ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 5, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, А. Б. Тавадян

Некоторые экстремальные задачи для целых функций

§ 1. Некоторые экстремальные свойства целых функций экспоненциального типа

Обозначим через W_σ класс всех целых функций $f(z)$ экспоненциального типа с показателем $\leqslant \sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Как доказали Палей и Винер [1], класс W_σ совпадает с множеством всех целых функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\varphi(u)du, \tag{2}$$

где $\varphi(u)\in L_2(-\sigma, \sigma)$; при этом по теореме Планшереля

$$\mu(f)=\left\{2\pi\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(u)|^2du\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Пусть

$$a_0,\ a_2, \cdots,\ a_{2p-2};\ a_1,\ a_3, \cdots,\ a_{2q-1}\quad (p\geqslant 1,\ q\geqslant 1)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $W_\sigma\{a_{2p-2}; 0\}$, $(p\geqslant 1)$ все целые функции класса W_σ, для которых

$$f^{(2k)}(0)=a_{2k},\ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ p-1). \tag{4}$$

Аналогично к классу $W_\sigma\{0; a_{2q-1}\}$ $(q\geqslant 1)$ отнесём все целые функции $f(z)$ класса W_σ, для которых

$$f^{(2k+1)}(0)=a_{2k+1},\ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ q-1). \tag{4'}$$

Наконец, к классу $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ $(p\geqslant 1,\ q\geqslant 1)$ отнесем те функции $f(z)$ из W_σ, которые удовлетворяют условиям (4) и (4′) одновременно.

В настоящем параграфе мы дадим параметрическое представление функций определенных выше классов, что даст возможность решить экстремальную задачу: *среди всех функций* $f(z)$, *принадлежащих к любому из классов* $W_\sigma\{a_{2p-2};\ 0\}$; $W_\sigma\{0;\ a_{2q-1}\}$ *или* $W_\sigma\{a_{2p-2};\ a_{2q-1}\}$, *найти функцию, минимизирующую интеграл* $\mu(f)$.

Из этой экстремальной задачи следует необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять числа a_k $(k=0, 1, 2, \cdots)$, для того, чтобы существовала целая функция $f(z)\in W_\sigma$ и такая, что $f^{(k)}(0)=a_k$, $(k=0, 1, 2, \cdots)$.

1. Пусть

$$\hat{X}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \hat{X}_k(x)=\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\cdot\frac{1}{(2k)!!}\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k},\ (k=1, 2, \cdots) \tag{5}$$

нормированные и ортогональные на отрезке $(-1, +1)$ полиномы Лежандра. Известно, что для любой функции $\varphi(x)\in L_2(-1, +1)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-1}^{+1}|\varphi(x)|^2dx=\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2;\quad \alpha_k=\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\hat{X}_k(x)dx. \tag{6}$$

Пусть $\mu_0, \mu_2, \cdots, \mu_{2p-2}$; $\mu_1, \mu_3, \cdots, \mu_{2q-1}$ $(p\geqslant 1,\ q\geqslant 1)$ произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $L_2\{(-1, +1);\ \mu_{2p-2};\ 0\}$ все функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, для которых

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^{2k}dx=\mu_{2k},\quad (k=0, 1, 2, \cdots, p-1). \tag{7}$$

Аналогично к классу $L_2\{(-1, +1);\ 0;\ \mu_{2q-1}\}$ отнесем все функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, для которых

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^{2k+1}dx=\mu_{2k+1},\quad (k=0, 1, 2, \cdots, q-1). \tag{8}$$

Наконец, к классу $L_2\{(-1, +1);\ \mu_{2p-2};\ \mu_{2q-1}\}$ отнесем те функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, которые одновременно удовлетворяют обеим условиям—(7) и (8). Условимся классы $L_2\{(-1, +1);\ \mu_{2p-p};\ 0\}$ и $L_2\{(-1, +1);\ 0;\ \mu_{2q-1}\}$ считать крайними случаями класса $L_2\{(-1, +1);\ \mu_{2p-2};\ \mu_{2q-1}\}$, когда на этот класс не накладываются соответственно условия (7) или (8).

Пусть

$$\hat{X}_{2k}(x)=b_0^{(2k)}+b_2^{(2k)}x^2+\cdots+b_{2k}^{(2k)}x_{2k}$$

и

$$\hat{X}_{2k+1}(x)=b_1^{(2k+1)}x+b_3^{(2k+1)}x^3+\cdots+b_{2k+1}^{(2k+1)}x^{2k+1},$$

так как $\hat{X}_{2k}(x)$ четный, а $\hat{X}_{2k+1}(x)$ нечетный полином.

Лемма 1. Функции $\varphi(x)$ *класса* $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$ *характеризуются тем, что в их разложении в ряд Фурье по полиномам* (5) *коэффициенты* α_{2k} $(k=0, 1, 2, \cdots, p-1)$, α_{2k+1} $(k=0, 1, 2, \cdots, q-1)$, *получаемые из* (6), *вполне определенны и отыскиваются следующим образом:*

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{2k}=b_0^{(2k)}\mu_0+b_2^{(2k)}\mu_2+\cdots+b_{2k}^{(2k)}\mu_{2k}, && (k=0, 1, 2, \cdots, p-1) \\ &\alpha_{2k+1}=b_1^{(2k+1)}\mu_1+b_3^{(2k+1)}\mu_3+\cdots+b_{2k+1}^{(2k+1)}\mu_{2k+1}, && (k=0, 1, 2, \cdots, q-1) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\mu_0, \mu_2, \cdots, \mu_{2k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, p-1)$; $\mu_1, \mu_3, \cdots, \mu_{2k+1}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, q-1)$ *определяются из условий* (7) *и* (8).

Доказательство. В самом деле, $\hat{X}_{2k}(x)$ является четным полиномом и поэтому в силу (7)

$$\alpha_{2k}=\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\hat{X}_{2k}(x)dx=\int_{-1}^{+1}\varphi(x)(b_0^{(2k)}+b_2^{(2k)}x^2+\cdots+b_{2k}^{(2k)}x^{2k})\,dx=$$

$$=b_0^{(2k)}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx+b_2^{(2k)}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^2dx+\cdots+b_{2k}^{(2k)}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^{2k}dx=$$

$$=b_0^{(2k)}\mu_0+b_2^{(2k)}\mu_2+\cdots+b_{2k}^{(2k)}\mu_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \cdots, p-1).$$

Таким же образом определяются числа α_{2k+1} $(k=0, 1, 2, \cdots, q-1)$

$$\alpha_{2k+1}=b_1^{(2k+1)}\mu_1+b_3^{(2k+1)}\mu_3+\cdots+b_{2k+1}^{(2k+1)}\mu_{2k+1} \qquad (k=0, 1, 2, \cdots q-1),$$

так как $\hat{X}_{2k+1}(x)$ есть нечетный полином.

Теорема 1. В семействе функций $\varphi(x)\in L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$ *минимум интеграла*

$$\Gamma(\varphi)=\left\{\int_{-1}^{+1}|\varphi(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

реализует функция

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{2k}\hat{X}_{2k}(x)+\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_{2k+1}\hat{X}_{2k+1}(x), \tag{11}$$

где α_{2k} *и* α_{2k+1} *определяются из* (9).

Кроме того,

$$\min\Gamma(\varphi)=\Gamma(\varphi_0)=\left\{\sum_{k=0}^{p-1}|\alpha_{2k}|^2+\sum_{k=0}^{q-1}|\alpha_{2k+1}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Доказательство. Так как из (6)

$$\Gamma(\varphi)=\left\{\int_{-1}^{+1}|\varphi(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

то в силу (9) $\min\Gamma(\varphi)$ достигается при $\alpha_k=0$ ($k=2p, 2p+2,\cdots, 2q+1, 2q+3,\cdots$), отсюда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Как нетрудно видеть, результаты леммы и теоремы остаются справедливыми и для крайних классов

$$L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; 0\} \text{ и } L_2\{(-1, +1); 0; \mu_{2q-1}\},$$

если только в соответствующих формулировках и формулах оставить лишь выражения, характеризующие данный класс. Например, для класса функций $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; 0\}$ характерным является определяемость из системы (9) лишь коэффициентов α_{2k} ($k=0, 1, 2,\cdots, p-1$) в разложении этих функций в ряд Фурье по полиномам (5). Для этого же класса минимум интеграла $\Gamma(\varphi)$ реализует функция

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{2k}\overset{*}{X}_{2k}(x), \tag{13}$$

при этом

$$\min\Gamma(\varphi)=\Gamma(\varphi_0)=\left\{\sum_{k=0}^{p-1}|\alpha_{2k}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

2. Установим теперь непустоту класса функций $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, а затем приведем решение поставленной выше экстремальной задачи.

Лемма 2. Класс функций $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ *совпадает с множеством целых функций* $f(z)$, *допускающих представление в виде*

$$f(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)du, \tag{15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)\in L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\},\\ &\mu_k=\frac{i^{-k}a_k}{\sigma^{k+1}}, \quad (k=0, 2,\cdots, 2p-2;\ 1, 3,\cdots 2q-1).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Доказательство. По лемме 1 функции $\varphi(x)$, принадлежащие к классу (16), существуют. Отсюда следует, что функции $f(z)$, представимые в виде (15), не только принадлежат к классу W_σ, но и к классу $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$.

Обратно, если $f(z)\in W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, то тем более $f(z)\in W_\sigma$, и по теореме Палей и Винера имеет место представление (15), где $\varphi(x)\in L_2(-1, +1)$. Но если иметь в виду условия (4) и (4'), характеризующие класс $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, то из (15) заключаем, что функция $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16).

Теорема 2. Среди всех функций $f(z)$ *класса* $W_\sigma\{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ ($p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$) *минимум интеграла (1) реализует функция*

$$f_0(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{2k}\overset{*}{X}_{2k}\left(\frac{u}{\sigma}\right)+\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_{2k+1}\overset{*}{X}_{2k+1}\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right\}e^{iuz}du=$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\alpha_{2k}\sqrt{(4k+1)\pi\sigma}\;\frac{I_{2k+\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}+$$

$$+i\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\alpha_{2k+1}\sqrt{(4k+3)\pi\sigma}\;\frac{I_{2k+\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}, \tag{17}$$

где $I_{n+\frac{1}{2}}(\sigma z)$—*функция Бесселя, и коэффициенты* $\{\alpha_k\}$ *определяются из формул* (9), *где*

$$\mu_{2k}=(-1)^k\frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ p-1),$$

$$\mu_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}}\,i,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ q-1),$$

кроме того,

$$\min\mu(f)=\mu(f_0)=\left\{2\pi\sigma\left[\sum_{k=0}^{p-1}|\alpha_{2k}|^2+\sum_{k=0}^{q-1}|\alpha_{2k+1}|^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Доказательство. Если $f(z)\in W_\sigma\{a_{2p-2};\ a_{2q-1}\}$, то имеет место представление (15), где, по лемме 2, $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16). Но по формуле Парсеваля из (15) следует, что

$$\mu(f)=\left\{2\pi\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right|^2du\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi\sigma}\,\Gamma(\varphi). \tag{19}$$

Так как $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16), то по теореме 1 $\min\Gamma(\varphi)$ достигается только для функции $\varphi_0(x)$, определяемой из (11), где коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются по (9). Отсюда и из (19) следует первая из формул (17). Но известно [2], что

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\,\overset{*}{X}_n\left(\frac{u}{\sigma}\right)du=\sigma e^{n\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{2\pi}{\sigma z}\right)^{\frac{1}{2}}I_{n+\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

где

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,\overset{*}{X}_n(x). \tag{5'}$$

Из (17), (20) и (5′) следует второе из формул (17).

Как нетрудно видеть, и здесь результаты леммы 2 и теоремы 2 остаются справедливыми для крайних классов:

$$W_\sigma\{a_{2p-2};\ 0\}\ \text{и}\ W_\sigma\{0;\ a_{2q-1}\}$$

при соответствующих видоизменениях в формулировках. Таким образом, имеют место:

Следствие 1. Функции класса $W_\sigma\{a_{2p-2};\ 0\}$ представляются в виде (15), где $\varphi(x)\in L_2\{(-1,\ +1);\ \mu_{2p-2};\ 0\}$; $\mu_{2k}=(-1)^k\frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}}$ $(k=0,1,2,\cdots,p-1)$, при этом среди них минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{2k}\hat{X}_{2k}\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right\}e^{iuz}du=$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\alpha_{2k}\sqrt{(4k+1)\pi\sigma}\;\frac{I_{2k+\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}; \tag{17'}$$

кроме того,

$$\mu(f_0)=\left\{2\pi\sigma\sum_{k=0}^{p-1}|\alpha_{2k}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{18'}$$

где коэффициенты $\{\alpha_{2k}\}$ определяются следующим образом

$$\alpha_{2k}=b_0^{(2k)}\mu_0+b_2^{(2k)}\mu_2+\cdots+b_{2k}^{(2k)}\mu_{2k},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ p-1),$$

$$\mu_{2k}=(-1)^k\,\frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ p-1).$$

Следствие 2. Функции класса $W_\sigma\{0;\ a_{2q-1}\}$ представляются в виде (15), где

$$\varphi(x)\in L_2\{(-1,\ +1);\ 0;\ \mu_{2q-1}\},\ \mu_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}}i\ (k=0,1,2,\dots,q-1),$$

при этом среди них минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\left\{\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_{2k+1}\hat{X}_{2k+1}\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right\}e^{iuz}du=$$

$$=i\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\alpha_{2k+1}\sqrt{(4k+3)\pi\sigma}\;\frac{I_{2k+\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}, \tag{17''}$$

при этом

$$\mu(f_0)=\left\{2\pi\sigma\sum_{k=0}^{q-1}|\alpha_{2k+1}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{18''}$$

где коэффициенты $\{\alpha_{2k+1}\}$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{2k+1}=b_0^{(2k+1)}\mu_1+b_3^{(2k+1)}\mu_3+\cdots+b_{2k+1}^{(2k+1)}\mu_{2k+1},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ q-1),\\&\mu_{2k+1}=(-1)^{k+1}\,\frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}}\,i,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ q-1).\end{aligned}\right\}$$

Следствие 3. Среди всех функций класса $W_\sigma\{a_0;\ a_1\}$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z)=\frac{a_0}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}}\cdot\frac{I_{\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}+\frac{3a_1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}}\;\frac{I_{\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}=$$

$$=a_0\frac{\sin\sigma z}{\sigma z}+\frac{3a_1}{\sigma}\left[\frac{\sin\sigma z}{(\sigma z)^2}-\frac{\cos\sigma z}{\sigma z}\right]; \tag{20'}$$

при этом

$$\mu(f_0)=\left\{\pi\left[\frac{|a_0|^2}{\sigma}+\frac{3|a_1|^2}{\sigma^3}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (20')$$

Это следует из теоремы 2, при $p=1$ и $q=1$, если заметить, что

$$\mu_0=\frac{a_0}{\sigma},\quad \mu_1=\frac{a_1}{\sigma^2 i},\quad b_0^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad b_1^{(1)}=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad \alpha_0=\frac{a_0}{\sigma\sqrt{2}}\quad \text{и}$$

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a_1}{i\sigma^2}.$$

Следствие 1'. Среди всех функций класса $W_\sigma\{a_0;0\}$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z)=\frac{a_0}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{I_{\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}=a_0\frac{\sin\sigma z}{\sigma z}, \qquad (21)$$

при этом

$$\mu(f_0)=\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\,|a_0|. \qquad (21')$$

Это следует из следствия 1, при $p=1$, если заметить, что

$$\mu_0=\frac{a_0}{\sigma},\quad b_0^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{и}\quad \alpha_0=\frac{a_0}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Следствие 2'. Среди всех функций класса $W_\sigma\{0;a_1\}$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z)=\frac{3a_1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{I_{\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}=$$

$$=\frac{3a_1}{\sigma^2}\left[\frac{\sin\sigma z}{(\sigma z)^2}-\frac{\cos\sigma z}{\sigma z}\right], \qquad (22)$$

при этом

$$\mu(f_0)=\sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^3}}\,|a_1|. \qquad (22')$$

Это следует из следствия 2, при $q=1$, если заметить, что

$$\mu_1=\frac{a_1}{\sigma^2 i},\quad b_1^{(1)}=\sqrt{\frac{3}{2}}\quad \text{и}\quad \alpha_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a_1}{i\sigma^2}.$$

3. Пусть $\{a_k\}$—некоторая последовательность комплексных чисел. Ставится вопрос: каково необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять эта последовательность, чтобы существовала функция $f(z)\in W_\sigma$, такая, что

$$f^{(k)}(0)=a_k,\ (k=0,1,2,\cdots). \qquad (23)$$

Теорема 3. Для существования функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям (23), необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2<+\infty, \tag{24}$$

где

$$\alpha_{2k}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^k b_{2r}^{(2k)}\frac{a_{2r}}{\sigma^{2r+1}},$$

$$\alpha_{2k+1}=i\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k+1}b_{2r+1}^{(2k+1)}\frac{a_{2r+1}}{\sigma^{2r+2}}. \tag{24'}$$

Доказательство. Пусть существует функция $f_*(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы, тогда будем иметь

$$f_*(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)du,$$

где $\varphi(x)\in L_2(-1, +1)$. Но из (23) следует, что

$$a_k=i^k\int_{-\sigma}^{\sigma}u^k\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)du=i^k\sigma^{k+1}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^k dx, \quad (k=0, 1, 2,\cdots). \tag{25}$$

Обозначая

$$\alpha_k=\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\hat{X}_k(x)dx, \qquad (k=0, 1, 2,\cdots),$$

очевидно имеем $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2<+\infty$. При этом, имея в виду представления

$$\hat{X}_{2k}(x)=\sum_{r=0}^{k}b_{2r}^{(2k)}x^{2r}, \qquad \hat{X}_{2k+1}(x)=\sum_{r=0}^{k}b_{2r+1}^{(2k+1)}x^{2r+1},$$

получим формулы (24′) для чисел $\{\alpha_{2k}\}$ и $\{\alpha_{2k+1}\}$.

Обратно, положим, что для последовательности $\{\alpha_k\}$, определяемой из (24′), сходится ряд (25). Тогда по теореме Рисс — Фишера существует функция $\varphi(x)\in L_2(-1, +1)$, такая, что

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\hat{X}_k(x)dx=\alpha_k, \qquad (k=0, 1, 2,\cdots). \tag{26}$$

Функция

$$f_*(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)du \tag{27}$$

принадлежит к классу W_σ по теореме Палей — Винера. Покажем, что

$$f_*^{(k)}(0)=a_k, \qquad (k=0, 1, 2,\cdots). \tag{28}$$

Действительно, из (27) имеем, например,

$$f_*^{(2k)}(0)=(-1)^k\int_{-\sigma}^{\sigma}u^{2k}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)du=(-1)^k\sigma^{2k+1}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^{2k}dx. \tag{29}$$

С другой стороны, из (26), в силу (29), имеем:

$$\alpha_{2k}=\sum_{r=0}^{k}b_{2r}^{(2k)}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^{2r}dx=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r b_{2r}^{(2k)}\frac{f_*^{(2r)}(0)}{\sigma^{2r+1}},\quad (k=0,1,2,\cdots). \tag{30}$$

Аналогично получим

$$\alpha_{2k+1}=i\sum_{r=0}^{k}(-1)^{r+1}b_{2r+1}^{(2k+1)}\frac{f_*^{(2r+1)}(0)}{\sigma^{2r+2}},\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{31}$$

Сравнивая (30) и (31) с формулами (24′), приходим к заключению (28).

§ 2. Некоторые экстремальные свойства целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и конечного типа

1. Обозначим через $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ класс всех целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant\sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f)=\left\{\int_0^\infty|f(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Докажем лемму, которая является непосредственным следствием теоремы Палей — Винера.

Лемма 3. Класс $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ *совпадает с множеством всех целых функций* $f(z)$, *допускающих представление*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sigma^2}\cos\sqrt{xz}\,\varphi(x)x^{-\frac{1}{4}}dx, \tag{2}$$

где

$$\int_0^{\sigma^2}|\varphi(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx<+\infty. \tag{2′}$$

При этом

$$\mu(f)=\left\{\int_0^{\sigma^2}|\varphi(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

В самом деле очевидно, что $f(z^2)$—функция экспоненциального типа $\leqslant\sigma$. Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2)|^2 dt = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

следует, что $f(z^2) \in W_\sigma$ и поэтому по теореме Палей — Винера имеет место представление

$$f(\zeta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(u) e^{iu\zeta} du, \tag{4}$$

где $\psi(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

Но по формуле обращения Планшереля почти всюду на $(-\sigma, \sigma)$

$$\psi(u) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x^2) e^{-ixu} dx =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x^2) \cos xu du.$$

Поэтому $\psi(u)$ четная функция, и следовательно,

$$f(\xi^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma} \psi(u) \cos u\zeta du.$$

Обозначив $\psi(x^{\frac{1}{2}}) = \varphi(x)$, после замены $u = x^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \cos\sqrt{xz}\, \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Далее, по равенству Парсеваля из (4) получим:

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2)|^2 dt = \int_{-\sigma}^{\sigma} |\psi(u)|^2 du =$$

$$= 2\int_0^{\sigma} |\psi(u)|^2 du = \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx < +\infty.$$

Пусть

$$a_0,\ a_1, \cdots,\ a_r \quad (r \geqslant 0)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$ $(r \geqslant 0)$ все целые функции $f(z)$ класса $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, для которых

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, r). \tag{5}$$

В настоящем параграфе дается параметрическое представление функций класса $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma;\ a_r\}$, что дает возможность решить следующую экстремальную задачу:

Среди всех функций $f(z)$, *принадлежащих к классу* $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma;\ a_r\}$, *найти функцию минимизирующую интеграл* $\mu(f)$.

Из этой экстремальной задачи следует необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять числа a_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ для того, чтобы существовала целая функция $f(z)\in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, такая, что $f^{(n)}(0)=a_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

2. Пусть $\hat{P}_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$—нормированные и ортогональные на отрезке $(0, \sigma^2)$ полиномы Якоби с весом $p(x)=x^{-\frac{1}{2}}$, тогда

$$\hat{P}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma}},$$

$$\hat{P}_n(x)=\frac{1}{(2n)!!}\sqrt{\frac{4n+1}{2\sigma}}\cdot\frac{1}{p(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left[\left(\frac{2x-\sigma^2}{\sigma^2}\right)^2-1\right]^n p(x)\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}B_k^{(n)}x^n, \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Известно, что для любой функции $\varphi(x)$ из класса (2′) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\sigma^2}|\varphi(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2,$$

где
$$c_n=\int_0^{\sigma^2}\varphi(x)\,\hat{P}_n(x)x^{-\frac{1}{2}}dx. \tag{7}$$

Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$ $(r\geqslant 0)$—произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $L_2\{(0, \sigma^2);\ \mu_r\}$ все функции $\varphi(x)$ из класса (2′), для которых

$$\int_0^{\sigma^2}\varphi(x)x^{n-\frac{1}{2}}dx=\mu_n, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, r). \tag{8}$$

Лемма 4. Функции $\varphi(x)$ *класса* (8) *характеризуются тем, что в их разложении в ряд Фурье по полиномам* (6) *коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots, c_r$ *отыскиваются следующим образом:*

$$c_n=B_0^{(n)}\mu_0+B_1^{(n)}\mu_1+\ldots+B_n^{(n)}\mu_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots, r), \tag{9}$$

где $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots, r)$ *определяются из условия* (8).

Доказательство. В самом деле, при $n=0, 1, 2, \ldots, r$

$$c_n=\int_0^{\sigma^2}\varphi(x)\,\hat{P}_n(x)x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int_0^{\sigma^2}\varphi(x)(B_0^{(n)}+B_1^{(n)}x+\ldots+B_n^{(n)}x^n)x^{-\frac{1}{2}}dx=\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}\mu_k.$$

Теорема 4. В семействе функций $L_2\{(0, \sigma^2); \mu_r\}$ *минимум интеграла*

$$\Gamma(\varphi)=\left\{\int_0^{\sigma^2}|\varphi(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

реализует функция

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{r} c_n \overset{*}{P}_n(x); \tag{11}$$

при этом

$$\min\Gamma(\varphi)=\Gamma(\varphi_0)=\left\{\sum_{n=0}^{r}|c_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Так как по (7)

$$\Gamma(\varphi)=\left\{\int_0^{\sigma^2}|\varphi(x)|^2x^{-\frac{1}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

то в силу (9) $\min\Gamma(\varphi)$ достигается при $c_n=0$ $(n=r+1, r+2, \ldots)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Установим непустоту класса $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$.

Лемма 5. Класс функции $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$ *совпадает с множеством целых функций, допускающих представление в виде*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sigma^2}\cos\sqrt{xz}\,\varphi(x)x^{-\frac{1}{2}}dx, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)\in L_2\{(0, \sigma^2); \mu_r\},\\ &\mu_n=(-1)^n\sqrt{2\pi}\,a_n\frac{(2n)!}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \ldots, r).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Доказательство. По лемме 4 функции, принадлежащие к классу (13), существуют. Отсюда следует, что функции $f(z)$, представимые в виде (12), не только принадлежат к классу $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, но и к классу $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, так как из (12) имеем:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left\{\frac{(-1)^n}{2n!\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sigma^2}\varphi(x)x^{n-\frac{1}{2}}dx\right\},$$

и по (8) $$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n\frac{\mu_n}{2n!\sqrt{2\pi}}=\frac{a_n}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \ldots, r).$$

т. е. $$f^{(n)}(0)=a_n, \quad (n=0, 1, 2, \ldots, r).$$

Обратно, если $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, то тем более $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ и по лемме 3 имеет место представление (12), где $\varphi(x)$ из класса (2′). Но если иметь в виду условия (5), характеризующие класс $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, то из (12) будем иметь:

$$\int_0^{\sigma^2} \varphi(x) x^{n-\frac{1}{2}} dx = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, a_n \frac{2n!}{n!} = \mu_n, \quad (n=0, 1, 2, \cdots, r),$$

т. е. $\varphi(x) \in L_2\{(0, \sigma^2); \mu_r\}$.

Теорема 5. Среди всех функций $f(z)$ класса $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$ минимум интеграла (1) реализует функция

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \left\{\sum_{n=0}^{r} c_n \hat{P}_n(x)\right\} \cos\sqrt{xz}\, x^{-\frac{1}{2}} dx, \tag{14}$$

где коэффициенты $\{c_n\}$ определяются из (9), и

$$\mu_n = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, a_n \frac{2n!}{n!}, \qquad (n=0, 1, 2, \cdots, r).$$

Кроме того,

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left\{\sum_{n=0}^{r} |c_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Если $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, то имеет место представление (12), где, по лемме 3, $\varphi(x)$ принадлежит к классу (13). Но по лемме 3 из (12) следует, что

$$\mu(f) = \left\{\int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\varphi). \tag{15}$$

Так как $\varphi(x)$ принадлежит к классу (13), то по теореме 4 $\min\Gamma(\varphi)$ достигается только для функции $\varphi_0(x)$, определяемой из (11), где коэффициенты $\{c_n\}$ определяются по (9). Отсюда и из (15) следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Среди всех функций класса $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_0\}$ минимум интеграла (1) реализует функция

$$f_0(z) = a_0 \frac{\sin\sigma\sqrt{z}}{\sigma\sqrt{z}}; \tag{16}$$

при этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, |a_0|.$$

Это следует из теоремы 2, при $r=0$, если заметить, что

$$\mu_0 = \sqrt{2\pi}\, a_0; \quad B_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \quad \text{и} \quad c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}.$$

3. Пусть $\{a_n\}$—некоторая последовательность комплексных чисел тогда имеет место теорема:

Теорема 6. Для существования функции $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, *удовлетворяющей условиям (16), необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty, \tag{17}$$

где
$$c_n = \sum_{n=0}^{n} (-1)^k a_k B_k^{(n)} \frac{2k!}{k!}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, поэтому опускается.

4. Обозначим через $D^*_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ класс всех целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Докажем лемму:

Лемма 3. Класс $D^*_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ *совпадает с множеством всех целых функций, допускающих представление*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \frac{\sin\sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} \varphi(x) x^{\frac{1}{2}} dx, \tag{19}$$

где
$$\int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx < +\infty. \tag{19'}$$

Кроме того,

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

В самом деле очевидно, что $zf(z^2)$ функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$. Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2) t|^2 dt = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx$$

следует, что $zf(z^2) \in W_\sigma$ и поэтому по теореме Палей — Винера имеет место представление

$$\zeta f(\zeta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \psi(u) e^{iu\zeta} du, \tag{21}$$

где $\psi(u) \in L_2(-\sigma; \sigma)$.

Но по формуле обращения Планшереля почти всюду на $(-\sigma, \sigma)$ будем иметь

$$\psi(u) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} x f(x^2) e^{-iux} dx =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{n} x f(x^2) \sin ux\, dx.$$

Поэтому $\psi(u)$ нечетная функция на $(-\sigma, \sigma)$ и, следовательно,

$$\zeta f(\zeta^2) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\sigma} \psi(u) \sin u\zeta\, du.$$

Обозначив $i\psi(x^{\frac{1}{2}}) = \varphi(x)$, после замены $u = x^{\frac{1}{2}}$, имеем представление

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sigma^2} \frac{\sin\sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} \varphi(x) x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Далее, по равенству Парсеваля из (4) получим:

$$\int_{0}^{\infty} |f(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t^2)|^2 dt = \int_{-\sigma}^{\sigma} |\psi(u)|^2 du =$$

$$= 2\int_{0}^{\sigma} |\psi(u)|^2 du = \int_{0}^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx < +\infty.$$

Пусть

$$a_0,\ a_1, \cdots,\ a_r \quad (r \geq 0)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $D^{*}_{\frac{1}{2}}\{\sigma;\ a_r\}$ все целые функции $f(z)$ класса $D^{*}_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, для которых

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots, r). \tag{22}$$

При помощи этих лемм устанавливаются следующие предложения, доказательства которых мы опускаем, так как они вполне аналогичны доказательствам теорем 5 и 6.

Теорема 5′. *Среди всех функций* $f(z)$ *класса* $D^{*}_{\frac{1}{2}}\{\sigma;\ a_r\}$ $(r \geq 0)$ *минимум интеграла реализует функция*

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sigma^2} \left\{\sum_{n=0}^{r} c_n \overset{*}{Q}_n(x)\right\} \frac{\sin\sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} x^{\frac{1}{2}} dx.$$

где $\overset{*}{Q}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x^k$, $(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ — *нормированные и ортогональ-*

ные на отрезке $(0, \sigma^2)$ *полиномы Якоби с весом* $p(x)=x^{\frac{1}{2}}$, *а коэффициенты* $\{c_n\}$ *определяются следующим образом:*

$$c_n = A_0^{(n)}\mu_0 + A_1^{(n)}\mu_1 + \cdots + A_n^{(n)}\mu_n, \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots, r),$$

где
$$\mu_n = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, a_n \frac{(2n+1)!}{n!}, \ (n=0,\ 1,\ 2, \cdots, r).$$

При этом

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left\{\sum_{n=0}^{r} |c_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 1. Среди всех функций класса $D_{\frac{1}{2}}^{*}\{\sigma;\ a_0\}$ минимум интеграла (18) реализует функция

$$f_0(z) = 3a_0\left\{\frac{\sin\sigma\sqrt{z}}{(\sigma\sqrt{z})^3} - \frac{\cos\sigma\sqrt{z}}{(\sigma\sqrt{z})^2}\right\}.$$

Это следует из теоремы 2′, при $r=0$, если заметить, что в этом случае

$$\mu_0 = a_0\sqrt{2\pi};\ A_0^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^3}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^3}}.$$

При этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^3}}\,|a_0|.$$

Аналогично и в этом случае имеет место:

Теорема 6′. Для существования функции, $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}^{*}(0;\ a_0)$, *удовлетворяющей условиям (16), необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty,$$

где
$$c_n = \sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k A_k^{(n)} \frac{(2k+1)!}{k!}.$$

Сектор математики и механики АН Арм. ССР
и Ереванский госуниверситет им. В. М. Молотова
Поступило 28 VI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paley R. and Wiener N.* Fourier Transforms in the complex Domain (1934), pp. 12—13.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций (1949), гл. III.

Մ. Մ. Ջրբաշյան, Ա. Ռ. Թավադյան

ՄԻ ՔԱՆԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Նշանակենք W_σ բոլոր այն էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների դասը, որոնց ցուցիչը $\leq\sigma$ և որոնց համար գոյություն ունի

$$\mu(f)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx\right\} \tag{1}$$

ինտեգրալը։

Վերագրենք $W_\sigma\{a_{2p-2};\ a_{2q-1}\}$ $(p\geqslant 1,\ q\geqslant 1)$ դասին W_σ դասի այն ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$\left.\begin{aligned} f^{(2k)}(0)&=a_{2k} \quad (k=0,\ 1,\cdots,\ p-1)\\ f^{(2k+1)}(0)&=a_{2k+1}\ (k=0,\ 1,\cdots,\ q-1)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

պայմաններին, որտեղ $a_0,\ \cdots,\ a_{2p-2};\ a_1,\cdots,\ a_{2q-1}$ կամավոր կոմպլեքս թվեր են։

Հոդվածում բերվում է $W_\sigma\{a_{2p-2};\ a_{2q-1}\}$ դասի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումը, ինչպես նաև տրվում է այդ դասի մեջ $\mu(f)$ ֆունկցիոնալին մինիմում տվող ֆունկցիան։

Նմանօրինակ էքստրեմալ խնդիր դրվում և լուծվում է նաև $\frac{1}{2}$ կարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների համար։