ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 4, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Костандян

О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы

В работе М. М. Джрбашяна и Б. Л. Абрамяна [1], посвященной решению задачи кручения ступенчатого вала, было отмечено, что предложенным способом может быть решена также задача о кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы.

В настоящей работе приводится точное решение задачи о кручении цилиндрического вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы на поверхности при произвольном симметричном нагружении относительно оси вала.

Решение задачи представляется рядами по бесселевым функциям, коэффициенты которых определяются из бесконечной, вполне регулярной системы линейных уравнений. Получены формулы для определения напряжений при кручении вала.

В качестве примера рассмотрена задача о кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы, когда скручивающая нагрузка приложена на двух участках его боковой поверхности.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. М. М. Джрбашяна.

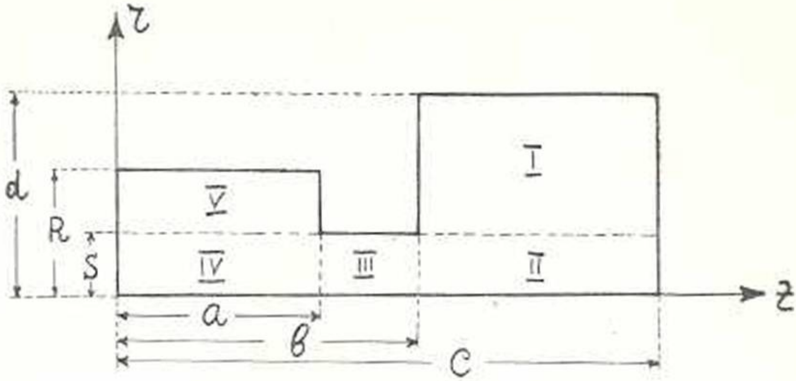
§ 1. Постановка задачи

Возьмем цилиндрическую систему координат и совместим ее ось с осью вала (фиг. 1).

Предполагается [1, 2], что поперечные сечения вала при кручении остаются плоскими и перемещение вдоль радиуса вала равно нулю. При таком предположении из шести составляющих напряжений отличны от нуля только касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$

$$\tau_{r\theta}=\tau_r=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$
$$\tau_{\theta z}=\tau_z=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{1.1}$$

где $\Phi(r, z)$—функция напряжений, удовлетворяющая в области осевого сечения уравнению



Фиг. 1.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.2}$$

На границе осевого сечения функция $\Phi(r, z)$ задается законом распределения напряжений

$$\Phi(r, z) = -\int_0^s P(s)\, r^2(s)\, ds, \tag{1.3}$$

где $P(s)$—проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения на расстоянии s по длине образующей вала

$$P(s) = \tau_r(s)\frac{dz}{ds} - \tau_z(s)\frac{dr}{ds}, \tag{1.4}$$

а $r(s)$— радиус вала в рассматриваемой точке.

Если вал сплошной, тогда в силу симметрии напряжения на оси вала τ_r и τ_z равны нулю. В этом случае, согласно (1.1), можно принять

$$\Phi(0, z) = 0. \tag{1.5}$$

Решая уравнение (1.2) методом Фурье—разделения переменных, получим

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= (A\,\mathrm{sh}\,\lambda z + B\,\mathrm{ch}\,\lambda z)\,[Cr^2 J_2(\lambda r) + Dr^2 Y_2(\lambda r)], \\ \Phi(r, z) &= (A\sin\lambda z + B\cos\lambda z)\,[Cr^2 I_2(\lambda r) + Dr^2 K_2(\lambda r)], \end{aligned} \tag{1.6}$$

где λ—произвольный вещественный параметр, $J_2(x)$ и $Y_2(x)$—функции Бесселя второго порядка соответственно первого и второго рода, а $I_2(x)$ и $K_2(x)$—функции Бесселя первого и второго рода, второго порядка от мнимого аргумента.

Функции $$r^4,\ r^4 z \text{ и } z \tag{1.7}$$

также являются частными решениями (1.2).

Пусть на поверхности вала заданы напряжения

$$
\begin{aligned}
\tau_z(r,0) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=0} = \varphi_1(r), \quad (0\leqslant r\leqslant R)\\
\tau_r(R,z) &= -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{r=R} = \varphi_2(z), \quad (0\leqslant z\leqslant a)\\
\tau_z(r,a) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=a} = \varphi_3(r), \quad (s\leqslant r\leqslant R)\\
\tau_r(s,z) &= -\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{r=s} = \varphi_4(z), \quad (a\leqslant z\leqslant b)\\
\tau_z(r,b) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=b} = \varphi_5(r), \quad (s\leqslant r\leqslant d)\\
\tau_r(d,z) &= -\frac{1}{d^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{r=d} = \varphi_6(z), \quad (b\leqslant z\leqslant c)\\
\tau_z(r,c) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{z=c} = \varphi_7(r), \quad (0\leqslant r\leqslant d)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Здесь функции $\{\varphi_i\}$ кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах и могут быть представлены в виде рядов Фурье и Фурье—Дини [5]

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_2(z) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\frac{k\pi z}{a}, \quad (0<z<a)\\
\varphi_4(z) &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \quad (a<z<b)\\
\varphi_6(z) &= \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos\frac{k\pi(z-b)}{c-b}, \quad (b<z<c)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.9}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1(r) &= \begin{cases} a_0 r + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\mu_k \dfrac{r}{s}\right), & (0<r<s)\\[2ex] b_0 r + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r), & (s<r<R)\end{cases}\\
\varphi_3(r) &= f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r), \quad (s<r<R)\\
\varphi_5(r) &= \gamma_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k W_1(\nu_k r), \quad (s<r<d)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.10}
$$

$$\varphi_7(r) = \begin{cases} \beta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right), & (0<r<s) \\ d_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} d_k W_1(\nu_k r), & (s<r<d) \end{cases}$$

где $W_n(\lambda_k r) = \frac{J_n(\lambda_k r)}{J_2(\lambda_k R)} - \frac{Y_n(\lambda_k r)}{Y_2(\lambda_k R)}$, $W_n(\nu_k r) = \frac{J_n(\nu_k r)}{J_2(\nu_k d)} - \frac{Y_n(\nu_k r)}{Y_2(\nu_k d)}$, (1.11)

а числа $\{\mu_k\}$, $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ являются соответственно корнями уравнений

$$\begin{gathered} J_2(x) = 0, \\ J_2(sx)\, Y_2(Rx) - J_2(Rx)\, Y_2(sx) = 0, \\ J_2(sx)\, Y_2(dx) - J_2(dx)\, Y_2(sx) = 0. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ справедливы следующие формулы

$$\int_0^s x\, J_1\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) J_1\left(\frac{\mu_p}{s} x\right) dx = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_0^s x\, J_2\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) J_2\left(\frac{\mu_p}{s} x\right) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2}[s\, J_1(\mu_k)]^2, & \text{при } p = k \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\int_s^R x\, W_1(\lambda_k x)\, W_1(\lambda_p x)\, dx = \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_s^R x\, W_2(\lambda_k x)\, W_2(\lambda_p x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2}\{[RW_1(\lambda_k R)]^2 - [sW_1(\lambda_k s)]^2\}, & \text{при } p = k \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\int_s^d xW_1(\nu_k x)\, W_1(\nu_p x)\, dx = \frac{\nu_k}{\nu_p} \int_s^d x\, W_2(\nu_k x)\, W_2(\nu_p x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2}\{[dW_1(\nu_k d)]^2 - [sW_1(\nu_k s)]^2\}, & \text{при } p = k \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\int_0^s x^2\, J_1\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) dx = \int_s^R x^2 W_1(\lambda_k x)\, dx = \int_s^d x^2 W_1(\nu_k x)\, dx = 0. \tag{1.16}$$

Из формул (1.13)—(1.16) следует, что коэффициенты разложений (1.10) определяются единственным образом.

Пользуясь формулами (1.3), (1.4), (1.8), (1.9) и (1.10), легко получить значение функции напряжения $\Phi(r, z)$ на контуре осевого сечения вала [1], при условии (1.5):

$$\Phi(0, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq c) \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} r^4 + s r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} J_2\left(\frac{\mu_k}{s} r\right), \quad (0 \leq r \leq s)\\
&\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(r^4 - s^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r), \quad (s \leq r \leq R)\\
&\Phi(R, z) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2}{2} z -\\
&\qquad - \frac{a R^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} \sin \frac{k\pi z}{a}, \quad (0 \leq z \leq a)\\
&\Phi(r, a) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2}{2} a + \frac{f_0}{4}(r^4 - R^4) +\\
&\qquad + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r), \quad (s \leq r \leq R)\\
&\Phi(s, z) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} + \frac{f_0}{4}(s^4 - R^4) -\\
&\qquad - \frac{g_0 s^2 (z-a)}{2} - s^2 \frac{b-a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \quad (a \leq z \leq b)\\
&\Phi(r, b) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b-a)}{2} +\\
&\qquad + \frac{\gamma_0 (r^4 - s^4)}{4} + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\nu_k} W_2(\nu_k r), \quad (s \leq r \leq d)\\
&\Phi(d, z) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b-a)}{2} +\\
&\qquad + \frac{\gamma_0 (d^4 - s^4)}{4} - \frac{h_0 d^2}{2}(z-b) -\\
&\qquad - \frac{d^2 (b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{k} \sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}, \quad (b \leq z \leq c)
\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi(r, c)=\frac{a_0}{4}s^4+\frac{b_0-f_0}{4}(R^4-s^4)-\frac{c_0R^2a}{2}-\frac{g_0s^2(b-a)}{2}+\\
&\quad+\frac{\gamma_0(d^4-s^4)}{4}-\frac{h_0d^2}{2}(c-b)+\frac{d_0}{4}(r^4-d^4)+\\
&\quad+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{\nu_k}W_2(\nu_k r), \qquad (s\leq r\leq d)\\
&\Phi(r, c)=\frac{a_0}{4}s^4+\frac{b_0-f_0}{4}(R^4-s^4)-\frac{c_0R^2a}{2}-\frac{g_0s^2(b-a)}{2}+\\
&+\frac{\gamma_0(d^4-s^4)}{4}-\frac{h_0}{2}d^2(c-b)+\frac{d_0}{4}(s^4-d^4)+\frac{\beta_0(r^4-s^4)}{4}+\\
&\quad+sr^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\mu_k}J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right). \qquad (0\leq r\leq s)
\end{aligned}\right|
$$

Так как должно иметь место соотношение

$$\Phi(0, c)=0,$$

то последняя формула из (1.17) дает

$$
\begin{gathered}
\frac{a_0-\beta_0}{4}s^4+\frac{b_0-f_0}{4}(R^4-s^4)-\frac{c_0aR^2}{2}-\frac{g_0s^2}{2}(b-a)+\\
+\frac{\gamma_0-d_0}{4}(d^4-s^4)-\frac{h_0}{2}d^2(c-b)=0. \qquad (1.18)
\end{gathered}
$$

Это соотношение между введенными постоянными представляет уравнение равновесия действующих на вал крутящих моментов.

Функцию $\Phi(r, z)$ ищем в виде

$$
\Phi(r, z)=\begin{cases}
\Phi_1(r, z), & \text{в области I}\\
\Phi_2(r, z), & \text{в области II}\\
\Phi_3(r, z), & \text{в области III}\\
\Phi_4(r, z), & \text{в области IV}\\
\Phi_5(r, z), & \text{в области V}
\end{cases} \qquad (1.19)
$$

где функции $\Phi_i(r, z)$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ удовлетворяют граничным условиям (1.8)

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{z=b}=\gamma_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k W_1(\nu_k r); \qquad (s<r<d)\\
&-\frac{1}{d^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)_{r=d}=\frac{h_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\cos\frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \qquad (b<z<c)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.20)
$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{z=c}=d_0 r+\sum_{k=1}^{\infty} d_k W_1(\nu_k r); \qquad (s<r<d)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_2(0,\ z)=0, \qquad (b\leq z\leq c)\\&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{z=c}=\beta_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right); \qquad (0<r<s)\end{aligned}\right\}\quad(1.21)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_3(0,\ z)=0, \qquad a\leq z\leq b\\&-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)_{r=s}=\frac{g_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \qquad (a<z<b)\end{aligned}\right\}\quad(1.22)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_4(0,\ z)=0, \qquad (0\leq z\leq a)\\&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial r}\right)_{z=0}=a_0 r+\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right); \qquad (0<r<s)\end{aligned}\right\}\quad(1.23)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial r}\right)_{z=0}=b_0 r+\sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r); \qquad (s<r<R)\\&-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial z}\right)_{r=R}=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos\frac{k\pi z}{a}; \qquad (0<z<a)\\&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial r}\right)_{z=a}=f_0 r+\sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r). \qquad (s<r<R)\end{aligned}\right\}\quad(1.24)$$

На смежных сторонах областей I и II, II и III, III и IV, IV и V должны быть выполнены условия сопряжения

$$\Phi_1(s,\ z)=\Phi_2(s,\ z),\quad \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=s}=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s}; \quad (b<z<c) \quad (1.25)$$

$$\Phi_2(r,\ b)=\Phi_3(r,\ b),\quad \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{z=b}=\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)_{z=b}; \quad (0<r<s) \quad (1.26)$$

$$\Phi_3(r,\ a)=\Phi_4(r,\ a),\quad \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)_{z=a}=\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right)_{z=a}; \quad (0<r<s) \quad (1.27)$$

$$\Phi_4(s,\ z)=\Phi_5(s,\ z),\quad \left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial r}\right)_{r=s}=\left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial r}\right)_{r=s}. \quad (0<z<a) \quad (1.28)$$

На линиях сопряжения $\tau_z(s,\ z)$, $\tau_z(r,\ a)$ и $\tau_z(r,\ b)$ определим разложениями

$$\tau_r(s, z) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos\frac{k\pi z}{a}; \qquad (0<z<a) \tag{1.29}$$

$$\tau_z(r, a) = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right); \qquad (0<r<s) \tag{1.30}$$

$$\tau_z(r, b) = \theta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right); \qquad (0<r<s) \tag{1.31}$$

$$\tau_r(s, z) = \frac{\zeta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \cos\frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \qquad (b<z<c) \tag{1.32}$$

где $\{\eta_k\}$, $\{\xi_k\}$, $\{\theta_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ — неизвестные коэффициенты. Решение задачи сводится к нахождению этих коэффициентов.

§ 2. Построение вспомогательных функций

Используя решения (1.6)—(1.7) уравнения (1.2), можно построить функции $\Phi_i(r, z)$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ так, чтобы удовлетворялись условия (1.20)—(1.24) и (1.29)—(1.32).

Такое построение имеется в работе [1].

Вид функций $\Phi_3(r, z)$, $\Phi_4(r, z)$ и $\Phi_5(r, z)$ выбираем, как и в работе [1], а для функций $\Phi_1(r, z)$ и $\Phi_2(r, z)$ берем соответственно выражения Φ_5 и Φ_4, сделав преобразование координат (параллельный перенос) и заменив соответствующие коэффициенты.

$$\Phi_1(r, z) = r^4\left[\frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)}(c-z) + \frac{d_0}{4}\right] + \left[\frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)} d^4 - \frac{h_0 d^2}{2}\right] z +$$

$$+ D + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[d_k \operatorname{sh} \nu_k (z-b) + \gamma_k \operatorname{sh} \nu_k (c-z)\right] \times$$

$$\times \frac{\operatorname{csch} \nu_k (c-b)}{\nu_k} W_2(\nu_k r) + \frac{c-b}{\pi} r^2 \sum \left[\zeta_k \Delta\left(\frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi d}{c-b}\right) -\right.$$

$$\left. - h_k \Delta\left(\frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)\right] \frac{\sin\frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{k\,\Delta\left(\frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)}, \quad \left(\begin{matrix} s \leqslant r \leqslant b \\ b \leqslant z \leqslant c \end{matrix}\right); \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(r, z) = r^4\left[\frac{\theta_0 - \beta_0}{4(c-b)}(c-z) + \frac{\beta_0}{4}\right] + \frac{s^2}{4(c-b)}\left[(\theta_0 - \beta_0) s^2 - 2\zeta_0 (c-b)\right] z +$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(z-b)+\theta_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-z)\right]\frac{s}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(c-b)\times$$

$$\times J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)-r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ks^2}{(c-b)^2}\left[b+(-1)^{k+1}c\right]\cdot\left[\frac{\zeta_0}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{s^2(\beta_0-\theta_0)}{4(c-b)}\right]\Delta\left(\frac{k\pi r}{c-b},\ \frac{k\pi s}{c-b}\right)+\frac{c-b}{k\pi}\zeta_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)}\right\}\sin\frac{k\pi(z-b)}{c-b};$$

$$\begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ b\leqslant z\leqslant c\end{pmatrix};\tag{2.2}$$

$$\Phi_3(r,z)=\frac{r^4}{4(b-a)}[\theta_0(z-a)+\xi_0(b-z)]+\frac{s^2z}{4(b-a)}[(\xi_0-\theta_0)s^2-2g_0(b-a)]+$$

$$+sr^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(b-z)+\theta_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k(z-a)}{s}\right]\frac{1}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{s^4}{4}[(\theta_0-\xi_0)s^2+2g_0(b-a)]\frac{a+(-1)^{k+1}b}{(b-a)^3}k\pi\frac{\Delta\left(\frac{k\pi s}{b-a},\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{b-a}{k\pi}g_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}\right\}\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a};\quad\begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ a\leqslant z\leqslant b\end{pmatrix};\tag{2.3}$$

$$\Phi_4(r,z)=\frac{r^4}{4a}[\xi_0 z-a_0(a-z)]+\frac{s^2}{4a}[(a_0-\xi_0)s^2-2\eta_0 a]z+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s}+a_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k(a-z)}{s}\right]\frac{s}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s}J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{\pi s^2}{4a^2}[a_0-\xi_0)s^2-2\eta_0 a]k\frac{\Delta\left(\frac{k\pi s}{a},\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{k\pi}\eta_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi z}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\right\}\sin\frac{k\pi z}{a};\ \begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix};\tag{2.4}$$

$$\Phi_5(r,z)=r^4\left(\frac{f_0-b_0}{4a}z+\frac{b_0}{4}\right)+\frac{R^2}{4a}\left[(b_0-f_0)R^2-2ac_0\right]z+Q+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k z+b_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k(a-z)\right]\frac{\mathrm{csch}\,\lambda_k a}{\lambda_k}W_2(\lambda_k r)+$$

$$+\frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\eta_k\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)-c_k\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\sin\frac{k\pi z}{a}}{k\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)};$$

$$\begin{pmatrix} s\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $\Delta(x,y)=I_2(x)K_2(y)-I_2(y)K_2(x)$.

Удовлетворяя первым из условий (1.25)—(1.28), т. е.

$$\Phi_1(s,z)=\Phi_2(s,z),\ (b<z<c);\quad \Phi_4(s,z)=\Phi_5(s,z),\quad (0<z<a);$$

$$\Phi_2(r,b)=\Phi_3(r,b);\ (0<r<s);\quad \Phi_3(r,a)=\Phi_4(r,a),\quad (0<r<s)$$

и в силу (1.18), для коэффициентов η_0, ξ_0, θ_0 и ζ_0 и для постоянных Q и D получим

$$\eta_0=\frac{f_0-b_0}{2as^2}(R^4-s^4)-\frac{R^2}{s^2}c_0, \tag{2.6}$$

$$\xi_0=a_0+\frac{b_0-f_0}{s^4}(R^4-s^4)-\frac{2R^2ac_0}{s^4}, \tag{2.7}$$

$$\theta_0=\beta_0+\frac{2h_0d^2}{s^4}(c-b)+\frac{d_0-\gamma_0}{s^4}, \tag{2.8}$$

$$\zeta_0=\frac{d_0-\gamma_0}{2(c-b)s^2}(d^4-s^4)+\frac{h_0d^2}{s^2}, \tag{2.9}$$

$$Q=\frac{a_0-b_0}{4}\cdot s^4. \tag{2.10}$$

$$D=\frac{\beta_0-d_0}{4}s^4+\frac{c}{4(c-b)}\left[2h_0d^2(c-b)+(d_0-\gamma_0)d^4\right]. \tag{2.11}$$

Остальные неизвестные коэффициенты $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, $\{\theta_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ $(k=1,2,3\ldots)$, которые имеются в формулах (2.1)—(2.5), определяются, если потребовать выполнение также вторых условий сопряжения из (1.25)—(1.28).

§ 3. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

1. Функции $\Phi_1(r, z)$ и $\Phi_2(r, z)$ должны удовлетворять второму из условий (1.25), т. е.

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s}. \qquad (b<z<c) \tag{3.1}$$

Из (2.1)—(2.2) составим равенство (3.1), используя рекурентные соотношения для бесселевых функций и формулу Вронского

$$K_{n+1}(x)\, I_n(x) + K_n(x)\, I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Имеем:

$$\left(\frac{d_0-\gamma_0}{c-b}\cdot\frac{d^4}{s^3}+\frac{2h_0d^2}{s^2}\right)(c-z)+(\beta_0-d_0)\,s-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[d_k \operatorname{sh}\nu_k(z-b)+\gamma_k\operatorname{sh}\nu_k(c-z)\right]\operatorname{csch}\nu_k(c-b)\,W_1(\nu_k s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(z-b)+\theta_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-z)\right]\operatorname{csch}\frac{\mu_k(c-b)}{s}\,J_1(\mu_k)=$$

$$=\frac{c-b}{\pi s}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\zeta_k\,\frac{I_2\left(\frac{k\pi d}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)}-h_k\right]\frac{\sin\frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{k\,\Delta\left(\frac{k\pi d}{c-b},\frac{k\pi s}{c-b}\right)}. \qquad (b<z<c) \tag{3.2}$$

Умножая тождество (3.2) на $\frac{2}{c-b}\sin\frac{p\pi(z-b)}{c-b}$ и интегрируя по z в пределах $(b<z<c)$, получим

$$\zeta_p=\frac{2p^2\pi^2 s}{(c-b)^3}\,\Delta\left(\frac{p\pi d}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c-b}\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k\,\frac{J_1(\mu_k)}{\frac{p^2\pi^2}{(c-b)^2}+\frac{\mu_k^2}{s^2}}+R_p,$$

$$(p=1,2,3\ldots) \tag{3.3}$$

где

$$R_p=h_p\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c-b}\right)}+\frac{2s}{c-b}\,\Delta\left(\frac{p\pi d}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c-b}\right)}\left\{\frac{d_0-\gamma_0}{s^3}d^4+\right.$$

$$+\frac{2h_0d^2}{s^2}(c-b)+\left[1+(-1)^{p+1}\right](\beta_0-d_0)-$$

$$-\left(\frac{\pi p}{c-b}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k+(-1)^{p+1}d_k}{\frac{p^2\pi^2}{(c-b)^2}+\nu_k^2} W_1(\nu_k s)+$$

$$\left.+(-1)^{p+1}\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_k^2}{s^2}} J_1(\mu_k)\right|. \quad p=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{3.4}$$

2. Функции $\Phi_2(r, z)$ и $\Phi_3(r, z)$ должны удовлетворять второму из условий (1.26), т. е.

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{z=b} = \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)_{z=b} \cdot \ (0 < r < s) \tag{3.5}$$

Из формул (2.2)—(2.3) составим равенство (3.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\theta_k \operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(c-b)\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-a)-\xi_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)-\right.$$

$$\left.-\beta_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(c-b)\right]J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)+r^2\left[\frac{h_0d^2}{2s^4}+\frac{d_0-\gamma_0}{4(c-b)s^4}(d^4-s^4)-\right.$$

$$\left.-\frac{g_0}{2s^2}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k g_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}-\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)}\cdot(0<r<s) \tag{3.6}$$

Умножив обе части тождества (3.6) на $rJ_2\left(\frac{\mu_p}{s}r\right)$ и интегрируя по r в пределах $(0, s)$, используя формулу (1.13), а также значения интегралов

$$\int_0^s r^3 J_2\left(\frac{\mu_p}{s}r\right)dr=-\frac{s^4}{\mu_p}J_1(\mu_p) \tag{3.7}$$

и

$$\int_0^s r I_2(Ar)J_2\left(\frac{\mu_p}{s}r\right)dr=-\frac{\mu_p I_2(As)J_1(\mu_p)}{A^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}},$$

получим

$$\xi_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p}{s}(b-a)-\theta_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p}{s}(c-b)\operatorname{csch}\frac{\mu_p}{s}(b-a)\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)=$$

$$=\frac{s^2}{\mu_p J_1(\mu_p)}\left[\frac{g_0}{2s^2}-\frac{h_0d^2}{2s^4}-\frac{d_0-\gamma_0}{4(c-b)s^4}(d^4-s^4)\right]-$$

$$-\frac{2\mu_p}{s^2 J_1(\mu_p)}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}\right\}-$$

$$-\beta_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p}{s}(c-b).\quad p=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{3.8}$$

3. Функции $\Phi_3(r, z)$ и $\Phi_4(r, z)$ должны удовлетворять второму из условий (1.27), т. е.

$$\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)_{z=a}=\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right)_{z=a},\quad (0<r<s) \tag{3.9}$$

Из формул (2.3)—(2.4) составляя равенство (3.9), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)\cdot\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}a\cdot\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}b-\theta_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)-\right.$$

$$\left.-\alpha_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}a\right]J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)=r^2\left[\frac{f_0-b_0}{4s^4}(R^4-s^4)+\right.$$

$$\left.+\frac{R^2ac_0}{2s^4}-\frac{g_0a}{2s^2}\right]\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(-1)^k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}.\qquad (0<r<s) \tag{3.10}$$

Умножив обе части тождества (3.10) на $r\,J_2\left(\frac{\mu_p}{s}r\right)$ и интегрируя по r в пределах $(0,s)$, аналогично предыдущему, получим

$$\xi_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p}{s}(b-a)\cdot\operatorname{csch}\frac{\mu_p a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_p b}{s}-\theta_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p(b-a)}{s}=$$

$$=\frac{2}{s J_1(\mu_p)}\left\{\frac{\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\eta_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}+\frac{\mu_p}{s}\sum g_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)+\frac{\mu_p^2}{s^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a}\left[\frac{b_0-f_0}{4s^4}(R^4-s^4)+\frac{g_0a}{2s^2}-\frac{Rac_0}{2s^4}\right]\frac{s^3}{\mu_p}\right\}+$$

$$+\alpha_p\operatorname{csch}\frac{\mu_p a}{s}.\quad p=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{3.11}$$

4. Функции $\Phi_4(r, z)$ и $\Phi_5(r, z)$ должны удовлетворять второму из условий (1.28), т. е.

$$\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial r}\right)_{r=s}, \quad (0 < z < a) \tag{3.12}$$

Из формул (2.4) и (2.5) составляя равенство (3.12), получим

$$\frac{a}{\pi s}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{\sin\frac{k\pi z}{a}}{k\cdot\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s} + a_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k (a-z)}{s}\right] J_1(\mu_k) + (a_0 - b_0)s +$$

$$+ s\left[\frac{b_0 - f_0}{a}\cdot\frac{R^4}{s^4} - 2R^2 c_0\right]z + \frac{a}{\pi s}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sin\frac{k\pi z}{a}}{k\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k \operatorname{sh}\lambda_k z + b_k \operatorname{sh}\lambda_k (a-z)\right]\operatorname{csch}\lambda_k a\cdot W_1(\lambda_k s).$$

$$0 < z < a) \tag{3.13}$$

Умножив тождество (3.13) на $\frac{2}{a}\sin\frac{p\pi z}{a}$ и интегрируя по z в пределах $(0, a)$, получим:

$$\eta_p = (-1)^{p+1}\frac{2s}{a}\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \frac{J_1(\mu_k)}{\frac{\mu_k^2}{s^2} + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} + S_p,$$

$$(p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{3.14}$$

где

$$S_p = c_p \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)} + \frac{2s}{a}\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}\Bigg\{[1 + (-1)^{p+1}](a_0 + b_0)s +$$

$$+ (-1)^{p+1}\left[(b_0 - f_0)\frac{R^4}{s^4} - \frac{2R^2 a c_0}{s^4}\right]s^4 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_1(\mu_k)}{\frac{\mu_k^2}{s^2} + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} -\right.$$

$$\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k + (-1)^{p+1} f_k}{\lambda_k^2 + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} W_1(\lambda_k s)\right]\Bigg\}. \tag{3.15}$$

Из (3.8) и (3.11) для ξ_p и θ_p получим:

$$\xi_p \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}\cdot J_1(\mu_p)\cdot s}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_p (c-b)}{s}} = \frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} +$$

$$+\frac{2\mu_p}{s}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(c-b)}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(c-a)}{s}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} + G_p, \quad (p=1, 2, 3\cdots), \tag{3.16}$$

где

$$G_p = a_p\frac{s\,J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}} + 2\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(c-b)}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(c-a)}{s}}\left\{\frac{\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4s\mu_p}\left[\frac{d_0-\gamma_0}{c-b}(d^4-s^4)-2g_0s^2+2h_0d^2\right]\right\} + \frac{\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2+\left(\frac{\mu_p}{s^2}\right)^2} +$$

$$+\frac{1}{2a\cdot s\mu_p}\left[(b_0-f_0)(R^4-s^4)+2g_0as^2-2c_0aR^2\right]+\beta_p\frac{sJ_1(\mu_p)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p(c-a)}{s}}. \tag{3.17}$$

$$\theta_p\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p c}{s}\cdot s\cdot J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)} = \frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} +$$

$$+2\frac{\mu_p}{s}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p b}{s}}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\frac{(-1)^{k-1}}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\frac{\mu_k^2}{s^2}} + D_p, \quad (p=1,2,3\cdots), \tag{3.18}$$

где

$$D_p = a_p\frac{s\,J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p b}{s}} + 2\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p b}{a}}\left\{\frac{\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4a\,s\,\mu_p}\left[(b_0-f_0)(R^4-s^4)+2as^2g_0-2R^2ac_0\right]\right\} +$$

$$+\frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}} + \frac{1}{2\mu_p\cdot s}\left[\frac{d_0-\gamma_0}{(c-b)}(d^4-s^4)-2g_0s^2+\right.$$

$$\left.+2h_0d^2\right]+\beta_p\frac{sJ_1(\mu_p)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}. \tag{3.19}$$

Введем обозначения

$$\xi_p \frac{sJ_1(\mu_p)\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p c}{s}}{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p a}{s}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p}{s}\,(c-a)} = L_p, \quad (-1)^{k+1} a\eta_k = \alpha E_k,$$

$$\vartheta_p \frac{sJ_1(\mu_p)\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p c}{s}}{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p b}{s}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p (c-b)}{s}} = F_p, \quad (c-b)\zeta_k = \alpha H_k, \tag{3.20}$$

где $\alpha>0$—подлежащая определению постоянная. Тогда бесконечные системы линейных уравнений (3.3), (3.14), (3.16) и (3.18) приведем к виду:

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} E_k + \sum b_{pk} H_k + G_p, \quad p=1, 2\ldots, \tag{3.21}$$

$$F_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} H_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{pk} E_k + D_p, \quad p=1, 2\ldots, \tag{3.22}$$

$$E_p = \sum_{k=1}^{\infty} l_{pk} L_k + M_p, \quad p=1, 2, 3\ldots \tag{3.23}$$

$$H_p = \sum_{k=1}^{\infty} q_{pk} F_k + N_p, \quad p=1, 2, 3\ldots, \tag{3.24}$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{3.25}$$

$$b_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{s(c-b)} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p (c-b)}{s}}{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p (c-a)}{s}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{3.26}$$

$$c_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{3.27}$$

$$d_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p a}{s}}{\mathrm{sh}\,\frac{\mu_p b}{s}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{3.28}$$

$$l_{pk} = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}\ \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\cdot\operatorname{sh}\frac{\mu_k (c-a)}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{3.29}$$

$$q_{pk}=\frac{2}{\alpha}\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi d}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c-b}\right)}\ \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k (c-b)}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_k^2}{s^2}}, \tag{3.30}$$

$$M_p = \frac{a}{\alpha}(-1)^{p+1}S_p, \tag{3.31}$$

$$N_p = \frac{c-b}{a}\cdot R_p. \tag{3.32}$$

Совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений (3.21)—(3.24) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p, \tag{3.33}$$

если ввести обозначения

$$\begin{array}{llll}
Z_{4p-3} = L_p, & Z_{4p-2} = F_p, & Z_{4p-1} = E_p, & Z_{4p} = H_p,\\
B_{4p-3} = G_p, & B_{4p-2} = D_p, & B_{4p-1} = M_p, & B_{4p} = N_p,\\
A_{4p-3,\,4k-3} = 0, & A_{4p-3,\,4k-2}=0, & A_{4p-3,\,4k-1}=a_{pk}, & A_{4p-3,\,4k} = b_{pk},\\
A_{4p-2,\,4k-3} = 0, & A_{4p-2,\,4k-2} = 0, & A_{4p-2,\,4k-1} = c_{pk}, & A_{4p-2,\,4k} = d_{pk},\\
A_{4p-1,\,4k-3} = l_{pk}, & A_{4p-1,\,4k-2}=0 & A_{4p-1,\,4k-1}=0, & A_{4p-1,\,4k} = 0,\\
A_{4p,\,4k-3} = 0, & A_{4p,\,4k-2} = q_{pk}, & A_{4p,\,4k-1} = 0, & A_{4p,\,4k} = 0.
\end{array} \tag{3.34}$$

§ 4. Исследования бесконечной системы линейных уравнений

Докажем, что введенное в обозначение (3.20) число $\alpha>0$ можно выбрать таким образом, чтобы система (3.33) была вполне регулярной.

Доказано [1], что совокупность свободных членов ограничена. Это дает возможность, пользуясь теорией бесконечных, вполне регулярных систем линейных уравнений [5], решить систему (3.33) с заданной точностью, т. е. решить эффективно уравнение (1.2) кручения вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы при граничных условиях (1.8).

Доказано [1], что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} = \frac{as}{2k\pi} \frac{I_3\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}; \tag{4.1}$$

$$0 < K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) - K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) < I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right); \tag{4.2}$$

$$\text{при} \quad p = 1, 2, 3 \ldots$$

Кроме того,

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leqslant 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant \infty). \tag{4.3}$$

Покажем, что при $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ бесконечная система линейных уравнений (3.33) удовлетворяет условию вполне регулярности.

В силу обозначений (3.34) мы должны рассматривать отдельно четыре случая; заметив, что $a \leqslant b < c$, имеем:

$$1. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3,4k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3,4k}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)} \cdot \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{(c-b)}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} =$$

$$= \alpha\left(\operatorname{cth}\frac{\mu_p a}{s} - \frac{s}{\mu_p a}\right) + \alpha\left[\operatorname{cth}\frac{\mu_p}{s}(c-b) - \frac{s}{\mu_p(c-b)}\right] \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\left[1 + \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)}\right] \leqslant 2\alpha, \tag{4.4}$$

в силу обозначений (3.25), (3.26), (3.34) и неравенства (4.3), причем использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi}\right) \tag{4.5}$$

и неравенство

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)} \leqslant 1.$$

В неравенстве (4.4) оценка справедлива и для предельного случая, когда $a=b$, т. е., когда выточка превращается в вырез (трещина).

$$2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2,\,4k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2,\,4k}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |c_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |d_{pk}| = \frac{2\mu_p\,\alpha}{s(c-b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2\mu_p\,\alpha}{as} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}a}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2} =$$

$$= \alpha\left[\operatorname{cth}\frac{\mu_p}{s}(c-b) - \frac{s}{\mu_p(c-b)}\right] + \alpha\left(\operatorname{cth}\frac{\mu_p}{s}a - \frac{s}{\mu_p a}\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}a}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}b} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\left(1 + \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}a}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}b}\right) \leqslant 2\alpha, \tag{4.6}$$

в силу обозначений (3.27), (3.28) и (3.34), аналогично предыдущему.

$$3. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-1,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |l_{pk}| =$$

$$= \frac{2}{\alpha}\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \cdot \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-a)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}c} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{s}\right)^2}. \tag{4.7}$$

Но

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-a)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

и в силу неравенства (4.2)

$$\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)\cdot\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)} \leqslant I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right); \tag{4.9}$$

поэтому из (4,7), (4,8), (4,9) и (4.1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-1, 4k}| \leqslant \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{p\pi s}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right). \tag{4.10}$$

Из теории бесселевых функций известно, что если n целое, то

$$K_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{ch} t}\operatorname{ch}(nt)\,dt, \tag{4.11}$$

$$\text{при} \quad x > 9,$$

откуда ясно, что

$$K_n(x) \leqslant K_{n+1}(x), \quad \text{при } x > 0. \tag{4.12}$$

Далее

$$I_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 (\operatorname{ch}(x\xi).(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}} d\xi,$$

когда

$$R(n) > -\frac{1}{2}.$$

Поэтому, интегрируя последнее выражение по частям, получим

$$I_{n+1}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\int_0^1 \operatorname{ch}(x\xi)(1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\operatorname{sh}(x\xi)(1-\xi^2)^{n+\frac{1}{2}}\Big|_0^1 +\right.$$

$$\left. + 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \operatorname{sh}(x\xi)(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}\xi\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_0^1 \operatorname{sh}(x\xi)(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}\xi\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_0^1 \operatorname{ch}(x\xi)(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}d\xi = I_n(x),$$

т. е.

$$I_{n+1}(x) \leqslant I_n(x). \tag{4.13}$$

Из соотношения Вронского

$$I_{n+1}(x)\,K_n(x) + I_n(x)\,K_{n+1}(x) = \frac{1}{x}, \tag{4.14}$$

ввиду неотрицательности обоих слагаемых, используя неравенства (4.12) и (4.13), получим

$$K_n(x)\,I_{n+1}(x) \leqslant K_{n+1}(x)\,I_n(x), \tag{4.15}$$

откуда имеем

$$I_{n+1}(x)\,K_n(x) \leqslant \frac{1}{2x}. \tag{4.16}$$

В частном случае, когда $n=2$, из (4.16) следует

$$I_3\left(\frac{p\pi s}{a}\right)K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) \leqslant \frac{1}{2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}. \tag{4.17}$$

Из (4.10) и (4.17) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_{4p-1,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty}|A_{4p-1,\,4k-3}| \leqslant \frac{1}{4\varkappa}. \tag{4.18}$$

$$4.\quad \sum_{k=1}^{\infty}|A_{4p,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty}|q_{pk}| =$$

$$= \frac{2}{\varkappa}\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2\Delta\left(\frac{p\pi l}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi l}{c-b}\right)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_k^2}{s^2}}. \tag{4.19}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_{4p,\,k}| \leqslant \frac{1}{4\varkappa}. \tag{4.20}$$

Для оценок (4.4), (4.6), (4.18) и (4.20), выбирая $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{p,k}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 1, 2\ldots \tag{4.21}$$

т. е. система (3.33) вполне регулярна.

Как было отмечено выше, совокупность свободных членов $\{B_p\}$ системы (3.33) ограничена и стремится к нулю при $p \to \infty$ (см. [1]).

$$B_p = O(p^{-\delta}), \quad (0 < \delta < 1), \quad \text{при } p \to \infty. \tag{4.22}$$

§ 5. Определение напряжений

1. При кручении вала напряжения определяются формулами (1.1). Используя обозначения (3.20), пользуясь формулами (1.1) и рекуррентными формулами бесселевых функций, из (2.1)—(2.5) получим:

для области 1 (фиг. 1)

$$\tau_r(r, z) = r^2 \frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{d_0 - \gamma_0}{4(c-b)} d^4 + \frac{h_0 d^2}{2}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_k \operatorname{ch} \nu_k (c - z) - d_k \operatorname{ch} \nu_k (z - b)] \frac{W_2(\nu_k r)}{\operatorname{sh} \nu_k (c-b)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{c-b} H_k \Delta\left(\frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi r}{c-b}\right) + h_k \Delta\left(\frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)\right] \times$$

$$\times \frac{\cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)}; \tag{5.1}$$

$$\tau_z(r, z) = r\left[\frac{\gamma_0 - d_0}{c-b}(c - z) + d_0\right] + \sum_{k=1}^{\infty} [d_k \operatorname{sh} \nu_k (z - b) +$$

$$+ \gamma_k \operatorname{sh} \nu_k (c - z)] \frac{W_1(\nu_k r)}{\operatorname{sh} \nu_k (c-b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{c-b} H_k \Omega\left(\frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi r}{c-b}\right) -\right.$$

$$\left. - h_k \Omega\left(\frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)\right] \frac{\sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b}\right)}; \tag{5.2}$$

для области II

$$\tau_r(r,\ z) = r^2\left[\frac{d_0-\gamma_0}{4(c-b)s^4}(d^4-s^4)+\frac{h_0 d^2}{2s^4}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k \operatorname{ch}\frac{\mu_k}{s}(z-b)-F_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)}{s\cdot J_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\operatorname{ch}\frac{\mu_k}{s}(c-z)\right]\times$$

$$\times\frac{J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)}+\frac{\alpha}{c-b}\sum_{k=1}^{\infty}H_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)}\cos\frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \qquad (5.3)$$

$$\tau_z(r,\ z) = r\left\{\left[\frac{2h_0 d^2}{s^4}+\frac{d_0-\gamma_0}{(c-b)s^4}(d^4-s^4)\right](c-z)+\beta_0\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(z-b)+F_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(c-b)}{s}}{s\cdot J_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-z)\right]\frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)}-$$

$$-\frac{\alpha}{c-b}\sum_{k=1}^{\infty}H_k\frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)}\sin\frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \qquad (5.4)$$

для области III

$$\tau_r(r,\ z) = \frac{r^2 g_0}{2s^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(c-a)}{s}\operatorname{ch}\frac{\mu_k(b-z)}{s}-\right.$$

$$\left.-F_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(c-b)}{s}\operatorname{ch}\frac{\mu_k(z-a)}{s}\right]\frac{J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)}{s\cdot J_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)}\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \qquad (5.5)$$

$$\tau_z(r,\ z) = r\left[\beta_0+\frac{2h_0 d^2(c-b)}{s^4}+\frac{d_0-\gamma_0}{s^4}(d^4-s^4)+\frac{2g_0(b-z)}{s^2}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(c-a)}{s}\cdot\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-z)}{s}+\right.$$

$$\left.+F_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)\cdot\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(z-a)\right]\frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)}{s\cdot J_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(b-a)}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \tag{5.6}$$

для области IV

$$\tau_r(r,z)=r^2\left[\frac{R^2c_0}{2s^4}-\frac{b_0-f_0}{4as^4}(R^4-s^4)\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-a)}{s\cdot J_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}\operatorname{ch}\frac{\mu_k}{s}z-a_k\frac{\operatorname{ch}\frac{\mu_k}{s}(a-z)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}}\right]\times$$

$$\times J_2\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)+\frac{\varkappa}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}E_k\frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\cos\frac{k\pi z}{a}; \tag{5.7}$$

$$\tau_z(r,z)=r\left\{\left[\frac{b_0-f_0}{s^4}(R^4-s^4)-\frac{2R^2ac_0}{s^4}\right]\frac{z}{a}+a_0\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k(c-a)}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}z}{s\cdot J_1(\mu_k)\cdot\operatorname{sh}\frac{\mu_k c}{s}}+a_k\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k(a-z)}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}}\right]J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right)-$$

$$-\frac{\varkappa}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}E_k\frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}\sin\frac{k\pi z}{a}; \tag{5.8}$$

для области V

$$\tau_r(r,z)=r^2\frac{b_0-f_0}{4a}-\frac{1}{r^2}\left[(b_0-f_0)R^2-2ac_0\right]\frac{R^2}{4a}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k\operatorname{ch}\lambda_k(a-z)-f_k\operatorname{ch}\lambda_k z\right]\frac{W_2(\lambda_k r)}{\operatorname{sh}\lambda_k a} \tag{5.9}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{\varkappa}{a}E_k\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\ \frac{k\pi R}{a}\right)-c_k\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\ \frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\cos\frac{k\pi z}{a}}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\ \frac{k\pi s}{a}\right)};$$

$$\tau_z(r,\ z)=r\left(\frac{f_0-b_0}{a}z+b_0\right)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k z+b_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k(a-z)]\times$$

$$\times\frac{W_1(\lambda_k r)}{\mathrm{sh}\,\lambda_k r}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{\varkappa}{a}E_k\,\Omega\left(\frac{k\pi r}{a},\ \frac{k\pi R}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-c_k\,\Omega\left(\frac{k\pi r}{a},\ \frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\sin\frac{k\pi z}{a}}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\ \frac{k\pi s}{a}\right)}. \tag{5.10}$$

В (5.2) и (5.10) введено обозначение

$$\Omega(x,\ y)=I_1(x)K_2(y)+K_1(x)I_2(y).$$

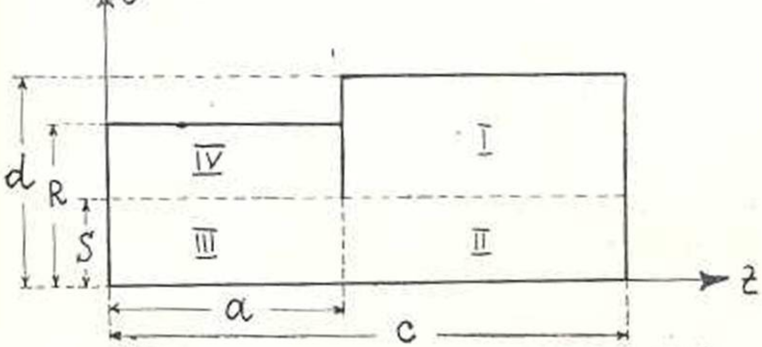
Формулами (5.1)—(5.10) определяются напряжения в любой точке осевого сечения.

§ 6. Предельный случай, когда выточка превращается в трещину

1. Когда a=b, то выточка превращается в трещину (фиг. 2) и формулы, полученные выше, упрощаются. Предположим, что и на контурах трещины действует внешняя нагрузка. В этом случае область III (фиг. 1) исчезает и потому функцию $\Phi_3(r,\ z)$ не будем рассматривать.

Так как a=b, то

$$\varphi_1(z)=0 \tag{6.1}$$



Фиг. 2.

тождественно, и коэффициенты разложения (1.9) для $\varphi_4(z)$

$$g_k = 0 . \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots) \tag{6.2}$$

При $a=b$ из (1.30) и (1.31) следует, что

$$\theta_k = \xi_k, \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{6.3}$$

и в силу (3.20)

$$L_p = F_p . \qquad (p = 1, 2 \ldots) \tag{6.4}$$

Кроме того, бесконечные системы линейных уравнений (3.21) и (3.22) становятся тождественными, т. е.

$$a_{pk} = d_{pk}, \qquad c_{pk} = b_{pk},$$
$$G_p = D_p . \tag{6.5}$$

Тогда бесконечные системы линейных уравнений (3.21), (3.23) и (3.24) принимают следующий вид:

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} E_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} H_k + G_p ; \qquad (p = 1, 2 \ldots) \tag{6.6}$$

$$E_p = \sum_{k=1}^{\infty} l_{pk} L_k + M_p ; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{6.7}$$

$$H_p = \sum_{k=1}^{\infty} q_{pk} L_k + N_p ; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{6.8}$$

В формулах (3.25)—(3.32) и (3.17) для значений a_{pk}, b_{pk}, l_{pk}, q_{pk} G_p, M_p и N_p надо иметь в виду (6.2).

Совокупность трех бесконечных систем уравнений (6.6) — (6.8) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p . \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{6.9}$$

если ввести обозначения, аналогичные (3.34).

Вполне регулярность системы (6.9) доказана выше.

Напряжения в любой точке осевого сечения вала определяются соотношениями (5.1)—(5.10). При этом, в силу равенства $a=b$ и согласно (6.2)—(6.5), эти соотношения упрощаются.

Заметим, что в угловых точках у выточки будет наблюдаться концентрация напряжений [6].

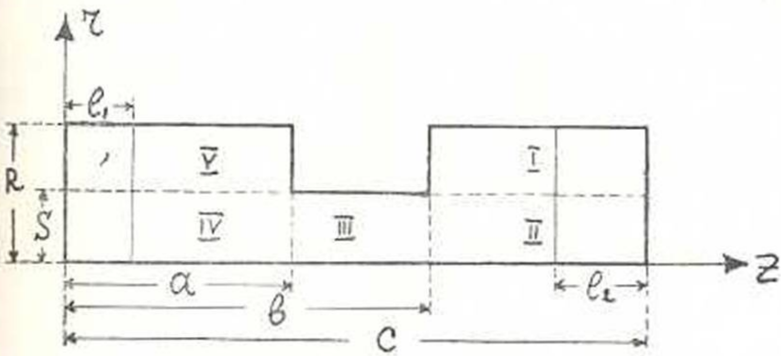
§ 7. Вал с кольцевой выточкой прямоугольной формы, скручиваемый моментами, равномерно распределенными на двух участках боковой поверхности

1. Рассмотрим случай, когда $d = R$. Пусть нагрузка приложена на участках длины l_1 и l_2 по концам вала по следующему закону:

$$
\begin{aligned}
&\tau_z(r,\ 0)=0, &&(0\leq r\leq R)\\
&\tau_r(R,\ z)=-T_1, &&(0\leq z\leq l_1)\\
&\tau_r(R,\ z)=0, &&(l_1\leq z\leq a)\\
&\tau_z(r,\ a)=0, &&(s\leq r\leq R)\\
&\tau_r(s,\ z)=0, &&(a\leq z\leq b)\\
&\tau_z(r,\ b)=0, &&(s\leq r\leq R)\\
&\tau_r(R,\ z)=0, &&(b\leq z\leq c-l_2)\\
&\tau_r(R,\ z)=T_2, &&(c-l_2\leq z\leq c)\\
&\tau_z(r,\ c)=0, &&(0\leq r\leq R)
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

На оси вала должно выполняться условие

$$\tau_z(0,\ z)=\tau_r(0,\ z)=0. \tag{7.2}$$



фиг. 5.

Пользуясь разложениями (1.9) и (1.10), имеем

$$a_k=b_k=f_k=\gamma_k=\beta_k=d_k=g_k=0;\quad (k=0,\ 1,\ 2\ldots) \tag{7.3}$$

$$c_0=-\frac{2T_1l_1}{a};\quad c_k=-\frac{2T_1}{k\pi}\sin\frac{k\pi l_1}{a};\quad (k=1,\ 2\ldots) \tag{7.4}$$

$$h_0=\frac{2T_2l_2}{c-b};\quad h_k=\frac{2T_2}{k\pi}(-1)^k\sin\frac{k\pi l_2}{c-b}.\quad (k=1,\ 2\ldots) \tag{7.5}$$

Коэффициенты из (7.3), (7.4) и (7.5) должны удовлетворять условию (1.18), т. е. уравнению равновесия крутящих моментов, откуда получим

$$T_1l_1=T_2l_2. \tag{7.6}$$

Подставив коэффициенты (7.3)—(7.5) в (3.25)—(3.32) и имея в виду (3.34), для бесконечной системы (3.33) будем иметь

$$A_{4p-3,\ 4k-1}=\frac{2\mu_p\alpha}{as}\,\frac{1}{\dfrac{k^2\pi^2}{a^2}+\dfrac{\mu_p^2}{s^2}}, \tag{7.7}$$

$$A_{4p-3,\,4k}=\frac{2\mu_p\,\varkappa}{(c-b)s}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-a)}\cdot\frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{(c-b)^2}+\frac{\mu_p^2}{s^2}}; \tag{7.8}$$

$$A_{4p-2,\,4k-1}=\frac{2\mu_p\,\varkappa}{(c-b)s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}; \tag{7.9}$$

$$A_{4p-2,\,4k}=\frac{2\mu_p\,\varkappa}{as}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p\,a}{s}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p\,b}{s}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2+\frac{\mu_p^2}{s^2}}; \tag{7.10}$$

$$A_{4p-1,\,4k-3}=\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{k\pi s}{a}\right)\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k\,a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-a)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}c}\times$$

$$\times\frac{1}{\frac{\mu_k}{s}+\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2}; \tag{7.11}$$

$$A_{4p,\,4k-2}=\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2\Delta\left(\frac{p\pi R}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\times$$

$$\times\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{c-b}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_k\,b}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}c}\cdot\frac{1}{\frac{\mu_k^2}{s^2}+\left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2}; \tag{7.12}$$

$$B_{4p-3}=\frac{2R^2T_1l_1}{s\mu_p}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{c-b}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}(c-b)}\right]; \tag{7.13}$$

$$B_{4p-2}=\frac{2R^2T_1l_1}{s\mu_p}\left[\frac{1}{c-b}+\frac{1}{a}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}a}{\operatorname{sh}\frac{\mu_p}{s}b}\right]; \tag{7.14}$$

$$B_{4p-1}=\left[\frac{2a}{\varkappa}(-1)^p\frac{T_1}{p\pi}\sin\frac{p\pi l_1}{a}+\frac{8T_1l_1R^2}{\varkappa s^2}\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)\right]\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}; \tag{7.15}$$

$$B_{4p}=\left[\frac{2(c-b)}{\varkappa}(-1)^p\frac{T_2}{p\pi}\sin\frac{p\pi l_2}{c-b}+\right.$$

$$\left.+\frac{8T_2l_2R^2}{\varkappa s^2}\Delta\left(\frac{p\pi R}{c-b},\ \frac{p\pi s}{c-b}\right)\right]\frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{c-b}\right)}. \tag{7.16}$$

2. В качестве численного примера рассмотрим вал с кольцевой выточкой прямоугольной формы, с размерами

$$s=\frac{5}{6}R,\quad a=\frac{119}{12}R,\quad b=\frac{121}{12}R,\quad c=20R,$$

т. е., когда выточка имеет квадратичную форму со сторонами $\frac{1}{6}R$.

Примем $l_1=l_2=R$.

Для этого случая $c=a+b$. Подставляя в (7.7)—(7.16), получим

$$A_{4p-3,\,4k-1}=A_{4p-2,\,4k-1},\quad A_{4p-3,\,4k}=A_{4p-2,\,4k},$$

$$A_{4p-1,\,4k-3}=A_{4p,\,4k-2},\quad B_{4p-3}=B_{4p-2},\ B_{4p-1}=B_{4p}.$$

Отсюда следует, что

$$Z_{4p-3}=Z_{4p-2}\ \text{и}\ Z_{4p-1}=Z_{4p},\ \text{т. е.}\ L_p=F_p\ \text{и}\ E_p=H_p. \tag{4.17}$$

В данном случае все коэффициенты и свободные члены бесконечной системы линейных уравнений (3.33) положительные числа.

Так как

$$|B_p|\leqslant\max\{|B_{4p-3}|,\ |B_{4p-2}|,\ |B_{4p-1}|,\ |B_{4p}|\},\quad p=1,2\ldots$$

то

$$|B_p|\leqslant 6.69276RT, \tag{7.18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_{pk}|\leqslant 0,58267. \tag{7.19}$$

Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [5], получим следующие оценки для неизвестных

$$\begin{gathered}
0,18094RT\leqslant L_1\leqslant 3,25657RT,\\
0,10379RT\leqslant L_2\leqslant 2,88106RT,\\
0,28267RT\leqslant E_1\leqslant 0,29269RT,\\
6,44253RT\leqslant E_2\leqslant 6,50555RT,\\
G_k\leqslant L_k\leqslant 5,78558RT,\ k=3,4,5\ldots\\
M_k\leqslant E_k\leqslant 5,78558RT,\ k=3,4,5\ldots\\
F_k=L_k,\ H_k=E_k,\ k=1,2,3\ldots
\end{gathered}\tag{7.20}$$

Пользуясь определенными значениями коэффицентов (7.3) и (7.4), напряжения найдем из формул (5.1)—(5.10).

Подставляя найденные значения неизвестных коэффициентов L_k, E_k, F_k и H_k с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений τ_r и τ_z.

Некоторые значения напряжений τ_r и τ_z приведены в таблице 1.

Таблица 1

$\frac{r}{s}$		0	0,5	1	1,2
$\frac{\tau_z\left(r,\frac{a+b}{2}\right)}{T}$	с избытком с недостатком	0 0	4,516 3,376	17,65 7,12	— —
$\frac{\tau_z\left(r,\frac{a+2b}{2}\right)}{T}$	с избытком с недостатком	0 0	1,901 1,633	4,624 3,255	3,83 3,68
$\frac{\tau_r\left(r,\frac{a+b}{2}\right)}{T}$		0	0	0	0
$\frac{\tau_r\left(r,\frac{a+2b}{2}\right)}{T}$		0	0,033	0,118	0

Ереванский государственный
университет им. В. М. Молотова

Поступило 2 VII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения. П. М. М., 1951, т. XV, в. 4.
2. *Соляник-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Гостехиздат, М., 1949.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., 1949.
6. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Բ. Ա. Կոստանդյան

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՁԵՎԻ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՓՈՐՎԱԾՔՈՎ ԳԼԱՆԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է ուղղանկյուն ձևի օղակաձև փորվածքով գլանի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը կամայական սիմետրիկ բաշխված բեռի դեպքում:

Կիրառելով օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման մեթոդը, խնդրի լուծումը բերվում է անվերջ, լրիվին ռեգուլյար, գծային հավասարումների սիստեմի լուծմանը: Ստացված բանաձևերով, որոնք կախված են գլանի երկրաչափական պարամետրերից, որոշվում են ոլորման ժամանակ լարում-

ները։ Առանձին դիտված է սահմանային դեպքը, երբ փորվածքը դառնում է ճեղք։

Որպես օրինակ ուսումնասիրված է քառակուսային ձևի փորվածքով գլանի ոլորումը, երբ փորվածքը տեղադրված է գլանի երկարության կենտրոնում, իսկ ոլորող բեռը հավասարաչափ բաշխված է գլանի կողմնային մակերևույթի երկու տեղամասերում։

Ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակում։

Աշխատանքը կատարված է պրոֆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ղեկավարությամբ։