

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян

Изгиб эллиптической плиты

В работе, методом Н. И. Мусхелишвили [1], решен ряд задач об изгибе защемленной по всему контуру эллиптической плиты при нагрузке, равномерно-распределенной: 1) по площади эллипса конфокальной с данной, 2) по площади круга, центр которого совпадает с центром плиты, 3) по длине одного из главных диаметров эллипса.

§ 1. Общее решение задачи об изгибе защемленной эллиптической плиты

Расположим оси x и y по большим и малым диаметрам эллипса. Прогиб плиты — $w(x, y)$ — определяется из дифференциального уравнения

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (1.1)$$

где D — жесткость плиты, p — интенсивность нормальной нагрузки.

Решение (1.1) представим в виде

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y), \quad (1.2)$$

где f — частное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее, при частичной нагрузке, условиям сопряжения нагруженной и ненагруженной частей плиты; Φ — бигармоническая функция

$$\Phi = \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.3)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного z , функции $\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\chi}(\bar{z})$ — сопряженные с ними.

Функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, следовательно и бигармоническая функция Φ , определяются из контурных условий. Когда плита защемлена по контуру, контурные условия будут

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (1.4)$$

где n — внешняя нормаль к контуру.

Из (1.4) следует

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (1.5)$$

где s — касательная к контуру.

Из (1.5) следует, что на контуре $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ и $w = A = \text{const}$. Следовательно, (1.4) можно заменить условием (1.5) и дополнительным условием $A = 0$.

Пусть каждая из функций f и Φ на контуре представляется рядом Фурье. Обозначим постоянные члены рядов для f_s и Φ_s через $\Pi[f_s]$ и $\Pi[\Phi_s]$; тогда условие $A = 0$, согласно (1.2), заменяется

$$\Pi[f_s] + \Pi[\Phi_s] = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом (1.5) и (1.6) эквивалентны условиям (1.4).

Имея в виду (1.2), (1.3) и тождество

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = -2i \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s},$$

из (1.5) и (1.6) получим контурные условия защемленной плиты:

$$\bar{z}_s \varphi'(z_s) + \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \psi(z_s) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s, \quad (1.7)$$

$$\Pi[\bar{z}_s \varphi(z_s) + z_s \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \chi(z_s) + \bar{\chi}(\bar{z}_s)] = - \Pi[f_s]. \quad (1.8)$$

где
$$\varphi'(z) = \frac{d}{dz} [\varphi(z)], \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} [\chi(z)]. \quad (1.9)$$

Н. И. Мусхелишвили представил контурные условия плоской задачи теории упругости при заданных на контуре внешних силах в виде

$$\bar{z}_s \varphi'(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \psi(z_s) = f_1 - if_2. \quad (1.10)$$

Сопоставляя (1.7) и (1.10) заключаем, что если для плоской задачи найдены функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, то, заменив в них $f_1 - if_2$ через $\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s$, получим значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для задачи изгиба плиты, защемленной по всему контуру. Функция же $\chi(z)$ определяется по (1.9)

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz + C, \quad (1.11)$$

при этом C определяется по (1.8).

Н. И. Мусхелишвили [1] дано эффективное решение плоской задачи сплошного эллипса. Приведем основные результаты этого решения. С помощью разреза по отрезку, соединяющему фокусы эллипса, превратим односвязную область эллипса в двухсвязную. Этот разрез можно рассматривать как эллипс, малая полуось которого равна нулю. Полученная двухсвязная область эллипса отображается с помощью функции

$$z = R \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad (\zeta = re^{i\theta}) \quad (1.12)$$

на кольцо в плоскости ζ с внутренним радиусом $\rho=1$ и внешним $\rho=\rho_0>1$. R и ρ_0 имеют значения

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad (1.13)$$

где a и b — полуоси эллипса.

Пользуясь условием (1.10) и имея в виду, что точкам $\zeta=e^{i\theta}$ и $\zeta=e^{-i\theta}$ соответствует одна и та же точка на отрезке, соединяющем фокусы эллипса, получим следующие выражения для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [1]:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right), \quad (1.14)$$

$$\psi(z) = \psi_1(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\zeta^k - \frac{1}{\zeta^{k+2}} \right), \quad (1.15)$$

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{\rho_0 A_{-1}}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}, \quad (1.16)$$

$$a_k = \frac{k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})c_k - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})\bar{c}_k}{k^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})^2 - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2}, \quad k=(2, 3, \dots), \quad (1.17)$$

$$b_k = A_k \rho_0^{-k} - (k+2)\rho_0^2 a_{k+2} + \rho_0^{-2(k+2)} \bar{a}_{k+2} - k\rho_0^{-2} a_k - \\ - \rho_0^{-2k} \bar{a}_k, \quad k=(0, 1, 2, \dots), \quad (1.18)$$

$$c_0 = 0, \quad c_{2k} = \sum_{n=0}^{k-1} [A_{2n} \rho_0^{-2n} + A_{2(n+1)} \rho_0^{2(n+1)}], \quad (1.19) \\ k=(1, 2, \dots),$$

$$c_{2k+1} = \rho_0 A_{-1} + \sum_{n=1}^k [A_{2n-1} \rho_0^{-2n+1} + A_{-2n-1} \rho_0^{2n+1}], \quad (1.20) \\ (k=1, 2, \dots).$$

Постоянные A_k являются коэффициентами разложения в комплексный ряд Фурье функции

$$(f_1 - if_2)(1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (1.21)$$

Заменяя в (1.21) выражение $f_1 - if_2$ через $\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s$, получим:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s (1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (1.22)$$

Формулами (1.14)–(1.21) определяются функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для плоской задачи сплошного эллипса при заданных на контуре внешних силах. Формулы (1.14)–(1.20) и (1.22) определяют функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для задачи об изгибе эллиптической плиты, защемленной по всему контуру при действии произвольной нагрузки. Выражения для $\chi(z)$ определяем согласно (1.11), (1.12) и (1.15)

$$\chi(z) = \chi_1(\zeta) = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k-1}}{k} \left(\zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) + C. \quad (1.23)$$

Мнимую часть постоянной C можно выбрать произвольно, в частности принять равной нулю. Тогда, внося (1.14) и (1.23) в (1.8), получим:

$$C = -\frac{1}{2} \Pi[f_s] - \operatorname{Re}_1(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}),$$

или, имея в виду (1.16), получим:

$$C = -\frac{1}{2} \Pi[f_s] - \frac{R \rho_0 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} A_{-1}. \quad (1.24)$$

Переходим к решению конкретных задач.

§ 2. Эллиптическая плита, защемленная по контуру под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади эллипса, конфокальной с данной

При решении этой задачи мы пользуемся результатами предыдущего параграфа, а также другими результатами, полученными в работе [2].

Внося (1.3) в (1.2), получим:

$$w = f(z, \bar{z}) + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.1)$$

где, согласно [3], для замкнутой области нагруженного эллипса

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\rho z^2 \bar{z}^2}{64D} - \frac{\rho}{32D} \left[\frac{m}{3} (\bar{z} z^3 + z \bar{z}^3) - \frac{2R^2(1-m^2)}{m} z \bar{z} - \frac{m^2}{12} (z^4 + \bar{z}^4) - R^2 (1-m^2) (z^2 + \bar{z}^2) + \frac{R^2 (1-m^2)(5+m)}{2m^3} \right], \quad (2.2)$$

а для ненагруженной области плиты

$$f(z, \bar{z}) = f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \mu \left[\left(m \zeta \bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta \bar{\zeta}} + m \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} + m \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{1+m^2}{2} \right) \ln(\zeta \bar{\zeta}) + \frac{m}{6} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta^3} + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}^3} + \frac{1}{\zeta^3 \bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta}^3 \zeta} \right) + \frac{3m}{2} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} + \frac{2}{\zeta \bar{\zeta}} \right) - \frac{1+m^2}{24} \left(\frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\bar{\zeta}^4} \right) + \frac{1+m^2}{3} \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2} \right) \right], \quad (2.3)$$

где

$$m = \frac{a^0 - b^0}{a^0 + b^0}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(a^0)^2 - (b^0)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (2.4)$$

$$\mu = \frac{\rho R^4 (1 - m^2)}{16 m^2 D},$$

a^0 и b^0 — полуоси нагруженного эллипса.

Полагая в (2.3) $\zeta = \rho_0 e^{i\theta}$, найдем значение функции f на контуре плиты:

$$\begin{aligned} f_s = \mu \left\{ \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{1+m^2}{2} \right] \ln(m\rho_0) + \right. \\ \left. + \frac{m}{6} [\rho_0^{-4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - \rho_0^{-2} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta})] + \frac{3m}{2} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\rho_0^{-2}) - \right. \\ \left. - \frac{1+m^2}{24} \rho_0^{-4} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + \frac{1+m^2}{3} \rho_0^{-2} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \right\}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Из (2.5) получим:

$$\Pi[f_s] = \mu \left\{ \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} \right] \ln(m\rho_0^2) + 3m\rho_0^{-2} \right\}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.3) имеем:

$$\begin{aligned} (1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \frac{\mu}{R\rho_0} \left\{ m (\rho_0^2 e^{-i\theta} - \rho_0^{-2} e^{-i\theta} + e^{i\theta} - e^{-3i\theta}) \ln(m\rho_0^2) + \right. \\ \left. + \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-3i\theta} + \frac{1+m^2}{2} e^{-i\theta} \right] - \frac{m}{6} (3\rho_0^{-2} e^{-5i\theta} + \right. \\ \left. + 3\rho_0^{-4} e^{-3i\theta} + \rho_0^{-4} e^{i\theta}) + \frac{1+m^2}{6} \rho_0^{-4} e^{-5i\theta} - \frac{3m}{2} (e^{-3i\theta} + 2\rho_0^{-2} e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Сопоставляя (2.7) с (1.22), определим коэффициенты A_k :

$$A_1 = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left[m \ln(m\rho_0^2) + \frac{5m}{2} - \frac{m}{6} \rho_0^{-4} \right], \quad A_3 = -\frac{\mu m}{6R} \rho_0^{-3},$$

$$A_{-1} = -\frac{\mu}{R\rho_0} [m (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) - 3m - 3m\rho_0^{-2}],$$

$$A_{-3} = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left[-m \ln(m\rho_0^2) - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \rho_0^{-4} - \frac{2(1+m^2)}{3} \rho_0^{-2} \right],$$

$$A_{-5} = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left(-\frac{m}{2} \rho_0^{-2} + \frac{1+m^2}{6} \rho_0^{-4} \right).$$

Остальные коэффициенты $A_k = 0$.

Подставляя значения A_k в (1.19) и (1.20), получим:

$$c_3 = -\frac{\mu}{2R (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} (3m\rho_0^3 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}).$$

Остальные коэффициенты $c_k = 0$.

Внеся значения A_k и c_3 в (1.16) и (1.17), определим a_k :

$$a_1 = -\frac{\mu}{2R(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left[m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} - 3m\rho_0^{-2} \right], \quad a_2 = -\frac{\mu}{6R} \frac{3m\rho_0^2 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})}.$$

Остальные коэффициенты $a_k = 0$.

Подставляя значения A_1 , A_2 , a_1 и a_2 в (1.18), определим b_k :

$$b_1 = -\frac{2\mu}{3R} \frac{8m - \rho_0^{-2}(3 + \rho_0^{-4})(1 + m^2)}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})}, \quad b_2 = -\frac{b_1}{4}.$$

Остальные коэффициенты $b_k = 0$.

Внеся (2.6) и значение коэффициента A_{-1} в (1.24), определим C :

$$C = -\frac{\mu}{4} \left[(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \frac{8m - 2m(\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) - (1 + m^2)(\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right].$$

Подставляя значения a_k , b_k и C в (1.14) и (1.23), определим функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = -\frac{\mu}{2R(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left[m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} - 3m\rho_0^{-2} \right] \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\mu}{6R} \frac{3m\rho_0^2 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})} \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3} \right), \quad (2.8)$$

$$\chi(z) = \chi_1(\zeta) = -\frac{\mu}{4} \left[(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \frac{8m - 2m(\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) - (1 + m^2)(\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right] - \frac{\mu}{24} \frac{8m - \rho_0^{-2}(3 + \rho_0^{-4})(1 + m^2)}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})} \left[8 \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) - \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4} \right) \right]. \quad (2.9)$$

Внеся (2.8) и (2.9) в (2.1), определим прогиб w . В частности, для центра плиты ($z=0$, $\zeta = \pm i$) получим:

$$w_0 = \frac{\rho R^4(1 - m^2)}{64 m^2 D} \left\{ -2(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \frac{1}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4}} [4m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(\rho_0^4 + 1 + \rho_0^{-4}) - (3\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) + m^2(\rho_0^4 + 3\rho_0^{-4}) - 8(1 - m^2)] \right\}. \quad (2.10)$$

При $a^0 = a$ и $b^0 = b$, т. е. когда нагрузка равномерно распределена по всей площади плиты, из (2.10) получим:

$$w_0 = \frac{\rho a^4 b^4}{8D(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)},$$

что совпадает с известным результатом.

§ 3. Эллиптическая плита, защемленная по всему контуру под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, центр которого совпадает с центром эллипса

Для рассматриваемой частичной нагрузки общее выражение прогиба можно представить так [3]:

$$w = f(z, z) + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (3.1)$$

где для замкнутой нагруженной области круга

$$f = \frac{Pr_0^2}{16D} \left[2 \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + z\bar{z} - \frac{5}{4} r_0^2 \right], \quad (3.2)$$

а для ненагруженной замкнутой области плиты

$$f = \frac{P}{16\pi D} \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z\bar{z}, \quad (3.3)$$

где p — интенсивность равномерной нагрузки, r_0 — радиус нагруженного круга, $P = \pi r_0^2 p$ — равнодействующая нагрузки.

Согласно (1.12) и (3.3) на контуре имеем:

$$f_s = \frac{P}{16\pi D} \left[R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln [R^2 (\rho_0 e^{i\theta} + \rho_0^{-1} e^{-i\theta}) (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta})].$$

Полагая $\rho_0 > 1$, разложим f_s в ряд Фурье:

$$f_s = \frac{P}{16\pi D} \left[R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \left\{ 2 \ln(R\rho_0) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2ik\theta} + e^{-2ik\theta}}{k\rho_0^{2k}} \right\}.$$

Постоянный член этого ряда будет:

$$\Pi[f_s] = \frac{P}{16\pi D} [r_0^2 \ln(R\rho_0) + 2R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) \ln(R\rho_0) + 2R^2 \rho_0^{-2}]. \quad (3.4)$$

Из (3.3) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{P}{16\pi D} \left(z + \bar{z} \ln z \bar{z} + \frac{r_0^2}{2z} \right).$$

Подставляя вместо z выражение (1.12) и разлагая в ряд Фурье полученный результат на контуре, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \frac{P}{16\pi D} \left\{ R (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta}) + R (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta}) [2 \ln(R\rho_0) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2ik\theta} + e^{-2ik\theta}}{k\rho_0^{2k}}] + \frac{r_0^2}{2R\rho_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-i(2k+1)\theta}}{\rho_0^{2k}} \right\}. \quad (3.5)$$

Внеся (3.5) в (1.22) и сравнивая коэффициенты при e^{ikz} , получим:

$$A_{2k} = 0, (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$A_1 = -\lambda \{ 2 [1 + \ln(R\rho_0)] - \rho_0^{-4} \},$$

$$A_{-1} = -\lambda \left\{ (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) [1 + 2 \ln(R\rho_0)] + \frac{r_0^2}{2R^2} \right\},$$

$$A_{-3} = \lambda \left[2 \ln(R\rho_0) + \frac{3}{2} \rho_0^{-4} + \frac{r_0^2}{R^2 \rho_0^2} \right],$$

$$A_{2k-1} = -\lambda \frac{(-1)^k}{(k^2-1)\rho_0^{2k}} \left[\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \frac{1}{k} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \right],$$

$$(k=2, 3, \dots),$$

$$A_{-2k-1} = \lambda \left\{ \frac{(-1)^k}{(k^2-1)\rho_0^{2k}} \left[\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + \frac{2k^2-1}{k} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \right] - \frac{(-1)^k r_0^2}{R \rho_0^{2k-1}} \right\}, (k=2, 3, \dots),$$

3.6

где

$$\lambda = \frac{PR}{16\pi \cdot D \rho_0}.$$

Подставляя значения A_k в (1.19) и (1.20), получим:

$$c_{2k} = 0, (k=1, 2, \dots),$$

$$c_{2k+1} = \frac{PR}{16\pi D} \left\{ -\rho_0^2 + \frac{1}{2\rho_0^2} + \frac{1}{2\rho_0^6} + \sum_{n=2}^k (-1)^n \left[\rho_0^2 \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \rho_0^{-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n(n-1)\rho_0^{4n-4}} - \frac{1}{n(n+1)\rho_0^{4n+2}} \right] \right\} - \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \left[1 + 2 \sum_{n=2}^k (-1)^n \right],$$

или, имея в виду, что

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{n=2}^k (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^k}{k+1},$$

$$\sum_{n=2}^k (-1)^n \left[\frac{1}{n(n-1)\rho_0^{4n-2}} + \frac{1}{n(n+1)\rho_0^{4n+2}} \right] = \frac{1}{2\rho_0^6} + \frac{(-1)^k}{k(k+1)\rho_0^{4k+2}},$$

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n = -\frac{1-(-1)^k}{2}.$$

получим:

$$c_{2k+1} = \frac{PR}{16\pi D} (-1)^k \left[\frac{\rho_0^2}{k} - \frac{1}{(k+1)\rho_0^2} - \frac{1}{k(k+1)\rho_0^{4k+2}} \right] - (-1)^k \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \quad (3.7)$$

Внося значение A_{-1} из (3.6) в (1.16), определим a_1 :

$$a_1 = -\frac{PR}{32\pi D} [1 + 2\ln(R\rho_0)] - \frac{Pr_0^2}{64\pi DR} \frac{1}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \quad (3.8)$$

Из (1.17) и (1.18), имея в виду (3.6) и (3.7), получим:

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{PR}{16\pi D} \frac{\rho_0^2(k+1) - \rho_0^{-2}k - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} - \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}, \quad (k=1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

$$b_{2k-1} = -\frac{PR}{4\pi D} \frac{(-1)^k k (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} + \frac{Pr_0^2 (-1)^k}{32\pi DR} \left[\frac{(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} - \frac{(2k-1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k+2}}{(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}} \right], \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Из (1.24), (3.4) и (3.6) имеем

$$C = \frac{PR^2}{32\pi D} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \left[2\ln(R\rho_0) - \frac{\rho_0^2 + \rho_0^{-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right] \quad (3.11)$$

Внося (3.8)–(3.11) в (1.14) и (1.23), определим функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = -\frac{PR}{64\pi D} \left\{ 2[1 + 2\ln(R\rho_0)] + \frac{r_0^2}{R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \right\} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{PR}{32\pi D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \left[2 \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1)} - \frac{r_0^2}{R^2} \right] \left(\zeta^{2k+1} + \frac{1}{\zeta^{2k+1}} \right). \quad (3.12)$$

$$\chi(z) = \chi_1(\zeta) = \frac{PR^2}{64\pi D} \left[2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - \frac{2r_0^2}{R^2} \ln(R\rho_0) + \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\rho_0^2 + \rho_0^{-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right] - \frac{PR^2}{64\pi D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left[\frac{r_0^2}{R^2} \frac{(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} - \frac{r_0^2}{2} \frac{(2k-1)\rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}}{(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}} \right]$$

$$-\frac{8k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)\left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} \left[\zeta^{2k} + \frac{1}{\zeta^{2k}} \right] \cdot (3.13)$$

Подставив (3.12) и (3.13) в (3.1) и заменив $z\bar{z}$ через r^2 , а ζ через $\rho e^{i\theta}$, найдем выражение прогиба:

в замкнутой области нагруженного круга

$$w = \frac{Pr^2}{64D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2\left(r^2 + \frac{r_0^2}{2}\right) \ln\left(\frac{r}{R\rho_0}\right) - \frac{5}{4} r_0^2 + R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left(\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] + \Phi, \quad (3.14)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln\left(\frac{r}{R\rho_0}\right) + \frac{P}{16\pi D} \left[R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left(\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \frac{r^2}{R^2} \right) - r^2 \right] + \Phi, \quad (3.15)$$

где

$$\Phi = \frac{PR^2}{16\pi D} \sum_1 (-1)^k \left\{ 2 \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1) \left[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2} \right]} - \right. \\ \left. - \frac{r_0^2}{R^2} \frac{1}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \right\} \left[(\rho^{2k+2} + \rho^{-2k-2}) \cos 2k\theta + \right. \\ \left. + (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos(2k+2)\theta \right] - \\ - \frac{PR^2}{32\pi D} \sum_1 (-1)^k \left\{ \frac{8(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)\left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} - \right. \\ \left. - \frac{r_0^2}{R^2} \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{k \left[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2} \right]} + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{R} \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{k \left[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2} \right]} \right\} (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos 2k\theta. \quad (3.16)$$

Полученные ряды сходятся при $\rho_0 > 1$.

Приняв в (3.14), (3.15) и (3.16) радиус нагруженного круга $r_0 = 0$ и $P = \pi r_0^2 p = \text{const}$, получим выражение прогиба защемленной эллиптической плиты, нагруженной в центре силой P :

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(ab - r^2 + 2r^2 \ln \frac{2r}{a+b} \right) + \\ + \frac{P(a^2 - b^2)}{64\pi D} \sum_1 (-1)^k \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} \left[(\rho^{2k+2} + \right.$$

$$+ \rho^{-2k-2}) \cos 2k\theta + (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos (2k+2)\theta] - \\ - \frac{Pab}{4\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos 2k\theta}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)}. \quad (3.17)$$

Задачу об изгибе защемленной по контуру эллиптической плиты, нагруженной в центре, исследовал Л. С. Лейбензон [3], применив ортогональные эллиптические координаты. Решение представлено им в виде рядов, коэффициенты которых определяются из линейного алгебраического уравнения, связывающего последующий коэффициент с предыдущим.

Из найденного решения (3.14) и (3.15) можно с любой точностью определить расчетные величины плиты. Приведем некоторые результаты, имеющие практическое значение.

Определение максимального прогиба. Максимальный прогиб получается в центре плиты $(r=0, \rho=1, \theta=\pm \frac{\pi}{2})$ и, согласно (3.14) и (3.16), равен

$$w_0 = \frac{P}{16\pi D} \left(ab - \frac{5r_0^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4ab} r_0^2 + r_0^2 \ln \frac{2r_0}{a+b} \right) - \\ - \frac{Pab}{2\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} - \\ - \frac{Pr_0^2(a^2-b^2)}{64\pi abD} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(2k+1) \rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} - \right. \\ \left. - \frac{(2k-1) \rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.18)$$

Полагая $r_0=0$, получим значение максимального прогиба при действии сосредоточенной силы P в центре эллипса:

$$w_0 = \frac{Pab}{16\pi D} \left[1 - \right. \\ \left. - 8 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} \right]. \quad (3.19)$$

Заменяв верхний предел последнего ряда конечным числом (n), получим значение прогиба с избытком (w_0^+). Чтобы получить значение прогиба с недостатком (w_0^-), пользуемся оценкой

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} < \\ \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_0^{8k-4}} = \frac{1}{\rho_0^{8n-4}(\rho_0^8 - 1)}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.20)$$

Согласно (3.19) и (3.20)

$$w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{8n-4}(\rho_0^8 - 1)}, \quad (3.21)$$

Погрешность в процентах приближенного значения w_0^+ по сравнению с точным значением максимального прогиба меньше, чем

$$\delta = \frac{w_0^+ - w_0^-}{w_0^+} 100.$$

Учитывая первый член ряда в (3.19), получим:

$$w_0^+ = \frac{Pab}{16\pi D} \frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{3(a^4 + b^4) + 2a^2b^2}. \quad (3.22)$$

Тогда, приняв в (3.21) $n = 1$, определим погрешность

$$\delta = \frac{800}{\rho_0^4(\rho_0^8 - 1) \left[1 - \frac{4}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4}} - \frac{8}{\rho_0^4(\rho_0^8 - 1)} \right]},$$

некоторые значения которой приведены в таблице 1.

Таблица 1

$a:b$	1	1,5	2	3
$\delta\%$	0	0,06	1,6	35

Из таблицы 1 видно, что для отношений $a:b \leq 2$ с достаточной точностью можно (3.22) принять за выражение максимального прогиба. Формула (3.22) другим путем получена Л. С. Лейбензоном [3]. Мы здесь установили пределы применения этой формулы.

Учитывая также второй член ряда в (3.19), т. е. полагая $n = 2$, получим:

$$w_0^+ = \frac{Pab}{16\pi D} \left[1 - \frac{4}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-2}} \left(1 + \frac{2}{6 + \rho_0^8 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4} + \rho_0^{-8}} \right) \right], \quad (3.23)$$

$$w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{12}(\rho_0^8 - 1)}.$$

При $a:b = 2,5$ $\delta = 0,3\%$, а при $a:b = 3$ $\delta = 1,8\%$.

Если представить максимальный прогиб в виде

$$w_0 = w_0^+ = \alpha \frac{Pb^2}{16\pi D}.$$

то, согласно (3.22) и (3.23), для α получим следующие значения (см. табл. 2):

Таблица 2

$a:b$	1	1,5	2	2,5	3
α	1	1,2934	1,3898	1,4110	1,4339

Определим из (3.18) значение максимального прогиба с избытком (w_0^+) и с недостатком (w_0^-) для случая нагрузки, равномерно-распределенной по площади круга. Все члены первого ряда в (3.18) положительны, а второго ряда будут положительны при условии $\rho_0 \geq 1,25$ ($a:b \leq 4,6$). При этом условии, заменив в (3.18) верхние пределы рядов конечными числами, получим значение прогиба с избытком (w_0^+). Для определения из (3.18) значение прогиба с недостатком (w_0^-) пользуемся оценкой (3.20) и

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(2k+1)\rho_0^6 - \rho_0^{-4k-2}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} - \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] < \\ < \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\rho_0^{4k-2}} = \frac{2}{\rho_0^{4m-2}(\rho_0^4 - 1)} + \rho_0^2 \ln \frac{\rho_0^4}{\rho_0^4 - 1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\rho_0^{4k-1}}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{8m-4}(\rho_0^8 - 1)} - \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \frac{a^2 - b^2}{ab} \left[\frac{2}{\rho_0^{4m-2}(\rho_0^4 - 1)} + \right. \\ \left. + \rho_0^2 \ln \frac{\rho_0^4}{\rho_0^4 - 1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\rho_0^{4k-2}} \right]. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Учитывая в (3.18) первый член первого ряда и первые два члена второго ряда, полагая при этом $a:b = 2$, получим:

$$w_0^+ = 0,08686 \frac{Pb^2}{\pi D} - 0,05474 \frac{Pr_0^2}{\pi D} - 0,06250 \frac{Pr_0^2}{\pi D} \ln \frac{b}{r_0},$$

а из (3.25) имеем

$$w_0^- = 0,08547 \frac{Pb^2}{\pi D} - 0,05499 \frac{Pr_0^2}{\pi D} - 0,06250 \frac{Pr_0^2}{\pi D} \ln \frac{b}{r_0}.$$

Погрешность в процентах

$$\delta = \frac{0,139 + 0,025 \frac{r_0^2}{b^2}}{0,085 - 0,055 \frac{r_0^2}{b^2} - 0,063 \frac{r_0^2}{b^2} \ln \frac{b}{r_0}}$$

Радиус нагруженного круга принимает значения $0 \leq r_0 \leq b$, причем $r_0 = 0$ соответствует случаю сосредоточенной силы, приложенной в центре эллипса. Некоторые значения погрешности приведены в таблице 3.

Таблица 3

$r_0 : b$	0	0,2	0,4	0,5	0,8	1
$\delta\%$	1,6	1,8	2,1	2,7	3,5	5,5

Заметим, что для отношений $a:b < 2$ погрешность уменьшается и обращается в нуль при $a:b = 1$.

Определение контурного максимального изгибающего момента. Изгибающий момент на защемленном контуре определяется формулой

$$M = -D \nabla^2 w. \quad (3.26)$$

Максимальное значение момента получается на концах малого диаметра. Для этих точек ($z = \pm ib$, $\xi = \pm i\rho_0$), имея в виду (1.12), (3.1), (3.3) и (3.12), из (3.26) получим:

$$\begin{aligned} M_{\max} = & -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{R\rho_0} - \frac{r_0^2}{2ab} \right) - \frac{P}{2\pi (\rho_0^2 + 1) (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \times \\ & \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} + \\ & + \frac{r_0^2}{4\pi ab (\rho_0^2 + 1)} \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k})}{k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Эти ряды сходятся при $\rho_0 > 1$.

Приняв в (3.27) $r_0 = 0$ получим значение контурного максимального момента при действии сосредоточенной силы P в центре эллипса:

$$\begin{aligned} M_{\max} = & -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{R\rho_0} \right) - \frac{P(a^2 - b^2)(a - b)}{16\pi a^2 b} \times \\ & \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Заменив верхний предел этого ряда конечным числом (n), получим значение момента с недостатком ($M_{\max}^-$). Далее, пользуясь оценкой

$$\begin{aligned} \rho_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1)(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1})[(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} &\ll \\ < \rho_0 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\rho_0^{2k-3}} = \frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2 - 1)} - \sum_1^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

получим из (3.28) значение момента с избытком ($M_{\max}^+$):

$$\begin{aligned} M_{\max}^+ = M_{\max}^- - \frac{P(a+b)(a-b)^2}{16\pi a^2 b} \left[\frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2 - 1)} - \right. \\ \left. - \sum_1^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Найдем значение максимального момента для отношения $a:b=2$. Приняв в (3.28) и (3.30) $n=3$, получим:

$$M_{\max}^- = -0.45028 \frac{P}{\pi}, \quad M_{\max}^+ = -0.46769 \frac{P}{\pi}.$$

Погрешность равна 4%.

Приняв $n=4$, получим:

$$M_{\max}^- = -0.45976 \frac{P}{\pi}, \quad M_{\max}^+ = -0.46545 \frac{P}{\pi}.$$

Погрешность равна 1,2%.

Таким образом, при $a:b=2$ можно принять

$$M_{\max} = -0.46545 \frac{P}{\pi}.$$

Определим теперь значение контурного максимального момента при действии нагрузки, равномерно-распределенной по площади круга. Пользуясь равенством

$$\sum_1^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} = \frac{\rho_0(3\rho_0^2 - 1)}{(\rho_0^2 - 1)^2},$$

выражение (3.27) приводим к виду

$$M_{\max} = -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{2b}{a+b} - \frac{r_0^2}{2ab} \right) + \frac{Pr_0^2}{4\pi ab} \frac{3\rho_0^4 - \rho_0^2}{(\rho_0^2 + 1)(\rho_0^2 - 1)^2} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{P}{2\pi(\rho_0^2 + 1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1)(\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k})[(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1)\left(k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} - \frac{Pr_0^2}{4\pi ab(\rho_0^2 + 1)} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} (2k+1) \left[\frac{1}{\rho_0^{2k-2}} - \frac{\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Ограничиваясь конечным числом членов рядов в (3.31), получим значение момента с недостатком ($M_{\max}^-$).

Для получения же значения изгибающего момента с избытком ($M_{\max}^+$) используем оценку (3.29), а также

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=m+1}^{\infty} (2k+1) \left[\frac{1}{\rho_0^{2k-1}} - \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] = \\
 & = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} \left[1 - \frac{\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2}}{2k+1 + \rho_0^{4k} + \rho_0^{4k-4} + \dots + \rho_0^{-4k}} \right] \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} \left[1 - \right. \\
 & \left. - \frac{\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2}}{(2k+1)(\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2})} \right] = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k}{\rho_0^{2k-1}} = \frac{2[(m+1)\rho_0^2 - m]}{\rho_0^{2m-1}(\rho_0^2 - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда из (3.31) получим:

$$\begin{aligned}
 M_{\max}^+ = M_{\max}^- - \frac{P}{2\pi(\rho_0^2 + 1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} & \left[\frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2 - 1)} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} \right] - \frac{Pr_0^2}{2\pi ab(\rho_0^2 + 1)} \frac{(m+1)\rho_0^2 - m}{\rho_0^{2m-1}(\rho_0^2 - 1)^2}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Для случая $a=2b$ берем $n=m=4$. Тогда из (3.31) получим:

$$M_{\max}^- = -\frac{P}{\pi} \left(0.4596 - 0.2109 \frac{r_0^2}{b^2} \right).$$

Согласно (3.32) найдем погрешность в процентах

$$\delta = \frac{|M_{\max}^-| - |M_{\max}^+|}{|M_{\max}^-|} 100 = \frac{0.57 + 0.64 \frac{r_0^2}{b^2}}{0.460 - 0.211 \frac{r_0^2}{b^2}}.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 4.

Таблица 4

$r_0 : b$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$2\varphi_0$	1,2	1,3	1,6	2,1	2,0	4,9

Определение максимальной опорной реакции. Максимальная опорная реакция $Q_{\max}$ возникает на концах малого диаметра эллипса и равна перерезывающей силе N_z , действующей в одной из указанных точек $Q_{\max} = N_z(0, b)$.

Перерезывающие силы N_1 , N_2 определяются по формуле

$$N_1 - iN_2 = -8D \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}}, \quad (3.33)$$

Внося сюда значение w из (3.1) и имея в виду (1.12), (3.3) и (3.12), определим N_1 и N_2 . Заменяя в выражении для N_z величины z и $\bar{z}$ через ib и ip_0 , определим $N_z(0, b)$, следовательно и $Q_{\max}$:

$$Q_{\max} = N_z(0, b) = -\frac{P}{2\pi b} + \frac{P}{2\pi R(1+\rho_0^{-2})^3} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)[k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k+3})]}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \left[\frac{r_0^2}{R^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1)} \right]. \quad (3.34)$$

Пользуясь равенством

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{\rho_0^{2k+1}} = \frac{9\rho_0^3 - 2\rho_0 + \rho_0^{-1}}{(\rho_0^2 - 1)^3},$$

можно (3.34) представить в виде

$$Q_{\max} = -\frac{P}{2\pi D} + \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab} \frac{9\rho_0^3 - 2\rho_0 + \rho_0^{-1}}{(1+\rho_0^{-2})^3(\rho_0^2 - 1)^3} - \frac{PR}{\pi(1+\rho_0^{-2})^3 ab} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)[(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left((2k+1) + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} \left[k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + \right. \\ \left. + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-4k-3}) \right] - \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab(1+\rho_0^{-2})^3} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \left[\frac{2k+1}{\rho_0^{2k+1}} - \right. \\ \left. - \frac{k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-3})}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.35)$$

При $\rho_0 > 1$ все члены обоих рядов положительны. Поэтому, ограничиваясь конечными членами этих рядов, получим значение опорной реакции с недостатком ($Q_{\max}^-$). Чтобы найти значение опорной реакции с избытком ($Q_{\max}^+$) используем следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1) [(2k+1) \rho_0^2 - k \rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} [k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + \\ & + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-3})] \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{k \rho_0^{2k-1}} = \\ & = 2 \frac{(2n+3) \rho_0^2 - 2n-1}{\rho_0^{2n-1} (\rho_0^2 - 1)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k+1}{k \rho_0^{2k-1}} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - 1} + \rho_0 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1}, \\ & \sum_{k=m+1}^{\infty} (2k+1) \left[\frac{2k+1}{\rho_0^{2k+1}} - \frac{k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-3})}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] < \\ & \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{\rho_0^{2k+1}} = \frac{1}{\rho_0^2 (\rho_0^2 - 1)^3} [(2m+3)^2 \rho_0^3 + \\ & + (2m+1)^2 \rho_0^{-1} - 2(4m^2 + 8m + 1) \rho_0], \end{aligned}$$

в силу которых из (3.35) имеем

$$\begin{aligned} Q_{\max}^+ &= Q_{\max}^- - \frac{PR}{\pi ab (1 + \rho_0^{-2})^2} \left[2 \frac{(2n+3) \rho_0^2 - 2n-1}{\rho_0^{2n-1} (\rho_0^2 - 1)^2} - \right. \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k \rho_0^{2k-1}} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - 1} + \rho_0 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 1} \Big] - \\ & - \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab (1 + \rho_0^{-2})^3} [(2m+3)^2 \rho_0^3 + (2m+1)^2 \rho_0^{-1} - 2(4m^2 + 8m + 1) \rho_0]. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Для $a:b=2$ примем $n=m=4$, тогда из (3.35) получим:

$$Q_{\max}^- = -1,1788 \frac{P}{\pi b} + 0,2320 \frac{Pr_0^2}{\pi b^2}. \quad (3.37)$$

Погрешность в процентах будет

$$\delta = \frac{1,018 + 2,879 \frac{r_0^2}{b^2}}{1,1788 - 0,2320 \frac{r_0^2}{\pi b^2}}.$$

Числовые значения для δ приведены в таблице 5.

Таблица 5

$r_0:b$	0	1,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\delta\%$	0,9	1,0	1,3	1,9	2,8	4,1

Таблицы 1–5 показывают, что при увеличении радиуса нагруженного круга погрешность увеличивается.

§ 4. Эллиптическая плита, защемленная по контуру при нагрузке, равномерно-распределенной по длине большого диаметра

Уравнение упругой поверхности можно представить [3] в виде

$$w = f(z, \bar{z}) + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + X(z) + \bar{X}(\bar{z}), \quad (4.1)$$

причем

$$f = \frac{iq}{96D} (z - \bar{z})^3, \text{ при } y > 0,$$

$$f = -\frac{iq}{96D} (z - \bar{z})^3, \text{ при } y \leq 0, \quad (4.2)$$

где q — нагрузка, действующая на единицу длины большого диаметра.

Из (4.2) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{iq}{32D} (z - \bar{z})^2, \text{ при } y > 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{iq}{32D} (z - \bar{z})^2, \text{ при } y \leq 0.$$

Внеся (1.12) в (4.2) и полагая $\zeta = \rho_0 e^{i\theta}$, определим контурные значения для f и $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$f_s = \begin{cases} \frac{iqR^3}{96D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^3 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\frac{iqR^3}{96D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^3 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3, & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \begin{cases} \frac{iqR^2}{32D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\frac{iqR^2}{32D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2, & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Разложив функции f_s и $-(1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s$ в интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$ в комплексные ряды Фурье, будем иметь

$$i_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{k i \theta},$$

$$-(1 - \rho_0^{-2} - e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{k i \theta},$$

где

$$B_0 = \Pi[i_s] = \frac{qb^3}{9\pi D}, \quad (4.6)$$

$$A_{2k-1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \frac{1}{4k^2-1} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right), \quad (4.7)$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$A_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Подставив (4.7) в (1.19) и (1.20), определим коэффициенты c_k :

$$c_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$c_{2k+1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \left\{ \frac{1}{3} (\rho_0 + \rho_0^{-1}) + \sum_{n=1}^k \left[\frac{\rho_0^{-2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n+3} \right) - \frac{\rho_0^{2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n-3} \right) \right] \right\}.$$

Пользуясь равенствами

$$\sum_{n=1}^k \frac{\rho_0^{-2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n+3} \right) = -\frac{\rho_0^{-1}}{3} - \frac{\rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3)},$$

$$\sum_{n=1}^k \frac{\rho_0^{2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n-3} \right) = \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0^{2k+1}}{(4k^2-1)(2k+3)},$$

из предыдущего получим

$$c_{2k+1} = \frac{qb^3}{2\pi D} \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3)}, \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.8)$$

Внеся (4.8) в (1.16) и (1.17), получим

$$a_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$a_{2k+1} = \frac{qb^3}{2\pi D} \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3) [(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]}, \quad (4.9)$$

$$(k = 0, 1, \dots).$$

Подставляя (4.7) и (4.9) в (1.18), определим b_k :

$$b_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$b_{2k-1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} + \frac{\rho_0^{-1}}{2k+3} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k+1) \rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} + \\
& + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k-1) \rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} \Big\}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

($k = 1, 2, \dots$).

Внеся (4.6) и значения Λ_{-1} из (4.7) в (1.24), получим

$$C = \frac{qb^3}{36\pi D} \frac{\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-2}}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2}. \quad (4.11)$$

Подставив (4.9)–(4.11) в (1.14) и (1.23), определим значения функций $\varphi(z) = \varphi_1(\zeta)$ и $\chi(z) = \chi_1(\zeta)$:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{qb^3}{2\pi D} \sum_0^\infty \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) (\zeta^{2k+1} + \zeta^{-2k-1})}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]}. \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\chi_1(\zeta) = & \frac{qb^3}{36\pi D} \frac{\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-4}}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2} - \frac{qb^2 R}{4\pi D} \sum_1^\infty \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1) \rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \right. \\
& + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k-1) \rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} + \\
& \left. + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k+1) \rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \right\} \left(\zeta^{2k} + \frac{1}{\zeta^{2k}} \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Внеся (4.12) и (4.13) в (4.1) и заменив ζ через $\rho e^{i\theta}$, а z через $x + iy$, определим прогиб:

при $y \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\begin{aligned}
w = & \frac{qy^3}{12D} + \frac{qb^3}{18\pi D} \frac{(\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-4})}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2} + \frac{qb^2 R}{\pi D} \times \\
& \times \sum_0^\infty \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(\rho_0^{2k} + \rho_0^{-2k}) \cos 2k\theta + (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k-2}) \cos (2k+2)\theta]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} - \\
& - \frac{qb^2 R}{2\pi D} \sum_1^\infty \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1) \rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \right. \\
& + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k+1) \rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} + \\
& \left. + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k-1) \rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} \right\} (\rho_0^{2k} + \\
& + \rho_0^{-2k}) \cos 2k\theta. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Отсюда, приняв $y=0$, $\rho=1$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$, получим значение прогиба для центра плиты:

$$w_0 = \frac{qb^3(\rho_0^2+4+\rho_0^{-2})}{18\pi D(\rho_0-\rho_0^{-1})^2} - \frac{qb^2R}{\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \frac{(\rho_0^{2k+1}+\rho_0^{-2k-1})[(2k+1)\rho_0^2-\rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} + \frac{(\rho_0^{2k-1}+\rho_0^{-2k+1})[(2k-1)\rho_0^{-2}+\rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k-2}-\rho_0^{-4k+2}]} \right\}. \quad (4.15)$$

Приняв $a=b$, получим значение прогиба центра круглой плиты:

$$w_0 = \frac{qb^3}{18\pi D} = 0,05556 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

При $a=2b$ из (4.15) имеем

$$w_0 = \frac{11qb^3}{36\pi D} - \frac{3qb^3}{2\pi D} (0,12090 + 0,00913 - 0,00057 + \dots).$$

Ограничиваясь первыми двумя членами последнего ряда, получим значение прогиба с недостатком

$$w_0^- = 0,11051 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

Учитывая третий член ряда, получим значение прогиба с избытком

$$w_0^+ = 0,11137 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

Погрешность равна 0,8%.

Таким образом, при $a \leq 2b$ можно ограничиваться первыми двумя членами ряда (4.15).

Согласно формуле (3.26) определим контурный изгибающий момент:

$$M = -\frac{qy}{2} - \frac{4qb^2}{\pi R} \frac{1}{1+\rho_0^{-4}-2\rho_0^{-2}\cos 2\theta} \times \\ \times \sum_0^{\infty} \frac{\rho_0^{2k+1}+\rho_0^{-2k-1}}{(2k-1)(2k+3)[(2k+3)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} \left[(\rho_0^{2k} + \right. \\ \left. + \rho_0^{-2k-4}) \cos 2k\theta - (\rho_0^{2k-2} + \rho_0^{-2k-2}) \cos (2k+2)\theta \right]. \quad (4.16)$$

Приняв $y=b$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$ получим значение максимального момента

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} - \frac{4qb^2\rho_0^3}{\pi R(\rho_0^2+1)} \times$$

$$\times \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(\rho_0^{2k} + \rho_0^{-2k-2})^2}{(2k-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.17)$$

Пользуясь равенством

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+3)} = -\frac{1}{2},$$

представим значение момента в следующем виде

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} + \frac{2qb^2}{\pi a} + \frac{4qb^2}{\pi a} \times \\ \times \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-4k-2}}{(2k-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.18)$$

Последний ряд сходится быстрее, чем ряд (4.17).

Для круглой плиты (4.18) дает

$$M_{\max} = -\frac{qb(3\pi-8)}{6\pi},$$

а для бесконечной полосы

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} - \frac{2qb}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(4k^2-1)(2k+3)};$$

но, так как

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(4k^2-1)(2k+3)} = -\frac{\pi}{8},$$

то

$$M_{\max} = -\frac{qb}{4},$$

что согласуется с известным результатом.

Для отношений $a:b \leq 2$ можно ограничиться первыми двумя членами ряда (4.18), что даст значение момента с избытком

$$M_{\max}^+ = -\frac{qb}{2} + \frac{2qb^2}{\pi a} - \frac{4qb^2}{\pi a} \left[\frac{\rho_0^2 - 2 - 3\rho_0^{-2}}{6(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} + \right. \\ \left. + \frac{3(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-6}}{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(\rho_0^4 + 4 + \rho_0^{-4})} \right] \quad (4.19)$$

Значение момента с недостатком можно получить, учитывая третий член ряда

$$M_{\max}^- = M_{\max}^+ + \frac{4qb^2}{21\pi a} \frac{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-10}}{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{10} - \rho_0^{-10}} \quad (4.20)$$

При $a = 2b$ из (4.19) и (4.20) получим

$$M_{\max}^+ = -0,20327 qb, \quad M_{\max}^- = -0,20193 qb.$$

Погрешность равна $0,7\%$. Таким образом, формулу (4.19) для значений в $a \leq 2b$ можно принять за расчетную.

Определим значение максимальной опорной реакции. Она возникает в точках $y = \pm b$ и по величине равна перерезывающей силе, действующей в одной из этих точек. Поступая как в предыдущей задаче, найдем:

$$Q_{\max} = N_2(0, b) = -\frac{q}{2} + \frac{qb^2(\pi-2)}{\pi a^2} + \frac{4qb^2}{\pi a^2(\rho_0^2+1)} + \frac{8qb^3}{\pi a^2} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-1})-2-2\rho_0^{-4k-2}]}{(2k-1)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} + \frac{8qb^3}{\pi a^2(\rho_0^2+1)} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^2-1+\rho_0^{-4k}-\rho_0^{-4k-2}}{(2k-1)(2k+1)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.21)$$

Для круга ($a=b$) и бесконечной полосы ($a \rightarrow \infty$) ряды, входящие в (4.21), обращаются в нуль; для этих случаев соответственно получим:

$$Q_{\max} = -\frac{4-\pi}{2\pi} q = -0,1366 q, \quad Q_{\max} = -0,5 q.$$

Для других значений отношения $a:b$ достаточно учесть только первые члены указанных рядов. Так, при $a=2b$, получим:

$$Q_{\max} = -0,4045 q,$$

что дает погрешность меньше 1% .

Здесь мы рассмотрели случай нагрузки, равномерно-распределенной по длине большого диаметра эллипса. Аналогичным способом решается и задача об изгибе эллиптической плиты при нагрузке, равномерно-распределенной по длине малого диаметра эллипса. Следует лишь взамен (4.2) пользоваться формулой

$$f(z, \bar{z}) = \begin{cases} \frac{q(z+\bar{z})^2}{96D}, & \text{при } x > 0, \\ -\frac{q(z+\bar{z})^2}{96D}, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 29 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва, 1935.
2. Сапонджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института. № 3, 1948.
3. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных покрытий. Москва, 1915.

Հոգիածուր Ն. Ի. Մոսխոկիկի (ս. մեթոդի օգնությամբ) բաժնի է հա-
տարձր միջոցներով և Կոմիտասի համալսարանի Կոմիտասի թանգարանի
Մանգոստանի մասնաճյուղում և Ն. Կոմիտասի համալսարանի Կոմիտասի
(1) առարձր լուրջ համալսարանի մասին և Կոմիտասի համալսարանի
Փհկայի և Կոմիտասի համալսարանի (2) բնույթը և Կոմիտասի համալսարանի
հրճարի և Կոմիտասի համալսարանի համալսարանի և Կոմիտասի համալսարանի
(3) բնույթը և Կոմիտասի համալսարանի համալսարանի և Կոմիտասի համալսարանի
նկար (հիմնականում) ծանոթացնում է Կոմիտասի համալսարանի համալսարանի

Ա Վ Ս Ս Ս Ս Ս

ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ

Օ. Մ. ՍԱՊԵՆՅԱՆ