

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

В. В. Пинаджян

Об одной ошибке К. Ежека в определении несущей способности внецентренножатых стержней

В 1936—37 годах К. Ежек предложил аналитический метод определения несущей способности внецентренножатых стержней любой симметричной формы сечения [1, 2], исходя из предположения, что материал стержня совершенно упруг до предела текучести и совершенно пластичен после начала текучести (фиг. 1). Метод расчета К. Ежека в настоящее время является общепризнанным и приводится в ряде курсов по строительным конструкциям как в СССР, так и за границей.

При рассмотрении более общей задачи расчета сжато-изогнутых стержней с учетом линейного упрочнения материала нами в исследованиях К. Ежека обнаружена ошибка.

Считаем необходимым обратить на это внимание, поскольку эта ошибка приводит к неправильным результатам при определении несущей способности внецентренножатых элементов.

Известно, что в сжато-изогнутом стержне любого сечения в упруго-пластической стадии работы элемента может возникнуть одно из следующих трех деформационных состояний [1—5].

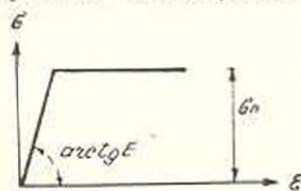
Деформационное состояние I ($\epsilon_c > \epsilon_n$, $\epsilon_p \leq \epsilon_n$)*, характеризующееся односторонней пластичностью сечения с вогнутой стороны элемента.

Деформационное состояние II ($\epsilon_c < \epsilon_n$, $\epsilon_p > \epsilon_n$), характеризующееся односторонней пластичностью сечения в растянутой зоне.

Деформационное состояние III, характеризующееся наличием пластических деформаций как в растянутой, так и в сжатой зонах опасного сечения.

Каждому из описанных выше деформационных состояний в координатном поле φ — λ соответствует вполне определенная область (фиг. 2).

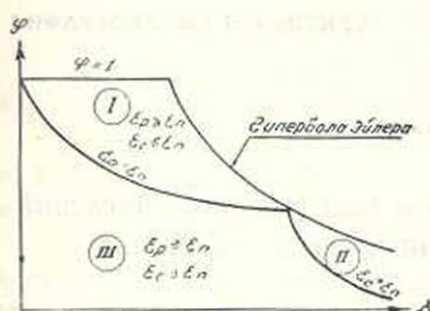
Границу между областями деформационных состояний I и III находим из условия $\epsilon_p = \epsilon_n$, границу между областями II и III — из условия $\epsilon_c = \epsilon_n$.



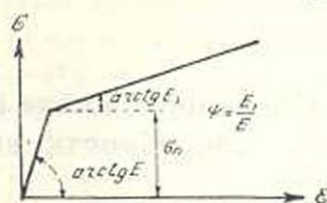
Фиг. 1.

* Буквенные обозначения приводятся в конце заметки.

Для внецентренножатых стержней любой симметричной формы сечения, при действии момента в плоскости симметрии и устойчивости плоской формы изгиба, в случае когда диаграмма $\sigma-\varepsilon$ материала стержня состоит из двух отрезков прямых (фиг. 3), нами получено следующее выражение граничной кривой между областями I и III [6]:



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$(\lambda_{I-III})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \cdot \left\{ (1 - \psi) \left[I_{III} - (a_1 - c_1) \cdot S_{I\text{II}} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \psi) \cdot (h - c_1) \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{S_{I\text{II}} + (a_1 - c_1) \cdot \frac{\partial S_{I\text{II}}}{\partial c_1}}{\psi F - (1 - \psi) \cdot \frac{\partial S_{I\text{II}}}{\partial c_1}} \right] + \psi I_x \right\}, \quad (1)$$

где c_1 определяется из следующего соотношения:

$$(h - c_1) \cdot (1 - \psi) \cdot \frac{F}{2} = (1 - \psi) \cdot S_{I\text{II}} + \psi F (a_1 - c_1). \quad (2)$$

Выражение граничной кривой между областями II и III (фиг. 2) получено в следующем виде:

$$(\lambda_{II-III})^2 = \frac{\pi^2 E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \cdot \left\{ (1 - \psi) \cdot \left[I_{2b} - (a_2 - c_2) \cdot S_{2b} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \psi) \cdot (h - c_2) \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{S_{2b} + (a_2 - c_2) \cdot \frac{\partial S_{2b}}{\partial c_2}}{\psi F - (1 - \psi) \cdot \frac{\partial S_{2b}}{\partial c_2}} \right] + \psi I_x \right\}, \quad (3)$$

где c_2 определяется из следующего выражения:

$$(h - c_2) \cdot (1 + \psi) \cdot \frac{F}{2} = (1 - \psi) \cdot S_{2b} + \psi F (a_2 - c_2). \quad (4)$$

В частном случае, когда материал стержня за пределом текучести совершенно пластичен (фиг. 1), в полученных формулах следует положить $\psi = 0$.

Положив в (1) и (2) $\psi = 0$ и, имея в виду, что $a_1 = h - a_2$ и $S_{1H} = -\frac{1}{2} \frac{\partial I_{1H}}{\partial c_1}$, после некоторых преобразований получим:

$$(\lambda_{I-III})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \cdot \left[I_{1H} + \frac{(h - c_1)}{2} \cdot \frac{\partial I_{1H}}{\partial c_1} + (h - c_1)^2 \cdot (1 - \varphi) \cdot \frac{F}{2} - \right. \\ \left. - \frac{(h - c_1) \cdot (1 - \varphi) \cdot F}{4 \cdot \frac{\partial S_{1H}}{\partial c_1}} \cdot \frac{\partial I_{1H}}{\partial c_1} \right], \quad (5)$$

$$(h - c_1) \cdot (1 - \varphi) \cdot \frac{F}{2} = S_{1H}. \quad (6)$$

Аналогично положив в (3) и (4) $\psi = 0$, $a_2 = h - a_1$ и $S_{2b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial I_{2b}}{\partial c_2}$, получим:

$$(\lambda_{II-III})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \cdot \left[I_{2b} + \frac{(h - c_2)}{2} \cdot \frac{\partial I_{2b}}{\partial c_2} + (h - c_2)^2 \cdot (1 + \varphi) \cdot \frac{F}{2} - \right. \\ \left. - \frac{(h - c_2) \cdot (1 + \varphi) \cdot F}{4 \cdot \frac{\partial S_{2b}}{\partial c_2}} \cdot \frac{\partial I_{2b}}{\partial c_2} \right], \quad (7)$$

$$(h - c_2) \cdot (1 + \varphi) \cdot \frac{F}{2} = S_{2b}. \quad (8)$$

К. Ежек дифференцирует выражение (6) по переменной c_1 , в результате чего получает:

$$\frac{\partial S_{1H}}{\partial c_1} = -(1 - \varphi) \cdot \frac{F}{2}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (5), К. Ежек получил следующее выражение граничной кривой между областями деформационных состояний I и III, применительно к внецентренносжатым стержням любой симметричной формы сечения, выполненным из идеального упруго-пластического материала (фиг. 1):

$$(\lambda_{I-III})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \cdot \left[I_{1H} + (h - c_1) \cdot \frac{\partial I_{1H}}{\partial c_1} + (h - c_1)^2 \cdot (1 - \varphi) \cdot \frac{F}{2} \right], \quad (10)$$

где c_1 находится из выражения (6).

* См. формулу (19) на стр. 369 [1] и (16) на стр. 104 в монографии [2].

Совершенно таким же путем дифференцируя (8) по переменной c_2 , К. Ежек получил:

$$\frac{\partial S_{2b}}{\partial c_2} = -(1+\varphi) \cdot \frac{F}{2}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (7), К. Ежек предложил следующее выражение граничной кривой между областями деформационных состояний II и III:

$$(\lambda_{II-III})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n \cdot I_x} \left[I_{2b} + (h - c_2) \cdot \frac{\partial I_{2b}}{\partial c_2} + (h - c_2)^2 \cdot (1 + \varphi) \cdot \frac{F}{2} \right], \quad (12)$$

где c_2 находится из выражения (8).

В своей монографии [2] К. Ежек использует формулы (10) и (12) при составлении расчетных графиков применительно к внецентренно-сжатым стальным стержням практических профилей. Формулы (10) и (12) являются ошибочными. Например, для прямоугольного сечения,

имеющего высоту h и ширину b , имеем: $F = bh$; $I_x = \frac{1}{12} \cdot bh^3$;

$$S_{1h} = \frac{b}{2}(h - c_1)^2; \quad I_{1h} = \frac{b}{3}(h - c_1)^3; \quad \frac{\partial S_{1h}}{\partial c_1} = -b(h - c_1); \quad \frac{\partial I_{1h}}{\partial c_1} = -b(h - c_1)^2.$$

Подставляя значения F и S_{1h} в (6), после простых преобразований получим:

$$\frac{c_1}{h} = \varphi. \quad (13)$$

Подставляя приведенные выше пластические и геометрические характеристики в (10), в силу (13), для прямоугольного сечения по формуле (10) К. Ежека получим:

$$(\lambda_{I-II})^2 = - \frac{2\pi^2 E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot (1 - \varphi)^3. \quad (14)$$

На основании правильных формул (5) и (6), для прямоугольного сечения получим:

$$(\lambda_{I-II})^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot (1 - \varphi)^2. \quad (15)$$

Выражение (15) было получено К. Ежеком в 1935 году при рассмотрении внецентренно-сжатого стержня прямоугольного сечения [7].

Сопоставляя (14) и (15), нетрудно заметить, что между ними имеется существенное расхождение.

В чем же ошибка К. Ежека?

* См. формулу (30) на стр. 370 [1] и формулу (29) на стр. 107 [2].

Дело в том, что при заданных геометрических и механических характеристиках сечения h , F и φ формулы (2) и (4) и соответственно их частные решения (6) и (8) устанавливают функциональную зависимость между высотой пластической зоны сечения c_i ($i=1,2$) и коэффициентом уменьшения предела текучести внецентренножатого стержня φ .

При дифференцировании выражений (6) и (8) по переменной c_i ($i=1,2$) К. Ежек считал φ постоянной величиной, в то время как при переменном c_i коэффициент φ также является переменной величиной.

В связи с этим очевидно, что выражения (9) и (11) неправильные и лишены физического смысла. Равным образом неверны и выражения (10) и (12), по которым, кстати говоря, получается, что гибкость элемента — мнимая величина, в то время как она по физическому смыслу существенно положительная величина.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

F — площадь сечения внецентренножатого элемента брутто;

I_x — момент инерции сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной плоскости изгиба;

h — высота сечения;

a_1 — кратчайшее расстояние от центра тяжести сечения до наиболее сжатого волокна сечения;

a_2 — кратчайшее расстояние от центра тяжести сечения до наиболее растянутого волокна сечения;

λ — гибкость элемента в плоскости изгиба;

ϵ_c — максимальная относительная деформация сжатых волокон;

ϵ_p — максимальная относительная деформация растянутых волокон;

ϵ_n — относительная деформация, соответствующая пределу пропорциональности;

c_1 — высота (в плоскости изгиба) пластической зоны в сжатой части сечения;

c_2 — высота пластической зоны в растянутой части сечения;

S_{1n} , I_{1n} — статический момент и момент инерции части сечения, расположенной ниже оси 1—1 относительно этой же оси; ось 1—1 проходит по контакту упругой и пластической зон в сжатой части сечения;

S_{2n} , I_{2n} — статический момент и момент инерции части сечения, расположенной выше оси 2—2 относительно этой же оси; ось 2—2 проходит по контакту упругой и пластической зон в растянутой части сечения;

σ_n — предел пропорциональности (текучести) при сжатии (растяжении);

E — модуль продольной упругости материала;

E_1 — модуль упрочнения материала;

$\varphi = \frac{N_{кр}}{F \cdot \sigma_n}$ — отношение критической продольной силы внецентренного сжатого стержня $N_{кр}$ к осевой сжимающей силе текучести $F \cdot \sigma_n$;

$$\psi = \frac{E_1}{E}.$$

Институт стройматериалов и
сооружений АН Армянской ССР

Поступило 22 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ježek K. Die Festigkeit aussermittig gedrückter Stahlstäbe. Bauingenieur, H. 30/31, 1936.
2. Ježek K. Die Festigkeit von Drückstäben aus Stahl, Wien, 1937.
3. Стрелецкий Н. С., Генцев А. Н., Балдин В. А., Белени Е. И., Лексиг Е. Н. Стальные конструкции. М., 1948.
4. Ильющин А. А. Пластичность. М., 1948.
5. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного состояния. М., 1949.
6. Пинаджян В. В. К вопросу о предельном состоянии сжато-изогнутых стержней любой симметричной формы сечения. ДАН Армянской ССР, том XIV, № 4, 1951.
7. Ježek K. Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe. Stahlbau H. 12, 1935.

