

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона

В работе исследуется усадочное напряжение в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом ползучести бетона, когда между напряжениями и деформациями существует нелинейная связь и бетон обладает свойством изменяемости во времени модуля мгновенной деформации.

Общее решение этой задачи по линейной теории ползучести бетона было дано Н. Х. Арутюняном [1] и Швецовым [2].

Ниже, при решении поставленной задачи, будем исходить из нелинейной теории ползучести бетона, предложенной в работе [1].

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим симметрично армированный железобетонный элемент. Обозначим нормальные усадочные напряжения в бетоне в момент времени t с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации через $\delta_b(t)$, а в арматуре — через $\delta_a(t)$. Ползучестью железа будем пренебрегать ввиду ее незначительности по сравнению с ползучестью бетона.

Эти напряжения при любом t , в силу отсутствия внешних сил, должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\sigma_a(t) F_a + \sigma_b(t) F_b = 0, \quad (1.1)$$

где F_a и F_b — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Функцию $S_n(t)$, характеризующую закон изменения процесса усадки, примем в следующей форме [1]:

$$S_n(t) = S_0 \left(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t} \right), \quad (1.2)$$

где S_0 — наибольшее значение усадки, величина которой устанавливается для данного бетона на основании опытных данных; α — показатель, характеризующий скорость нарастания усадки данного бетона во времени, а t_1 — возраст бетона, рассчитываемый от момента его укладки.

Полная продольная деформация бетона $\varepsilon_b(t)$ с учетом его ползучести, согласно [1], будет:

$$\varepsilon_b(t) = S_n(t) + \frac{\sigma_b(t)}{E(t)} - \int_{t_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau -$$

$$-\int_{\tau_1}^t f \left[\sigma_0(\tau) \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.3)$$

где $\frac{1}{E(t)}$ — упруго-мгновенная деформация, а $C(t, \tau)$ — деформация ползучести к моменту времени t , $f \left[\sigma_0(\tau) \right]$ — некоторая определенная из опыта функция $\sigma_0(\tau)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона^{*}.

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона следует:

$$\varepsilon_0(t) = \varepsilon_a(t). \quad (1.4)$$

С другой стороны, имеем:

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \quad (1.5)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Из соотношения (1.3), пользуясь равенствами (1.4) и (1.5), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_a(t)}{E_a} = S_n(t) + \frac{\sigma_0(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ - \int_{\tau_1}^t f \left[\sigma_0(\tau) \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Внеся значение $\sigma_a(t)$ из (1.1) в (1.6), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_n(t) + \\ + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)} + \\ + \mu E_a \int_{\tau_1}^t f \left[\sigma_0(\tau) \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

^{*} Следует отметить, что, согласно [1], функция $f[z]$ должна удовлетворять условию $f[1] = 1$. Если принять $f[z] = \beta_0 z + \beta z^2$, то при условии $\beta_0 + \beta = 1$ будем иметь $f[1] = 1$. Однако здесь для простоты принято $f[z] = z + \beta z^2$, что удовлетворяет этому условию приближенно, так как $f[1] \approx 1 + \beta$.

где $\mu = \frac{F_a}{F_b}$ — процент армирования, $m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени, $E(\tau_1)$ — значение модуля мгновенной деформации бетона в момент времени $t = \tau_1$.

Пользуясь зависимостями (1.1) и (1.7), получим следующее уравнение для определения напряжения в арматуре $\sigma_a(t)$, как функцию времени t :

$$\sigma_a(t) = \frac{E_a}{1 + \mu m(t)} S_n(t) + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_a(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] \frac{1}{1 + \mu m(t)} - \\ - E_a \int_{\tau_1}^t \left[-\mu \sigma_a(\tau) \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)}. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача по определению усадочных напряжений $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ в симметрично армированных элементах с учетом ползучести бетона и изменяемости его модуля мгновенной деформации сводится к решению интегральных уравнений (1.7) и (1.8).

2. *Приведение интегральных уравнений (1.7) и (1.8) к дифференциальным уравнениям.* Закон изменения меры ползучести $C(t, \tau)$ бетона примем в следующей форме (1):

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right], \quad (2.1)$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая функция возраста материала τ , определяемая из опыта и характеризующая процесс старения данного бетона, а γ — постоянная.

Внеся значение $C(t, \tau)$ из (2.1) в (1.7), получим:

$$\sigma_b(t) = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S_n(t) + \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_b(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\varphi(\tau) \left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right) \right] \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)}. \quad (2.2)$$

Умножив уравнение (2.2) на $1 + \mu m(t)$ и продифференцировав по t , получим:

$$\left[1 + \mu m(t) \right] \sigma'_b(t) = - \mu E_a S'_n(t) + \\ + \mu E_a \gamma \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_b(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\varphi(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} \right] d\tau - \mu E_a \gamma \left[\sigma_b(t) \right] \varphi(t). \quad (2.3)$$

Отсюда, определяя значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}] d\tau$$

и подставляя в исходное уравнение (2.2), находим:

$$\begin{aligned} \left[1 + \mu m(t)\right] \sigma_0(t) = & -\mu E_a S_n(t) + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau + \\ & + \mu E_a \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \varphi'(\tau) - \frac{1}{\gamma} \sigma_0'(t) \left[1 + \mu m(t)\right] - \\ & - \frac{\mu E_a}{\gamma} S_n'(t) - \mu E_a f[\sigma_0(t)] \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дифференцируя выражение (2.4) еще раз по t , после некоторых преобразований приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_0'(t) + \left[\gamma + \frac{\mu m'(t)}{1 + \mu m(t)}\right] \sigma_0(t) + \frac{\mu E_a \gamma}{1 + \mu m(t)} f'[\sigma_0(t)] \varphi(t) = \\ = -\frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \left[\gamma S_n'(t) + S_n''(t)\right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пользуясь зависимостью (1.1), для $\sigma_a(t)$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_a'(t) + \left[\gamma + \frac{\mu m'(t)}{1 + \mu m(t)}\right] \sigma_a(t) - \frac{E_a \gamma \varphi(t)}{1 + \mu m(t)} f'[-\mu \sigma_a(t)] = \\ = \frac{E_a}{1 + \mu m(t)} \left[S_n''(t) + \gamma S_n'(t)\right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, решение исходных интегральных уравнений (1.7) и (1.8) сводится к решению дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6).

Положим, что $f(\sigma)$ является степенной функцией следующего вида:

$$f(\sigma) = \sigma + \beta \sigma^2 \quad (2.7)$$

и характерна тем, что значение параметра β определяет степень нелинейности ползучести бетона. Тогда будем иметь:

$$f[\sigma_0(\tau)] = \sigma_0(\tau) + \beta \sigma_0^2(\tau), \quad (2.8)$$

$$f[-\mu \sigma_a(t)] = -\mu \sigma_a(t) + \beta \mu^2 \sigma_a^2(t). \quad (2.9)$$

Подставляя эти значения из (2.8), (2.9) в (2.5) и (2.6), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_0^*(t) + \left\{ \gamma \left[1 + \frac{\mu E_a \varphi(t)}{1 + \mu m(t)} \right] + \frac{\mu m'(t)}{1 + \mu m(t)} \right\} \sigma_0'(t) + \\ + 2\beta \frac{\mu E_a \gamma \varphi(t)}{1 + \mu m(t)} \sigma_0(t) \sigma_0'(t) = \\ = - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} \left[S_n^*(t) + \gamma S_n'(t) \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_a^*(t) + \left\{ \gamma \left[1 + \frac{\mu E_a \varphi(t)}{1 + \mu m(t)} \right] + \frac{\mu m'(t)}{1 + \mu m(t)} \right\} \sigma_a'(t) - \\ - 2\beta \mu^2 \frac{E_a \gamma \varphi(t)}{1 + \mu m(t)} \sigma_a(t) \sigma_a'(t) = \\ = \frac{E_a}{1 + \mu m(t)} \left[S_n^*(t) + \gamma S_n'(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, задача определения усадочных напряжений $\sigma_0(t)$ и $\sigma_a(t)$ в симметрично армированных элементах с учетом ползучести бетона и изменяемости его модуля мгновенной деформации сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (2.10) и (2.11).

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона изменяется во времени незначительно и практически его можно считать постоянным, т. е. $E = E_0$. Тогда уравнения (2.10) и (2.11) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_0^*(t) + \gamma \left[1 + \frac{\mu E_a \varphi(t)}{1 + \mu m_0} \right] \sigma_0'(t) + 2\beta \mu \frac{E_a \gamma \varphi(t)}{1 + \mu m_0} \sigma_0(t) \sigma_0'(t) = \\ = - \mu \frac{E_a}{1 + \mu m_0} \left[S_n^*(t) + \gamma S_n'(t) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_a^*(t) + \gamma \left[1 + \frac{\mu E_a \varphi(t)}{1 + \mu m_0} \right] \sigma_a'(t) - 2\beta \mu^2 \frac{E_a \gamma \varphi(t)}{1 + \mu m_0} \sigma_a(t) \sigma_a'(t) = \\ = \frac{E_a}{1 + \mu m_0} \left[S_n^*(t) + \gamma S_n'(t) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $m_0 = E_a / E_0$ — постоянная величина.

Уравнения (2.12) и (2.13) определяют усадочные напряжения в арматуре и бетоне в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом только ползучести бетона.

Исследования показывают [1], что для $\varphi(\tau)$ можно принять следующее выражение:

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \quad (2.14)$$

где C_0 — предельное значение меры ползучести для данного бетона,

A_1 —некоторый параметр, зависящий от свойства и условий старения данного бетона.

Если в уравнениях (2.12) и (2.13) заменить функцию ее предельным значением $\varphi(\infty)=C_0$, то полученные уравнения будут характеризовать состояние ползучести для старого или уже стареющего бетона. В этом случае уравнения (2.12) и (2.13) примут вид:

$$\sigma'_0(t) + \gamma(1+A)\sigma'_0(t) + 2A\beta\gamma\sigma_0(t)\sigma'_0(t) = -\frac{A}{C_0} \left[S'_n(t) + \gamma S'_n(t) \right], \quad (2.15)$$

$$\sigma'_a(t) + \gamma(1+A)\sigma'_a(t) - 2A\beta\gamma\mu\sigma_a(t)\sigma'_a(t) = \frac{A}{\mu C_0} \left[S'_n(t) + \gamma S'_n(t) \right], \quad (2.16)$$

где

$$A = \frac{\mu E_a C_0}{1 + \mu m_0}.$$

3. *Интегрирование уравнений (2.15) и (2.16).* Заметим, что, согласно (2.2) и (2.3), для $\sigma_0(t)$ имеют место следующие начальные условия:

$$\sigma_0(\tau_1) = 0, \quad \sigma'_0(\tau_1) = -\frac{A}{C_0} S'_n(\tau_1). \quad (3.1)$$

Аналогичные условия получим и для $\sigma_a(t)$:

$$\sigma_a(\tau_1) = 0, \quad \sigma'_a(\tau_1) = \frac{A}{\mu C_0} S'_n(\tau_1). \quad (3.2)$$

Пользуясь начальными условиями (3.1) и (3.2), можно снизить порядок дифференциальных уравнений (2.15) и (2.16) и привести их к виду

$$\sigma'_0(t) + \gamma(1+A)\sigma_0(t) + A\beta\gamma\sigma_0^2(t) + \frac{A}{C_0} \left[S'_n(t) + \gamma S'_n(t) \right] = 0, \quad (3.3)$$

$$\sigma'_a(t) + \gamma(1+A)\sigma_a(t) - A\beta\gamma\mu\sigma_a^2(t) - \frac{A}{\mu C_0} \left[S'_n(t) + \gamma S'_n(t) \right] = 0. \quad (3.4)$$

Если значение $S_n(t)$ из (1.2) подставить в уравнения (3.3) и (3.4), то они примут следующий вид:

$$\sigma'_0(t) + \gamma(1+A)\sigma_0(t) + A\beta\gamma\sigma_0^2(t) + \frac{AS_0}{C_0} \left[(\alpha-\gamma)e^{-\alpha t} + \gamma e^{-\alpha \tau_1} \right] = 0, \quad (3.5)$$

$$\sigma'_a(t) + \gamma(1+A)\sigma_a(t) - A\beta\gamma\mu\sigma_a^2(t) - \frac{AS_0}{\mu C_0} \left[(\alpha-\gamma)e^{-\alpha t} + \gamma e^{-\alpha \tau_1} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Эти уравнения являются обобщенными уравнениями Рикати. Переходя к новым неизвестным $u(t)$ и $v(t)$ посредством соотношений

$$\sigma_6(t) = \frac{1}{A \beta \gamma} \frac{u'(t)}{u(t)}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_2(t) = -\frac{1}{A \beta \gamma \mu} \frac{v'(t)}{v(t)}, \quad (3.8)$$

уравнения (3.5) и (3.6) приведем к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma(1+A) \frac{du}{dt} + A \beta \gamma \frac{A S_0}{C_0} \left[(\alpha - \gamma) e^{-\alpha t} + \gamma e^{-\alpha \tau_1} \right] u = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \gamma(1+A) \frac{dv}{dt} + A \beta \gamma \frac{A S_0}{C_0} \left[(\alpha - \gamma) e^{-\alpha t} + \gamma e^{-\alpha \tau_1} \right] v = 0. \quad (3.10)$$

Займемся интегрированием и исследованием одного из этих уравнений.

Введем обозначения

$$a = -\frac{\gamma(1+A)}{\alpha}, \quad b = \frac{A^2 \beta \gamma S_0}{C_0 \alpha^2} (\alpha - \gamma),$$

$$c = \frac{A^2 \beta \gamma^2 S_0}{C_0 \alpha^2} e^{-\alpha \tau_1}, \quad x = -\alpha t. \quad (3.11)$$

Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + (b e^x + c) u = 0, \quad (3.12)$$

общее решение которого будет (3.4):

$$u(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \left[C_1 I_\nu \left(2\sqrt{b} e^{\frac{x}{2}} \right) + C_2 L_\nu \left(2\sqrt{b} e^{\frac{x}{2}} \right) \right], \quad (3.13)$$

где $I_\nu \left(2\sqrt{b} e^{\frac{x}{2}} \right)$ и $L_\nu \left(2\sqrt{b} e^{\frac{x}{2}} \right)$ — функции Бесселя первого ряда с произвольным индексом

$$\nu = \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{(1+A)^2 - \frac{4 A^2 \beta S_0}{C_0} e^{-\alpha \tau_1}},$$

а C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Если $\alpha > \gamma$, то аргумент бesselевых функций будет действительным числом, а если $\alpha < \gamma$, то аргумент будет мнимым числом.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \gamma$.

Переходя к переменной t , из (3.13) получим:

$$u(t) = e^{\frac{\alpha \gamma}{2} t} \left[C_1 I_\nu \left(2\sqrt{b} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \right) + C_2 L_\nu \left(2\sqrt{b} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Подставляя значение $u(t)$ и ее производной из (3.14) в (3.7), найдем:

$$\sigma_0(t) = -\frac{\alpha}{2A\beta\gamma} \left\{ \frac{C_1 \left[k I_{\nu-1}(k) - \nu I_{\nu}(k) \right] + C_2 \left[k I_{-(\nu+1)}(k) + \nu I_{-\nu}(k) \right]}{C_1 I_{\nu}(k) + C_2 I_{-\nu}(k)} - a \right\}, \quad (3.15)$$

где $k = 2\sqrt{be}^{-\frac{\alpha t}{2}}$.

Если числитель и знаменатель этой дроби разделить на C_1 и отношение C_2 и C_1 обозначить через B , то выражение (3.15) можно записать в виде:

$$\sigma_0(t) = -\frac{\alpha}{2A\beta\gamma} \left[k \frac{I_{\nu-1}(k) - B I_{1-\nu}(k)}{I_{\nu}(k) + B I_{-\nu}(k)} - (a + \nu) \right]. \quad (3.16)$$

При этом использованы рекуррентные соотношения для бесселевых функций [5].

Пользуясь начальными условиями (3.1), найдем:

$$B = \frac{k_1 I_{\nu-1}(k_1) - (a + \nu) I_{\nu}(k_1)}{k_1 I_{1-\nu}(k_1) + (a + \nu) I_{-\nu}(k_1)}, \quad (3.17)$$

где $k_1 = 2\sqrt{be}^{-\frac{\alpha t_1}{2}}$.

Аналогичным путем получим решение уравнения (3.10):

$$\sigma_a(t) = \frac{\alpha}{2A\beta\gamma\mu} \left[k \frac{I_{\nu-1}(k) - B I_{1-\nu}(k)}{I_{\nu}(k) + B I_{-\nu}(k)} - (a + \nu) \right]. \quad (3.18)$$

Выражения (3.16) и (3.18) определяют закон изменения усадочных напряжений в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом ползучести бетона, когда $\alpha > \gamma$.

Если $\alpha < \gamma$, то аргумент бесселевых функций будет мнимым числом. В этом случае желательно представить решение в вещественном виде, поэтому вместо функции $I_{\nu}(ki)$ применяется функция

$$L_{\nu}(k) = e^{-\frac{1}{2} \pi i \nu} I_{\nu}(ki) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} k\right)^m}{\Gamma(m + \nu + 1) \Gamma(m + 1)},$$

которая является вещественной функцией от аргумента k и называется обобщенной функцией Бесселя первого рода.

Тогда решения уравнений (3.9) и (3.10) можно представить в форме:

$$\sigma_0(t) = -\frac{\alpha}{2A\beta\gamma} \left[k \frac{L_{\nu-1}(k) + B_1 L_{1-\nu}(k)}{L_{\nu}(k) + B_1 L_{-\nu}(k)} - (a + \nu) \right], \quad (3.19)$$

$$\sigma_a(t) = \frac{\alpha}{2A\beta\gamma\mu} \left[k \frac{L_{\nu-1}(k) + B_1 L_{1-\nu}(k)}{L_{\nu}(k) + B_1 L_{-\nu}(k)} - (a + \nu) \right], \quad (3.20)$$

$$\text{где } B_1 = \frac{k_1 L_{v-1}(k_1) - (a+v) L_v(k_1)}{k_1 L_{i-v}(k_1) - (a+v) L_{-v}(k_1)}. \quad (3.21)$$

Выражения (3.19) и (3.20) определяют закон изменения усадочных напряжений в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом ползучести бетона, когда $\alpha < \gamma$.

В формулах (3.16) и (3.19) отрицательный знак соответствует растяжению.

Нетрудно показать, что если $S_0 < 0$, то выражения усадочных напряжений будут вышеполученные, только с обратным знаком. Действительно, если в уравнениях (3.5) и (3.6) и их решениях (3.16), (3.18), (3.19), (3.20) $\sigma_0(t)$ и $\sigma_a(t)$ заменить соответственно через $-\sigma_0(t)$ и $-\sigma_a(t)$, а β через $-\beta$, то они остаются инвариантами.

Рассмотрим еще случай, когда $\alpha = \gamma$. Тогда уравнение (3.5) примет следующий вид:

$$\sigma_0'(t) + \gamma(1+A)\sigma_0(t) + A\beta\gamma\sigma_0^2(t) + \frac{A\gamma S_0}{C_0} e^{-\gamma t} = 0. \quad (3.22)$$

Решение этого уравнения будет

$$\sigma_0(t) = -\frac{\gamma(1+A) - \nu_1}{2A\beta\gamma} + D \frac{\nu_1 e^{-\nu_1 t}}{1 - DA\beta\gamma e^{-\nu_1 t}}, \quad (3.23)$$

где D — постоянная интегрирования, а

$$\nu_1 = \sqrt{\gamma^2(1+A)^2 - \frac{A\gamma S_0}{C_0} e^{-\gamma t}}. \quad (3.24)$$

Пользуясь начальными условиями (3.1), можно решению (3.23) придать следующий вид:

$$\sigma_0(t) = -\frac{\gamma(1+A) - \nu_1}{2A\beta\gamma} \frac{1 - e^{-\nu_1(t-\tau_1)}}{1 - \frac{\gamma(1+A) - \nu_1}{\gamma(1+A) + \nu_1} e^{-\nu_1(t-\tau_1)}}. \quad (3.25)$$

При линейной ползучести уравнение (3.5) имеет вид:

$$\sigma_0'(t) + \gamma(1+A)\sigma_0(t) + \frac{A\gamma S_0}{C_0} e^{-\gamma t} = 0. \quad (3.26)$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание начальные условия (3.1), находим:

$$\sigma_0(t) = -\frac{A S_0}{(1+A) C_0} e^{-\gamma t} \left[1 - e^{-\gamma(1+A)(t-\tau_1)} \right]. \quad (3.27)$$

Аналогичные результаты получим и для $\delta_a(t)$. Обозначим усадочные напряжения в бетоне и в арматуре при линейной ползучести через $\delta_0^*(t)$ и $\delta_a^*(t)$, а при нелинейной ползучести — через $\sigma_0(t)$ и $\sigma_a(t)$. Кроме того, пусть

$$H_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{\sigma_0^*(t)}, \quad H_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a^*(t)}. \quad (3.28)$$

Если в решениях (3.25) и (3.27) подставить $t=\infty$, то соответственно будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_0(\infty) &= -\frac{\gamma(1+A)-\nu_1}{2A\beta\gamma}, \\ \sigma_0^*(\infty) &= -\frac{AS_0}{(1+A)C_0}e^{-\alpha\tau_1},\end{aligned}\quad (3.29)$$

откуда непосредственно следует, что

$$\frac{1}{H_0(\infty)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\nu_1}{\gamma(1+A)} \right], \quad (3.30)$$

и в силу условия (так как $S_0 > 0$)

$$\nu_1 < \gamma(1+A),$$

получим

$$|\sigma_0(\infty)| > |\sigma_0^*(\infty)|.$$

Ниже приводятся таблицы (1—3), которые характеризуют закон изменения усадочных напряжений в бетоне и в арматуре в симметрично армированных элементах в зависимости от интенсивности меры ползучести $C(t, \tau)$, возраста бетона τ_1 , меры нелинейности β , процента армирования μ , при $\alpha=\gamma=0,026$.

Характеристики меры ползучести бетона приняты следующие:

$$\begin{aligned}C_0 &= 0,9 \cdot 10^{-5}, \quad E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad m_0 = 10, \\ S_0 &= 2 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = 0,026.\end{aligned}$$

Таблица 1

Значения усадочных напряжений в бетоне $\sigma_0(t)$ и арматуре $\sigma_a(t)$ и коэффициентов $H_0(t)$ и $H_a(t)$ при $\tau_1=1$ дню, $\mu=1\%$, $\beta=0,01$ и $\alpha=0,026$

t	$\frac{\sigma_0^*(t)}{S_0 E_0}$	$\frac{\sigma_0(t)}{S_0 E_0}$	$H_0(t)$	$\frac{\sigma_a^*(t)}{S_0 E_a}$	$\frac{\sigma_a(t)}{S_0 E_a}$	$H_a(t)$
7 дней	-0,012634	-0,012636	1,0001	0,12634	0,12636	1,0001
14 дней	-0,02475	-0,02476	1,0004	0,2475	0,2476	1,0004
28 дней	-0,0425	-0,0426	1,002	0,425	0,426	1,002
3 мес.	-0,0710	-0,0712	1,003	0,710	0,712	1,003
1 год	-0,0761	-0,0764	1,004	0,761	0,764	1,004
∞	-0,0761	-0,0764	1,004	0,761	0,764	1,004

Таблица 2

Значения усадочных напряжений в бетоне $\varepsilon_0(t)$ в зависимости от времени t и процента армирования μ , при $\tau_1=1$ дню; $\beta=0,12$ и $\alpha=\gamma=0,026$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3\%$
7 дней	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,01263	-0,01803	-0,02293	-0,0274	-0,0314
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,01264	-0,01805	-0,02297	-0,0275	-0,0316
	$H_0(t)$	1,0007	1,001	1,0017	1,004	1,006
14 дней	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,02475	-0,03512	-0,0444	-0,0528	-0,0604
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,02481	-0,03528	-0,0447	-0,0534	-0,0612
	$H_0(t)$	1,002	1,004	1,007	1,011	1,013
28 дней	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,0425	-0,0597	-0,0748	-0,0881	-0,1000
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,0428	-0,0606	-0,0767	-0,0913	-0,1048
	$H_0(t)$	1,007	1,015	1,025	1,036	1,048
3 мес.	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,0710	-0,0979	-0,1187	-0,1371	-0,1529
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,0736	-0,1042	-0,1332	-0,1617	-0,1906
	$H_0(t)$	1,036	1,074	1,122	1,179	1,246
1 год	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,0761	-0,1029	-0,1249	-0,1433	-0,1589
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,0805	-0,1150	-0,1497	-0,1882	-0,2384
	$H_0(t)$	1,058	1,117	1,199	1,313	1,500
∞	$\varepsilon_0^*(t)/S_0 E_0$	-0,0761	-0,1029	-0,1249	-0,1433	-0,1589
	$\varepsilon_0(t)/S_0 E_0$	-0,0805	-0,1150	-0,1498	-0,1884	-0,2400
	$H_0(t)$	1,058	1,117	1,200	1,314	1,510

Таблица 3

Значения усадочных напряжений в арматуре $\sigma_a(t)$ в зависимости от времени t и процента армирования μ , при $\tau_1=1$ дню, $\beta=0,12$ и $\alpha-\gamma=0,026$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1,5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2,5\%$	$\mu=3\%$
7 дней	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,1263	0,12020	0,11465	0,1096	0,1047
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,1264	0,12033	0,11485	0,1100	0,1053
	$H_a(t)$	1,0007	1,001	1,0017	1,004	1,006
14 дней	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,2475	0,23413	0,2220	0,2112	0,2013
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,2481	0,23520	0,2235	0,2136	0,2040
	$H_a(t)$	1,002	1,004	1,007	1,011	1,013
28 дней	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,425	0,3980	0,3740	0,3524	0,3333
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,428	0,4040	0,3835	0,3652	0,3493
	$H_a(t)$	1,007	1,015	1,025	1,036	1,048
3 мес.	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,710	0,6467	0,5935	0,5481	0,5097
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,736	0,6947	0,6660	0,6468	0,6353
	$H_a(t)$	1,036	1,074	1,122	1,179	1,246
1 год	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,761	0,6860	0,6245	0,5732	0,5297
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,805	0,7667	0,7485	0,7528	0,7947
	$H_a(t)$	1,058	1,117	1,199	1,313	1,500
∞	$\sigma_a^*(t)/S_0 E_a$	0,761	0,6860	0,6245	0,5732	0,5297
	$\sigma_a(t)/S_0 E_a$	0,803	0,7667	0,7490	0,7536	0,8000
	$H_a(t)$	1,058	1,117	1,200	1,314	1,510

Из этих таблиц видно, что: 1) абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне $\sigma_b(t)$ и в арматуре $\sigma_a(t)$ с течением времени быстро возрастает, причем это возрастание зависит от процента армирования μ ; 2) возрастание напряжений $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ происходит только в течение первых трех месяцев, после чего изменения этих величин почти не происходит; 3) при нелинейной ползучести абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне $\sigma_b(t)$ и в арматуре $\sigma_a(t)$ больше, чем при линейной ползучести, т. е.

$$\begin{aligned} \left[\sigma_b(t) - \sigma_b^*(t) \right] &> 0. \\ \left[\sigma_a(t) - \sigma_a^*(t) \right] &> 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Это возрастание усадочных напряжений доходит до 51 процента; 4) чем больше меры нелинейности β , тем больше (по абсолютной величине) и усадочные напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$.

Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 21 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Москва, 1952.
2. Швецов А. В. Метод определения собственных напряжений в бетонных и железобетонных элементах с учетом изменяемости во времени деформативных свойств бетона. Автореферат диссертации, 1951.
3. Калксе Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. иностран. лит., 1951.
4. Görtler H. Zeitschr. f. angew. Math., Mech., 23 (1943).
5. Watson G. H. Теория бесселевых функций. Госиздат, Москва, 1949.

Մ. Մ. Մանուկյան

ԿԾԿՄԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱՐՄԱՏՈՒՐԱՎՈՐՎԱԾ ԵՐԿԱՅԱՐԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՊԶ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում են սիմետրիկ արմատավորված երկաթաբետոն էլեմենտներում կծկման լարումները, երբ լարման և սողքի ղեֆորմացիայի միջև գոյություն ունի ոչ-զծային կապ: Բացի դրանից, ընդունվում է, որ բետոնի ակնթարթային ղեֆորմացիայի մոդուլը՝ $E(t)$ ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է:

Այս խնդրի ընդհանուր լուծումը բետոնի զծային սողքի ղեպքում ավել է ն. Ս. Հարությունյանը [1]:

Հոգվածում ցույց է տրվում, որ բետոնի և արմատաւրայի կծկման նորմալ լարումների որոշումը բերվում է (1,7) և (1,8) ինտեգրալ հավասարումների և կամ՝ փոփոխական գործակիցներով 2-րդ կարգի ոչ-գծային (2,15) և (12,16) դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները դանկլուն:

Ընդունելով $E = \text{const}$, այս հավասարումներին տրվում է (3,5) և (3,6) տեսքը, որոնք հանդիսանում են Ռիկատիի ընդհանրացած դիֆերենցիալ հավասարումները: (3,5) և (3,6) հավասարումների լուծումները ստացվում են (3,16) և (3,18) տեսքով, երբ $\alpha > \gamma$ և կամ՝ (3,19) և (3,20) տեսքով, երբ $\alpha < \gamma$: Առաջին դեպքում խնդրի լուծումը, այսինքն՝ բետոնի և արմատաւրայի կծկման լարումների փոփոխման օրենքը, տրվում է իրական արգումենտ ունեցող՝ Բեսսելի ֆունկցիաների միջոցով, իսկ 2-րդ դեպքում՝ կեղծ արգումենտ ունեցող Բեսսելի ֆունկցիաներով: Հոգվածում քննարկվում է նաև մասնավոր դեպք, երբ $\alpha = \gamma$:

Կազմված են համապատասխան աղյուսակներ: