslant 1, \tag{1.1}$$

где A_1 и A_2 константы, не зависящие от x.

Из (1.1) следует, что для любого $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\mu>0$ и при произвольном $\varepsilon>0$ существуют интегралы

$$y^{(\pm)}(u;v;\varepsilon)=\int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon\pm iu^\rho)}E_\rho(vte^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)t^{\mu\rho-1}dt, \tag{1.2}$$

где $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$.

Лемма 2. При $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $0<\mu<1+\rho^{-1}$, $\varepsilon>0$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$ *имеет место формула*

$$y^{(+)}(u;\ v;\ \varepsilon)=\rho^{-1}e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\ \frac{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\rho^{-1}-\mu}}{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}. \tag{1.3}$$

Доказательтво. Рассмотрим интеграл

$$R(z)=\int_0^{\infty}e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}}E_{\rho}(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)t^{\mu\rho-1}\,dt \tag{1.4}$$

при $v\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}>0$.

Если $v=0$, то

$$R(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}}t^{\mu\rho-1}dt, \tag{1.5}$$

и интеграл справа существует и представляет аналитическую функцию в области $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}>0$.

Если $v>0$, то в силу определения функции $E_{\rho}(z;\mu)$ для любого $\delta>0$ при $t\geqslant t_0(\delta)$ будем иметь

$$|E_{\rho}(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)|\leqslant e^{(v^{\rho}+\delta)t^{\rho}}. \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.6) следует, что функция $R(z)$ существует и голоморфна в области $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}>v^{\rho}$. Но в силу (1.1)

$$|E_{\rho}(xve^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\mu)|\leqslant\begin{cases}A_1 \text{ при } 0\leqslant xv\leqslant 1\\ A_2(1+(xv)^{\rho(1-\mu)}) \text{ при } xv\geqslant 1\end{cases}; \tag{1.1'}$$

поэтому функция $R(z)$ существует и голоморфна в более широкой области

$$\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}>0,$$

т. е. в угле

$$-\frac{\pi}{\rho}<\arg z<0. \tag{1.7'}$$

Но при $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}>v^{\rho}$ функцию $R(z)$ мы можем вычислить непосредственным интегрированием.

Действительно, при $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho > v^\rho$, подставляя в (1.4) значение функции $E_\rho(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)$ из ряда (1), мы можем в силу (1.6) написать

$$R(z)=\int_0^\infty e^{-t^\rho(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho}\left\{\sum_{n=0}^\infty\frac{(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\right\}t^{\mu\rho-1}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{(ve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\int_0^\infty e^{-t^\rho(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho}t^{n+\mu\rho-1}dt.$$

Отсюда, после замены $t^\rho=x$, получим:

$$R(z)=\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^\infty\frac{(ve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\int_0^\infty e^{-x(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho}x^{\frac{n}{\rho}+\mu-1}dx=$$

$$=\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho\mu}}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{v}{z}\right)^n=\frac{1}{\rho}\,e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\cdot\frac{z^{1-\mu\rho}}{z-v},\tag{1.8}$$

так как при $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho > v^\rho$, очевидно имеем $v<|z|$.

Но, как было показано выше, функция $R(z)$ голоморфна в области (1.7), поэтому формула (1.8), полученная в предположении $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho > v^\rho$, справедлива в области (1.7) или, что то же, в области (1,7′).

Отметим теперь, что кривая с параметрическим уравнением

$$z=z(u)=\sqrt[\rho]{u^\rho-i\varepsilon}\,,\qquad u\geqslant 0$$

лежит в области угла $-\frac{\pi}{\rho}<\arg z<0$, так как

$$\arg z(u)=-\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{u^\rho}$$

и, таким образом, при $0\leqslant u<+\infty$

$$-\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\arg z(u)<0.$$

Заметив, что

$$\operatorname{Re}\{z(u)\}=\mathcal{Y}^{(+)}(u;\ v;\ \varepsilon),$$

отсюда и из (1.8) получим утверждение (1.3) леммы.

2°. Докажем две леммы, полагая, что $\rho \geqslant \frac{1}{2}$.

Лемма 3. Для любого $u>0$ *при фиксированном* $0<\delta<u$ *будем иметь*:

$$\text{a)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{u}^{u+\delta}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{u-\delta}^{u}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv=\frac{\pi}{2}u^{1-\mu\rho}. \tag{2.1}$$

б) *Если* $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{u-\delta}^{u+\delta}\left|\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}\right|dv=\pi u^{1-\mu\rho}. \tag{2.2}$$

Доказательство. а) Обозначим

$$У_1(\varepsilon)=\int_{u}^{u+\delta}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv, \tag{2.3}$$

тогда будем иметь:

$$У_1(\varepsilon)=u^{1-\mu\rho}\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log\frac{u+\delta-(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}{u-(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}\right\}=$$

$$=u^{1-\mu\rho}\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log[u+\delta-(u^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}]\right\}-$$

$$-u^{1-\mu\rho}\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log\left[1-\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]\right\}-$$

$$-u^{1-\mu\rho}\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log u\right\}=$$

$$=У_1^{(1)}(\varepsilon)+У_1^{(2)}(\varepsilon)+У_1^{(3)}(\varepsilon). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}У_1^{(1)}(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}У_1^{(3)}(\varepsilon)=0. \tag{2.5}$$

Далее, имеем:

$$У_1^{(2)}(\varepsilon) = -u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left[1-\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\frac{i\varepsilon}{u^\rho}+O(\varepsilon^2)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\log\left[\frac{i\varepsilon}{\rho u^\rho}(1+O(\varepsilon))\right]\right\} = -u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{\left[i+\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\frac{\varepsilon}{u^\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O(\varepsilon^2)\right]\log\frac{i\varepsilon}{\rho u^\rho}\right\} - u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left[1-\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\frac{i\varepsilon}{u^\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O(\varepsilon^2)\right]\log[1+O(\varepsilon)]\right\} = \frac{\pi}{2}u^{1-\mu\rho} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon\log\varepsilon). \qquad (2.6)$$

Из (2.4), (2.5) и (2.6) следует первая из формул (2.1).

Аналогично обозначая

$$У_2(\varepsilon) = \int_{u-\delta}^{u}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\}dv, \qquad (2.7)$$

имеем:

$$У_2(\varepsilon) = u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log\frac{u-(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}{u-\delta-(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}\right\} =$$

$$= u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log u\right\} + u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log\left[1-\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]\right\} - u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\left\{i\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-\mu}\log\left[u-\delta-(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}\right]\right\} =$$

$$= У_2^{(1)}(\varepsilon) + У_2^{(2)}(\varepsilon) + У_2^{(3)}(\varepsilon). \qquad (2.8)$$

Очевидно,

$$У_2^{(1)}(\varepsilon) = -У_1^{(3)}(\varepsilon), \quad У_2^{(2)}(\varepsilon) = -У_1^{(2)}(\varepsilon),$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}У_2^{(1)}(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}У_2^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2}u^{1-\mu\rho}. \qquad (2.9)$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}У_2^{(3)}(\varepsilon) = -u^{1-\mu\rho}\mathrm{Re}\{i\log(-\delta)\} = \pi u^{1-\mu\rho\,*)}. \qquad (2.10)$$

---

*) Так как точка $(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}$ находится на нашей кривой $z = z(u)$ $u > 0$, то легко видеть, что при $\varepsilon \to 0$, $\arg[u-\delta-(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}] \to \pi$.

Из (2.8), (2.9) и (2.10) следует вторая из формул (2.1).

б) Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\} = (u^{2\rho} + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)} \times$$

$$\times \frac{(u^{2\rho} + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2\rho}} \sin\left(\mu \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right) + v \sin\left[\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right]}{|(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v|^2}. \tag{2.11}$$

В этом выражении $u > 0$ фиксировано, $u-\delta < v < u+\delta$, $0 < \mu \leqslant \frac{1}{\rho}$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справа в (2.11) имеем неотрицательную величину. Поэтому при малых $\varepsilon > 0$

$$\int_{u-\delta}^{u+\delta}\left|\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\}\right| dv =$$

$$= \int_{u-\delta}^{u+\delta}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\} dv = У_1(\varepsilon) + У_2(\varepsilon), \tag{2.12}$$

где $У_1(\varepsilon)$ и $У_2(\varepsilon)$ были определены формулами (2.3) и (2.7).

Из (2.12) и (2.1) следует утверждение (2.2) леммы.

При $u = 0$ результат доказанной леммы несколько изменится. Имеет место

Лемма 4. Если $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $0 < \mu \leqslant \frac{1}{\rho}$, *то для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\delta v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\} dv =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\delta v^{\mu\rho-1}\left|\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\}\right| dv =$$

$$= \begin{cases} \pi\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right), \text{ при } \mu = \frac{1}{\rho}, \\ \\ \pi, \quad \text{при} \quad 0 < \mu < \frac{1}{\rho}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Omega(\varepsilon;\, \mu;\, \rho) = \int_0^\delta v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v}\right\} dv.$$

тогда после замены переменной $v=\varepsilon^{\frac{1}{\rho}}x$, будем иметь

$$\Omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\int\limits_0^{\delta\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{\rho}}} x^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\frac{i(-i)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{x-(-i)^{\frac{1}{\rho}}}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\delta\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{\rho}}}\frac{x\sin\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)+\sin\frac{\pi\mu}{2}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2\rho}+1}x^{\mu\rho-1}dx. \tag{2.14}$$

При $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$, $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ очевидно подинтегральное выражение в (2.14) неотрицательно, поэтому достаточно показать лишь, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\begin{cases}\pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right), & \text{при}\ \mu=\frac{1}{\rho}\\ \pi, & \text{при}\quad 0<\mu<\frac{1}{\rho}.\end{cases} \tag{2.13'}$$

Если $\mu=\frac{1}{\rho}$, то из (2.14) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega\left(\varepsilon;\frac{1}{\rho};\ \rho\right)=\sin\frac{\pi}{2\rho}\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2\rho}+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{\pi}{2\rho}}{\sin\frac{\pi}{2\rho}}\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\rho}\right)=\pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right), \tag{2.15}$$

т. е. (2,13′) доказано при $\mu=\frac{1}{\rho}$.

Если же $0<\mu<\frac{1}{\rho}$, то из (2.14) получим:

$$\lim_{\to 0}\Omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\int\limits_0^\infty\frac{x\sin\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi\mu}{2}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2\rho}+1}x^{\mu\rho-1}dx. \tag{2.16}$$

Но известно [4], что при $0<p<2$, $-\pi<\lambda<\pi$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{x^2+2x\cos\lambda+1}dx=\pi\frac{\sin[(1-p)\lambda]}{\sin\lambda\sin p\pi}. \tag{2.17}$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu\rho-1}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2\rho}+1}dx=\int_0^\infty \frac{x^{\mu\rho-1}}{x^2+2x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)+1}dx=$$

$$=\pi\frac{\sin\left[\pi(1-\mu\rho)\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)\right]}{\sin\pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)\sin\pi\mu\rho}. \tag{2.18}$$

так как при $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\quad 0\leqslant\pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)<\pi,\ \mu\rho>0.$

Аналогично

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu\rho}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{2\rho}+1}dx=\pi\frac{\sin\pi\mu\rho\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)}{\sin\pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)\sin\pi\mu\rho}, \tag{2.19}$$

так как $\mu\rho<1$.

Из (2.16), (2.17) и (2.18) следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega(\varepsilon;\mu;\rho)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2\rho}\sin\pi\mu\rho}\left\{\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\mu\right)\sin\pi\mu\rho\left(1-\frac{1}{\rho}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi\mu}{2}\sin\left[\pi(1-\mu\rho)\left(1-\frac{1}{2\rho}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}\sin\pi\mu\rho}\left\{\cos\pi\left(\frac{1}{2\rho}-\mu\rho\right)-\cos\pi\left(\frac{1}{2\rho}+\mu\rho-\mu\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\pi\left(\frac{1}{2\rho}+\mu\rho-\mu\right)-\cos\pi\left(\frac{1}{2\rho}+\mu\rho\right)\right\}=\pi.$$

3°. Докажем теперь следующую лемму, полагая опять, что $\rho\geqslant\frac{1}{2}$.

Лемма 5. Пусть $u\geqslant 0$, *тогда для всякого фиксированного* $\delta(0<\delta<u)$ *будем иметь*

$$\text{a)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_u^{u+\delta} v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{u-\delta}^{u} v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv=\frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

б) *Если* $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{u-\delta}^{u+\delta} v^{\mu\rho-1}\left|\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}\right|dv=\pi. \tag{3.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$\gamma_1(\varepsilon)=\int\limits_{u}^{u+\delta} v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv, \tag{3.3}$$

тогда имеем:

$$\gamma_1(\varepsilon)=-\operatorname{Re}\left\{i\int\limits_{u}^{u+\delta} v^{\rho(\mu-1)}(v^\rho-i\varepsilon)^{1-\mu}d\log\left[(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u\right]\right\}=$$

$$=-\operatorname{Re}\left\{i(u+\delta)^{\rho(\mu-1)}\left[(u+\delta)^\rho-i\varepsilon\right]^{1-\mu}\log\left([(u+\delta)^\rho-i\varepsilon]^{\frac{1}{\rho}}-u\right)\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{iu^{\rho(\mu-1)}(u^\rho-i\varepsilon)^{1-\mu}\log\left([u^\rho-i\varepsilon]^{\frac{1}{\rho}}-u\right)\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{i\int\limits_{u}^{u+\delta}\log\left[(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u\right]d\left[v^{\rho(\mu-1)}(v^\rho-i\varepsilon)^{1-\mu}\right]\right\}=$$

$$=\gamma_1^{(1)}(\varepsilon)+\gamma_1^{(2)}(\varepsilon)+\gamma_1^{(3)}(\varepsilon). \tag{3.4}$$

Имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_1^{(1)}(\varepsilon)=-\operatorname{Re}\{i\log\delta\}=0, \tag{3.5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_1^{(3)}(\varepsilon)=\operatorname{Re}\left\{i\int\limits_{u}^{u+\delta}\log(v-u)d(1)\right\}=0. \tag{3.6}$$

Далее,

$$\gamma_1^{(2)}(\varepsilon)=\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{1-\mu}\log u\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{i\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{1-\mu}\log\left[\left(1-i\frac{\varepsilon}{u^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}-1\right]\right\}=\gamma_1^{(4)}(\varepsilon)+\gamma_1^{(5)}(\varepsilon), \tag{3.7}$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_1^{(4)}(\varepsilon)=0. \tag{3.8}$$

Наконец,

$$\gamma_1^{(5)}(\varepsilon)=\operatorname{Re}\left\{i\left[1-(1-\mu)\frac{i\varepsilon}{u^\rho}+O(\varepsilon^2)\right]\log\left[\frac{-i\varepsilon}{\rho u^\rho}(1+O(\varepsilon))\right]\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left[i+(1-\mu)\frac{\varepsilon}{u^{\rho}}+O(\varepsilon^2)\right]\log\frac{-i\varepsilon}{\rho u^{\rho}}\right\}+$$

$$+\mathrm{Re}\left\{i\left[1-(1-\mu)\frac{i\varepsilon}{u^{\rho}}+O(\varepsilon^2)\right]\log(1+O(\varepsilon))\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+O(\varepsilon)+O(\varepsilon\log\varepsilon). \tag{3.9}$$

Из формул (3.3) — (3.9) следует первое из предельных соотношений (3.1) леммы.

Обозначим теперь

$$\gamma_2(\varepsilon)=\int\limits_{u-\delta}^{u}v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv, \tag{3.10}$$

тогда имеем:

$$\gamma_2(\varepsilon)=-\mathrm{Re}\left\{i\int\limits_{u-\delta}^{u}v^{\mu(\rho-1)}(v^{\rho}-i\varepsilon)^{1-\mu}\,d\log\left[(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u\right]\right\}=$$

$$=-\mathrm{Re}\left\{i\left(1-\frac{i\varepsilon}{(u-\delta)^{\rho}}\right)^{1-\mu}\log\left(\left[(u-\delta)^{\rho}-i\varepsilon\right]\right)\right\}+$$

$$+\mathrm{Re}\left\{i\left(1-\frac{i\varepsilon}{(u-\delta)^{\rho}}\right)^{1-\mu}\log\left(\left[(u-\delta)^{\rho}-i\varepsilon\right]-u\right)\right\}-$$

$$-\mathrm{Re}\left\{i\int\limits_{u-\delta}^{u}\log\left[(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u\right]d\left(1-\frac{i\varepsilon}{v^{\rho}}\right)^{1-\mu}\right\}=$$

$$=\gamma_2^{(1)}(\varepsilon)+\gamma_2^{(2)}(\varepsilon)+\gamma_2^{(3)}(\varepsilon). \tag{3.11}$$

По обозначениям, введенным выше, $\gamma_2^{(1)}(\varepsilon)=-\gamma_1^{(2)}(\varepsilon)$ и поэтому в силу (3.7) — (3.9)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_2^{(1)}(\varepsilon)=-\frac{\pi^{*)}}{2}. \tag{3.12}$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_2^{(3)}(\varepsilon)=0. \tag{3.13}$$

Наконец, как и выше,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_2^{(3)}(\varepsilon)=0. \tag{3.14}$$

---

*) В этом случае легко видеть, что при $\varepsilon\to 0$

$$\arg\left(\left[(u-\delta)^{\rho}-i\varepsilon\right]^{\frac{1}{\rho}}-u\right)\to-\pi.$$

Из (3.11)—(3.14) следует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_2(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$, т. е. вторая из формул (3.1) леммы.

в) Заменив в формуле (2.11) u и v местами, опять заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ выражение

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}$$

неотрицательно, если $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$. Поэтому при малых ε

$$\int\limits_{u-\delta}^{u+\delta}\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv\right|=\gamma_1(\varepsilon)+\gamma_2(\varepsilon), \tag{3.15}$$

где $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$ определены выше формулами (3.3) и (3.10).

Из (3.15) и (3.1) следует утверждение (3.2) леммы.

При $u=0$ имеет место

Лемма 6. Если $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$, *то для любого* $\delta>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\delta}v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\mu}}\right\}dv=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\delta}v^{\mu\rho-1}\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\mu}}\right\}\right|dv=\frac{\pi}{2\rho}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Обозначим

$$\omega(\varepsilon;\mu;\rho)=\int\limits_0^{\delta}v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^{\rho}-i\varepsilon)^{\mu}}\right\}dv, \tag{3.17}$$

тогда после замены переменной $v=\varepsilon^{\frac{1}{\rho}}x^{-\frac{1}{\rho}}$ получим

$$\omega(\varepsilon;\mu;\rho)=\frac{1}{\rho}\int\limits_{\varepsilon\delta^{-\rho}}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(1-ix)^{\mu}}\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int\limits_{\varepsilon\delta^{-\rho}}^{\infty}\frac{\sin(\mu\,\mathrm{arctg}x)}{x(1+x^2)^{\mu/2}}\,dx. \tag{3.18}$$

При $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$ очевидно, что подинтегральное выражение в (3.18) неотрицательно. Поэтому достаточно лишь показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\frac{\pi}{2\rho}. \tag{3,16'}$$

Но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arctg} x)}{x(1+x^2)^{\mu/2}}dx,$$

откуда, после замены $x=\operatorname{tg}x$, получим ([4], стр. 182)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon;\ \mu;\ \rho)=\frac{1}{\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\mu u}{\sin u}\cos^{\mu-1}u\,du=\frac{\pi}{2\rho}.$$

Лемма доказана.

4°. Наконец, докажем последнюю лемму, необходимую нам ниже.

Лемма 7. Пусть $f(v)$ *измеримая функция, заданная на полуоси* $(0, +\infty)$ *и удовлетворяющая условию*

а) *при данном* $\mu\geqslant 1$, $\rho\geqslant\frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty |f(v)|\,v^{\mu\rho-1}dv<+\infty, \tag{4.1}$$

б) *при данном* $0<\mu<1$, $\rho\geqslant\frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty |f(v)|\,v^{\mu\rho-1}dv<+\infty,\qquad \int_1^\infty |f(v)|\,v^{\rho-1}dv<+\infty. \tag{4.1'}$$

Интеграл

$$F(z)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\int_0^\infty f(v)E_\rho(vz;\ \mu)v^{\mu\rho-1}dv \tag{4.2}$$

абсолютно сходится на лучах $z=te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}$, $t\geqslant 0$, *причем, когда* $t\to+\infty$

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})|\leqslant O(t^{\rho(1-\mu)}). \tag{4.3}$$

Доказательство. а) В силу оценки (1.1') при $\mu\geqslant 1$

$$|E_\rho(vte^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)|\leqslant A_3,\ v\geqslant 0,\ t\geqslant 0, \tag{4.4}$$

где A_3 — константа, не зависящая от v и t.

Поэтому, если $\mu\geqslant 1$, из оценки (4.4) имеем

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})| \leqslant \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} A_3 \int_0^\infty |f(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv \quad (t \geqslant 0). \tag{4.5}$$

Таким образом, в силу условия (4.1) утверждение леммы в случае $\mu \geqslant 1$ доказано.

б) Если $0 < \mu < 1$, то из (1.1′) следует, что при $v \geqslant 0$, $t \geqslant 0$

$$|E_\rho(vte^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)| \leqslant A_4 (1 + (vt)^{\rho(1-\mu)}), \tag{4.4′}$$

где A_4 — константа, не зависящая от v и t.

Поэтому при $0 < \mu < 1$ из (4.4′) имеем:

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}| \leqslant \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^\infty |f(v)|\,(1 + (tv)^{\rho(1-\mu)}) v^{\mu\rho-1} dv =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} A_4 \left\{ \int_0^\infty |f(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv + t^{\rho(1-\mu)} \int_0^\infty v^{\rho-1} |f(v)|\, dv \right\}. \tag{4.5′}$$

Первый интеграл справа в (4,5′) сходится в силу первого из условий (4.1′). Второй интеграл также сходится, так как $0 < \mu < 1$, и поэтому

$$\int_0^\infty |f(v)|\, v^{\rho-1} dv \leqslant \int_0^1 |f(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv + \int_1^\infty |f(v)|\, v^{\rho-1} dv,$$

а интегралы, стоящие справа, сходятся в силу условий (4.1′).

Что касается утверждения (4.3) леммы, то оно просто следует из оценок (4.5) и (4.5′).

§ 2. Преобразование с ядром $e^{-v^\rho z^\rho}$ и суммирование по Абелю его обращения

5°. Пусть функция $\varphi(v)$ измерима на полуоси $(0, +\infty)$ и при данном $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $0 < \mu \leqslant \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\varphi(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv < +\infty. \tag{5.1}$$

Очевидно, что функция

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-v^\rho z^\rho} \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv \tag{5.2}$$

голоморфна в области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывна на ее границе.

Для любого $\varepsilon > 0$ и $0 \leqslant u < +\infty$ составим функцию

$$\varphi_\varepsilon(u) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho} \Phi(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}) E_\rho(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu) \times \right.$$

$$\times t^{\mu\rho-1}dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho} \Phi(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) \times$$

$$\left. \times E_\rho(ute^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu)\, t^{\mu\rho-1}dt \right\}, \tag{5.3}$$

которая, в силу оценки (1.1), очевидно непрерывна на полуоси $(0, +\infty)$.

Докажем теорему.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(v)$ удовлетворяет указанному выше условию (5.1).

а) *Если $u > 0$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}[\varphi(u+0) + \varphi(u-0)] \tag{5.4}$$

там, где это выражение имеет смысл, и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(u) = \varphi(u) \tag{5.4'}$$

почти для всех $u > 0$.

б) *Если существует значение $\varphi(+0)$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\rho}\varphi(0). \tag{5.5}$$

Доказательство. Подставляя значения $\Phi(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$ из (5.2) в (5.3), после замены порядка интегрирования получим следующее выражение для функции $\varphi_\varepsilon(u)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $0 \leqslant u < +\infty$:

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon + iv^\rho)t^\rho} \times \right.$$

$$\times E_\rho(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu) t^{\mu\rho-1}\, dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon - iv^\rho)t^\rho} \times$$

$$\left. \times E_\rho(ute^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu) t^{\mu\rho-1}dt \right\} dv = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \times$$

$$\times\left\{\operatorname{Re} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty e^{-(\varepsilon+iv^\rho)t^\rho} E_\rho\left(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt\right\}dv. \tag{5.6}$$

Но значение внутреннего интеграла, стоящего справа в (5.6), нами уже вычислено в лемме 2, поэтому

$$\varphi_\varepsilon(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(v)v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv. \tag{5.7}$$

а) Пусть $u>0$, тогда, выбирая число $\delta>0$ так, чтобы имели $0<u-\delta$, напишем формулу (5.7) в виде

$$\varphi_\varepsilon(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{u-\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u+\delta}+\int_{u+\delta}^\infty. \tag{5.7'}$$

Заметим теперь, что если $0\leqslant v\leqslant u-\delta$ или $u+\delta\leqslant v<+\infty$, то в силу того, что $0<\mu\rho\leqslant 1$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}=\operatorname{Re}\frac{-iv^{1-\mu\rho}}{v-u}=0. \tag{5.8}$$

Поэтому из представления (5.7′) в силу условия (5.1) получим

$$\varphi_\varepsilon(u)=\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u+\delta}\varphi(v)v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv+0(1), \tag{5.9}$$

где $0(1)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для данного $u>0$ существуют числа $\varphi(u-0)$ и $\varphi(u+0)$, тогда (5.9) представим в виде

$$\varphi_\varepsilon(u)=\varphi(u-0)\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u}v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv+$$

$$+\varphi(u+0)\frac{1}{\pi}\int_{u}^{u+\delta}v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u}[\varphi(v)-\varphi(u-0)]v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{u}^{u+\delta}[\varphi(u)-\varphi(u+0)]v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}dv+$$

$$+0(1)=R_\varepsilon^{(1)}+R_\varepsilon^{(2)}+R_\varepsilon^{(3)}+R_\varepsilon^{(4)}+0(1). \tag{5,10}$$

Но по формуле (3.1) леммы 5 имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^{(1)}=\frac{1}{2}\varphi(u-0),\quad \lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^{(2)}=\frac{1}{2}\varphi(u+0), \tag{5.11}$$

для любого $0<\delta<u$.

Так как числа $\varphi(u-0)$ и $\varphi(u+0)$ существуют, то для любого $\varepsilon_1>0$ число $\delta>0$ можно было выбрать так, чтобы имели

$$\begin{aligned} &|\varphi(v)-\varphi(u-0)|<\varepsilon_1, && u-\delta\leqslant v<u,\\ &|\varphi(v)-\varphi(u+0)|<\varepsilon_1, && u<v\leqslant u+\delta. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Для такого $\delta>0$ имеем:

$$|R_\varepsilon^{(3)}+R_\varepsilon^{(4)}|\leqslant\varepsilon_1\frac{1}{\pi}\int\limits_{u-\delta}^{u+\delta} v^{\mu\rho-1}\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-u}\right\}\right|dv,$$

откуда, по формуле (3.2) леммы 5, получим:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}|R_\varepsilon^{(3)}+R_\varepsilon^{(4)}|\leqslant\varepsilon_1. \tag{5.13}$$

Из формулы (5.10) в силу (5.11)—(5.13) следует, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\varphi_\varepsilon(u)-\frac{1}{2}[\varphi(u+0)+\varphi(u-0)]\right|\leqslant\varepsilon_1,$$

откуда, так как $\varepsilon_1>0$ произвольно, получим утверждение (5.4) теоремы.

Из (5.4) очевидно следует, что (5.4′) имеет место почти для всех $u>0$.

б) Положим, что $\varphi(+0)$ существует, и для данного $\varepsilon_1>0$ число $\delta>0$ выберем так, чтобы имели

$$|\varphi(v)-\varphi(+0)|<\varepsilon_1,\ 0<v\leqslant\delta. \tag{5.14}$$

Из формулы (5.7) имеем представление

$$\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\varphi(v)v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^\rho-i\varepsilon)^\mu}\right\}dv=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta+\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^{+\infty}. \tag{5.15}$$

Но при $\delta\leqslant v<+\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^\rho-i\varepsilon)^\mu}\right\}=\mathrm{Re}\left\{-iv^{-\mu\rho}\right\}=0,$$

поэтому формулу (5.15) можно написать в виде

$$\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varphi(v)v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^\rho-i\varepsilon)^\mu}\right\}dv+0(1). \tag{5.16}$$

Далее, имеем:

$$\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varphi(+0)v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^\rho-i\varepsilon)^\mu}\right\}dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(v)-\varphi(+0)]v^{\mu\rho-1}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{(v^\rho-i\varepsilon)^\mu}\right\}dv+$$

$$+0(1)=\Omega_\varepsilon^{(1)}+\Omega_\varepsilon^{(2)}+0(1). \tag{5.17}$$

По формуле (3.16) леммы 6 получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_\varepsilon^{(1)}=\frac{1}{2\rho}\varphi(+0). \tag{5.18}$$

Далее, по (5.14) и по той же формуле (3.16)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\Omega_\varepsilon^{(2)}|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2\rho}\leqslant\varepsilon_1. \tag{5.19}$$

Из (5.17), (5.18) и (5.19) следует

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\varphi_\varepsilon(0)-\frac{1}{2\rho}\varphi(0)\right|\leqslant\varepsilon_1,$$

откуда, в силу произвольности ε_1, получим утверждение (5.5) теоремы.

Таким образом, теорема доказана.

6°. Результат теоремы 1 можно существенно дополнить, если $\rho\geqslant 1$.

Пусть функция $\varphi(v)$ задана на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\varphi(v)|\,v^{\mu\rho-1}dv<+\infty, \tag{6.1}$$

где при данном $\rho\geqslant 1$, $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$.

Заметим, что если $\rho\geqslant 1$ и $\frac{\pi}{\rho}\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}$, то

$$\begin{gathered}\frac{\pi}{2\rho}<\frac{3\pi}{2\rho}\leqslant\theta+\frac{\pi}{2\rho}\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho},\\ \frac{\pi}{2\rho}\leqslant\theta-\frac{\pi}{2\rho}\leqslant 2\pi-\frac{3\pi}{2\rho}<2\pi-\frac{\pi}{2\rho}.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Поэтому из асимптотических формул (3) и (4) следует, что при $\rho > 1$, $\frac{\pi}{\rho} \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$, $x \geqslant 1$

$$|E_\rho(xe^{i\left(\theta \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu)| \leqslant A(1 + x^{\rho(1-\mu)}), \tag{6.3}$$

где $A > 0$ константа, не зависящая от x и θ.

Из оценки (6.3) следует, что функция $\varphi_\varepsilon(re^{i\theta})$, определяемая формулой

$$\varphi_\varepsilon(re^{i\theta}) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}\ \Phi(te^{i\frac{\pi}{2\rho}})\, E_\rho(tre^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu) \times\right.$$

$$\times t^{\mu\rho-1}dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}\Phi(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}})E_\rho(tre^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu) \times$$

$$\left. \times\, t^{\mu\rho-1}dt \right\} \tag{6.4}$$

существует и непрерывна при любом $\varepsilon > 0$ на лучах $re^{i\theta}$ $r \geqslant 0$, если $\frac{\pi}{\rho} \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$.

Теорема 2. Если $\rho \geqslant 1$, *то для любого* θ *из отрезка* $\left[\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right]$ *будем иметь*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(re^{i\theta}) = 0,\quad 0 < r < +\infty. \tag{6.5}$$

Доказательство. Подставляя значения $\Phi(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$ из (5.2) в (6.4), получим

$$\varphi_\varepsilon(re^{i\theta}) = \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-(\varepsilon + iv^\rho)t^\rho} \times\right.$$

$$\times E_\rho(tre^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu)t^{\mu\rho-1}dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-(\varepsilon - iv^\rho)t^\rho} \times$$

$$\left.\times E_\rho(tre^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2\rho}\right)};\ \mu)t^{\mu\rho-1}dt\right\}dv. \tag{6.6}$$

Для вычисления внутренних интегралов, стоящих справа в (6.6), поступаем вполне аналогичным образом, как при доказательстве леммы 2.

Например, для вычисления первого из указанных интегралов рассматриваем интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t^\rho\left(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)^\rho} E_\rho\left(tre^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt, \tag{6.7}$$

который в силу (6.2) и (6.3) сходится и представляет аналитическую функцию в области $\mathrm{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho>0$, т. е. в угле $-\frac{\pi}{\rho}<\arg z<0$. Как и в пункте 1°, полагая, что $\mathrm{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho>r^\rho$, значение интеграла (6.7) вычисляем непосредственным интегрированием

$$\int_0^\infty e^{-t^\rho\left(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)^\rho} E_\rho\left(tre^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right)^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\int_0^\infty e^{-t^\rho(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho}t^{n+\mu\rho-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{-\mu\rho}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{re^{i\theta}}{z}\right)^n=\rho^{-1}e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{z^{1-\mu\rho}}{z-re^{i\theta}}, \tag{6.8}$$

так как при $\mathrm{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^\rho>r^\rho$ очевидно $|re^{i\theta}|<|z|$.

Из (6.8) аналогичным образом, как в лемме 2, получим формулу

$$\int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon+iv^\rho)}E_\rho\left(tre^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2\rho}\right)};\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-re^{i\theta}},\ (r\geqslant 0), \tag{6.9}$$

справедливую при $\rho\geqslant 1$, $\frac{\pi}{\rho}=\theta\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}$.

Из (6.9) или же просто интегрированием получим также формулу

$$\int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon-iv^\rho)}E_\rho\left(tre^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2\rho}\right)};\mu\right)t^{\mu\rho-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{(v^\rho+i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho+i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-re^{i\theta}},\ (r\geqslant 0), \tag{6.10}$$

справедливую опять при $\rho\geqslant 1$, $\frac{\pi}{\rho}\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}$.

Из (6.6), (6.9) и (6.10) получим

$$\varphi_\varepsilon(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}\left\{\frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - re^{i\theta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{i(v^\rho + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - re^{i\theta}}\right\} dv, \quad (r \geqslant 0) \tag{6.11}$$

при $\rho \geqslant 1$, $\frac{\pi}{\rho} \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$.

Из (6.11) в силу условия (6.1) получим утверждение (6.5) теоремы.

Результаты теорем 1 и 2 позволяют построить аппарат для представления функций, непрерывных на двух произвольных лучах, исходящих из начала координат и составляющих заданный угол $\frac{\pi}{\alpha}$ $(\alpha \geqslant 1)$. Это можно сделать точно таким же образом, как в работе [1]. Однако мы на этом останавливаться не будем.

§ 3. Преобразование с ядром $E_\rho(vz;\mu)$ и суммирование по Абелю его обращения

В нашей работе [1] для функций, удовлетворяющих условию Дирихле на полуоси $(0, +\infty)$, мы рассматривали лишь преобразование с ядром $e^{-v^\rho z^\rho}$ и его обращение при помощи ядра $E_\rho(zv;\mu)$. Обратное преобразование с ядром $E_\rho(zv;\mu)$ и его обращение там не изучалось. В работе же [2] рассматривались оба преобразования в классе L_2.

В настоящем параграфе мы рассматриваем преобразование функций при помощи ядра вида $E_\rho(zv;\mu)$ и доказываем, что обратное преобразование с ядром вида $e^{-z^\rho v^\rho}$ суммируется по Абелю.

7°. Пусть функция $f(v)$ измерима на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет одному из следующих условий:

а) при данном $\mu \geqslant 1$, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty |f(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \tag{7.1}$$

б) при данном $0 < \mu < 1$, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty |f(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \quad \int_1^\infty |f(v)|\, v^{\rho-1} dv < +\infty. \tag{7.2}$$

По лемме 7, в обоих случаях интеграл

$$F(z)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\int\limits_0^\infty f(v)E_\rho(vz;\ \mu)v^{\mu\rho-1}dv \tag{7.3}$$

абсолютно сходится на лучах $z=te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}$, $t\geqslant 0$ и при $t\to+\infty$

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})|\leqslant O(t^{\rho(1-\mu)}). \tag{7.4}$$

Из (7.4) следует, что при любом $\varepsilon>0$ существует функция

$$f_\varepsilon(u)=\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}F(te^{i\frac{\pi}{2\rho}})e^{-it^\rho u^\rho}t^{\mu\rho-1}dt+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho}F(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}})e^{it^\rho u^\rho}t^{\mu\rho-1}dt\right\} \tag{7.5}$$

на полуоси $0\leqslant u<+\infty$.

Докажем теорему.

Теорема 3. Пусть функция $f(v)$ *удовлетворяет одному из условий а) или б), при этом в обоих случаях* $0<\mu\leqslant\frac{1}{\rho}$; *тогда*

1) *если* $u>0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}[f(u+0)+f(u-0)] \tag{7.6}$$

там, где это выражение имеет смысл,

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(u)=f(u) \tag{7.6'}$$

почти для всех $u>0$;

2) *если существует значение* $f(+0)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(0)=\begin{cases}f(+0), & \text{при}\quad 0<\mu<\frac{1}{\rho}\\ \left(1-\frac{1}{2\rho}\right)f(+0), & \text{при}\quad \mu=\frac{1}{\rho}.\end{cases} \tag{7.7}$$

Доказательство. Подставляя значения $F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$ из (7.3) в (7.5), получим, что при любом $\varepsilon>0$ и $0\leqslant u<+\infty$

$$f_\varepsilon(u)=\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^\infty f(v)v^{\mu\rho-1}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon+iu^\rho)}\times\right.$$

$$\times E_\rho(vte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)t^{\mu\rho-1}dt+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon-iu^\rho)}\times$$

$$\left.\times E_\rho(vte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)t^{\mu\rho-1}dt\right\}dv=$$

$$=\frac{\rho}{\pi}\int_0^\infty f(v)v^{\mu\rho-1}\left\{\operatorname{Re}e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon+iu^\rho)}E_\rho(vte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\mu)\times\right.$$

$$\left.\times t^{\mu\rho-1}dt\right\}dv=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv \tag{7.8}$$

в силу формулы (1.3) леммы 2.

1) Пусть $u>0$ и существуют числа $f(u-0)$ и $f(u+0)$. Выберем для данного $\varepsilon_1>0$ число $\delta=\delta(\varepsilon_1)$ таким образом, чтобы имели $0<\delta<u$ и

$$|v^{\mu\rho-1}f(v)-u^{\mu\rho-1}f(u-0)|<\varepsilon_1,\ u-\delta\leqslant v<u,$$

$$|v^{\mu\rho-1}f(v)-u^{\mu\rho-1}f(u+0)|<\varepsilon_1,\ u<v\leqslant u+\delta. \tag{7.9}$$

Разбивая последний интеграл в (7.8) на три интеграла, распространенные на интервалы $(0,\ u-\delta)$, $(u-\delta,\ u+\delta)$, $(u+\delta,\ +\infty)$, как при доказательстве теоремы 1, заключаем, что при $\varepsilon\to 0$

$$f_\varepsilon(u)=\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u+\delta}f(v)v^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+0(1). \tag{7.10}$$

Далее, функцию $f_\varepsilon(u)$ представим в виде

$$f_\varepsilon(u)=u^{\rho\mu-1}f(u-0)\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+$$

$$+u^{\mu\rho-1}f(u+0)\frac{1}{\pi}\int_{u}^{u+\delta}\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{u-\delta}^{u}[v^{\mu\rho-1}f(v)-u^{\mu\rho-1}f(u-0)]\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{u}^{u+\delta}[v^{\mu\rho-1}f(v)-u^{\rho\mu-1}f(u+0)]\operatorname{Re}\left\{\frac{-i(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+$$

$$+0(1)=R_\varepsilon^{(1)}+R_\varepsilon^{(2)}+R_\varepsilon^{(3)}+R_\varepsilon^{(4)}+0(1). \tag{7.11}$$

Но по формуле (2.1) леммы 3 имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2} f(u-0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} R_{\varepsilon}^{(2)} = \frac{1}{2} f(u+0). \tag{7.12}$$

Далее, в силу (7.9)

$$|R_\varepsilon^{(3)} + R_\varepsilon^{(4)}| \leqslant \varepsilon_1 \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \left| \mathrm{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} \right| dv,$$

откуда по (2.2)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} |R_\varepsilon^{(3)} + R_\varepsilon^{(4)}| \leqslant \varepsilon_1 u^{1-\mu\rho}. \tag{7.13}$$

Из (7.11), (7.12) и (7.13) получим:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left| f_\varepsilon(u) - \frac{1}{2}[f(u+0) + f(u-0)] \right| \leqslant \varepsilon_1 u^{1-\mu\rho}, \tag{7.14}$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon_1 > 0$, следует утверждение (7.6) теоремы.

Из (7.6) следует, очевидно, что (7.6′) имеет место почти во всех $u > 0$.

2. Пусть существует значение $f(+0)$, тогда для $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы имели

$$|f(v) - f(+0)| < \varepsilon_1, \quad 0 < v \leqslant \delta. \tag{7.15}$$

Из формулы (7.8) получили представление

$$f_\varepsilon(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v) v^{\mu\rho-1} \mathrm{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta f(v) v^{\mu\rho-1} \mathrm{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + O(1), \tag{7.16}$$

так как при $0 < \mu < \frac{1}{\rho}$, $v \geqslant \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} = 0.$$

Далее, имеем:

$$f_\varepsilon(0) = f(+0) \frac{1}{\pi} \int_0^\delta v^{\mu\rho-1} \mathrm{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(v)-f(+0)]v^{\mu\rho-1}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}-v}\right\}dv+$$

$$+O(1)=\Omega_{\varepsilon}^{(1)}+\Omega_{\varepsilon}^{(2)}+O(1). \tag{7.17}$$

Но по формуле (2.13) леммы 4

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_{\varepsilon}^{(1)}=\begin{cases} f(+0), & \text{при} \quad 0<\mu<\dfrac{1}{\rho} \\ \left(1-\dfrac{1}{2\rho}\right)f(+0), & \text{при} \quad \mu=\dfrac{1}{\rho}. \end{cases} \tag{7.18}$$

Далее, в силу (7.15) и (2.13),

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\Omega_{\varepsilon}^{(2)}|\leqslant\varepsilon_1. \tag{7.19}$$

Из (7.17), (7.12) и (7.19) получим утверждение (7.7) теоремы.

В заключение отметим, что из результатов настоящей работы при помощи одной Тауберовой теоремы будет следовать результат нашей работы [1] в более полном виде.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 29 IX 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Изв. АН СССР, серия математическая, т. 18, № 5 (1954).
2. *Джрбашян М. М.* ДАН СССР, т. XCV, № 6 (1954).
3. *Джрбашян М. М.* ДАН Армянской ССР, т. 19, № 3 (1954).
4. См. напр. *Рыжик И. М.* и *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, М.—Л. (1951), стр. 158.

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՍՏ ԱԲԵԼԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեր աշխատության մեջ [1] *կառուցված էր* $e^{-z^{\rho}}$ *և* $E_{\rho}(z;\mu)$ *տեսքի կորիզներով ընդհանրացած ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը, որտեղ՝*

$$E_{\rho}(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}$$

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիա է ρ կարգի և 1 տիպի։ Ապացուցված էր, որ եթե ձևափոխվող ֆունկցիան անընդհատ է, բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, ապա այն ներկայացնելի է Ֆուրյեի տիպի ինտեգրալով։

Մեր մյուս աշխատության մեջ [2] կառուցված էր $e^{-z^{\rho}}$ և $E_{\rho}(z; \mu)$ տեսքի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը L_2 դասում և ցույց էր տրված, որ Ֆուրյեի կլասիկ ինտեգրալի համար հայտնի Պլանշերելի տեսությունը տարածվում է վերոհիշյալ ընդհանրացած ձևափոխությունների վրա։

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է, որ $e^{-z^{\rho}}$ և $E_{\rho}(z; \mu)$ տեսքի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջման բանաձևերը ըստ Աբելի գումարվում են դեպի ձևափոխվող ֆունկցիան, եթե վերջինս անընդհատ է $(0, +\infty)$ առանցքի վրա։

Ինչպես վերոհիշյալ աշխատություններում, այնպես էլ այստեղ, մենք էապես հենվում ենք $E_{\rho}(z; \mu)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական հատկությունների վրա։