

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. К. Карапетян

Метод определения параметров внутреннего трения
материала при свободных колебаниях

Вопросу изучения внутреннего трения твердых тел посвящено очень много исследований. Однако, несмотря на это, на сегодня пока что нет окончательно разработанной теории внутреннего трения.

Еще со времен Фохта при составлении дифференциальных уравнений колебаний с затуханием, вызванным внутренним трением, силу трения принимают пропорциональной первой степени скорости деформации [12]. Непосредственных опытов, подтверждающих такую зависимость, не имеется.

Некоторые исследователи „в развитие“ гипотезы Фохта стали высказывать мнение о степенной зависимости силы внутреннего трения от скорости деформации. Так, например, Е. Б. Луниц, на основании результатов проведенных им экспериментов, пришел к выводу, что сила внутреннего трения должна зависеть от n -ой степени скорости деформации; в частности, для стали он получил $n = 2,3 \div 2,15$ [2, 3].

Справедливо отмечает Н. Н. Давиденков, что введением такого коэффициента n вместо 1 еще более усиливается зависимость затухания от скорости, между тем как физическое представление заставляет отказываться от какого бы то ни было связывания внутреннего трения со скоростью или частотой колебаний. Исходя из замкнутой петли гистерезиса и считая, что процесс колебаний должен описываться в соответствии с контуром петли, Н. Н. Давиденков приходит к выводу, что сила внутреннего трения зависит от деформации в нелинейной форме [1].

Пользуясь гипотезой Н. Н. Давиденкова, Г. С. Писаренко решил ряд интересных технических задач. При этом он пользовался методом разложения по степеням малого параметра. Для того, чтобы выразить уравнения кривых, образующих петлю гистерезиса аналитически, в уравнение петли гистерезиса им введены некоторые постоянные параметры, которые определяются из экспериментально полученных виброграмм затухающих свободных колебаний по их логарифмическому декременту [8, 9, 10].

Я. Г. Пановко, сохранив основную идею Н. Н. Давиденкова в отношении нелинейной связи силы внутреннего трения с амплитудой деформации и приняв эллиптическую форму петли гистерезиса, разработал метод учета гистерезисных потерь при колебаниях [7].

Е. С. Сорокиным предложена гипотеза внутреннего трения, где

автор исходит из эллиптической формы петли гистерезиса, соответствующей случаю однотонных стационарных колебаний. Гипотеза эта приводит к столь же простым результатам, что и гипотеза Фохта и, вместе с тем, более правильно отражает природу явления [11].

Исследования А. Г. Назарова показали, что гипотеза Е. С. Сорокина значительно более широкая, а именно — результаты его гипотезы могут быть применены для произвольного закона колебаний, и окончательно гипотеза эта может быть сформулирована так: комплексный вектор напряжений опережает комплексный вектор деформаций на постоянный фазовый угол [4, 6].

В общем случае колебания упругих систем с учетом внутреннего трения описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, решение которых даже приближенными методами связано с большими затруднениями [9].

С целью устранения этих затруднений, А. Г. Назаровым предложен метод учета рассеяния энергии, вызванного внутренним трением. В основе этого метода положено следующее. Периоды свободных колебаний упругих систем и соответствующие им фундаментальные функции, например, при изгибных и крутильных колебаниях, вычисленные без учета энергии рассеяния, достаточно точно отвечают действительности, т. е. при наличии фактора рассеяния. Поэтому они определяются из линейных дифференциальных уравнений, не содержащих членов, учитывающих энергию рассеяния. Установление же закона затухания колебаний осуществляется путем рассматривания потери энергии за полный цикл или полцикл колебаний [5].

В настоящей работе, пользуясь отмеченным [5], автором разработан метод определения параметров, характеризующих энергию рассеяния, отвечающую нормальным и тангенциальным напряжениям при изгибных и крутильных колебаниях. При этом принято, что основной причиной рассеяния энергии при свободных колебаниях упругой системы является упругий гистерезис материала.

Энергия системы в крайних отклоненных положениях выражается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} A\dot{f}_1^2 &= A\dot{f}_2^2 + \Omega_1, \\ A\dot{f}_2^2 &= A\dot{f}_3^2 + \Omega_2, \\ &\dots \dots \dots \\ A\dot{f}_i^2 &= A\dot{f}_{i+1}^2 + \Omega_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$ — энергии рассеяния, а f_1, f_2, \dots, f_i — максимальные прогибы или максимальные углы скручивания в каждый полупериод колебаний.

Обозначим через ω_1 энергию рассеяния, отнесенную к единице объема материала при нагрузке от нормального напряжения $\sigma = 0$ до $\sigma = [\sigma_0]$ и последующей разгрузке до $\sigma = 0$. Чем больше максимальное напряжение σ_0 , тем более раскрытие петли гистерезиса и, стало быть, тем больше энергия рассеяния ω_1 .

Энергию рассеяния ω_1 представляем в виде следующей степенной зависимости от σ_0 :

$$\omega_1 = a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_0^2 + a_3 \sigma_0^3 + \dots = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_0^i. \quad (2)$$

Вид функции (2) можно установить экспериментальным путём.

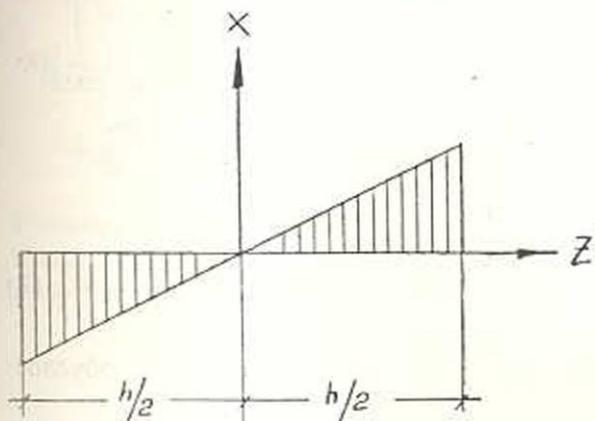
Для тангенциальных напряжений устанавливается аналогичная зависимость:

$$\omega_2 = c_1 \tau_0 + c_2 \tau_0^2 + c_3 \tau_0^3 + \dots = \sum_{i=1}^k c_i \tau_0^i. \quad (3)$$

Зная ω_1 и ω_2 можно вычислить значения полных энергий рассеяния $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, обусловленных нормальными и тангенциальными напряжениями.

Определим, например, значения $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ для балки постоянного поперечного сечения шириной b , высотой h и длиной l , совершающей поперечные колебания.

Распределение нормальных и тангенциальных напряжений в крайнем отклоненном положении балки показано на фигурах 1 и 2.



Фиг. 1

Считаем, что колебания происходят в одной из главных плоскостей изгиба балки и что размеры поперечного сечения балки малы по сравнению с ее длиной. В таком случае для определения $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ можно пользоваться уравнением упругой линии изогнутого стержня, полученного без учета энергии рассеяния.

Вычислим значение $\Omega^{(1)}$. Максимальное краевое напряжение:

$$\sigma_{0 \max} = \frac{M}{w} = f \frac{E l}{w} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} E f \frac{d^2 y}{dx^2} h.$$

Напряжение σ_0 в точке z растянутой части бруса

$$\sigma_0 = E f \frac{d^2 y}{dx^2} z. \quad (4)$$

Энергия рассеяния для дифференциального элемента dx при равенстве площадей петель гистерезиса для растянутой и сжатой зон запишется в виде:

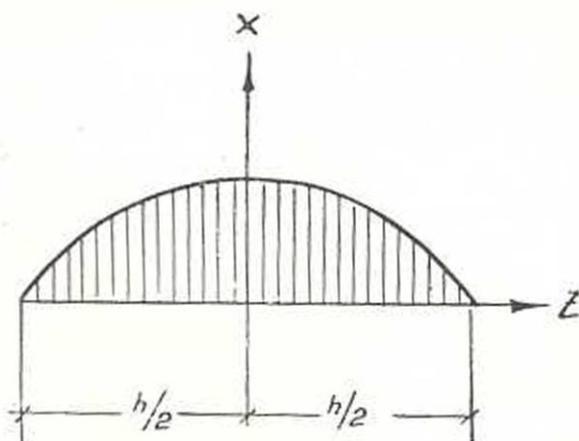
$$d\Omega^{(1)} = 2b dx \int_0^{h/2} \omega_1 dz. \quad (5)$$

Подставляя в (2) значение σ_0 из (4) и осуществляя интегрирование (5), получим

$$d\Omega^{(1)} = 2b dx \sum_{i=1}^n a_i \left[E i \frac{d^2 y}{dx^2} \right]^i \frac{h^{i+1}}{2^{i+1} (i+1)}.$$

Полная энергия рассеяния, обусловленная нормальными напряжениями, будет:

$$\Omega^{(1)} = 2b \int_0^l \sum_{i=1}^n a_i \left[E i \frac{d^2 y}{dx^2} \right]^i \frac{h^{i+1}}{2^{i+1} (i+1)} dx. \quad (6)$$



Фиг. 2.

Определим теперь значение $\Omega^{(2)}$. Известно, что

$$\tau_0 = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Перерезывающая сила:

$$Q = E I i \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Тогда, имея:

$$\tau_0 = \frac{E}{2} i \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad (7)$$

получим следующее выражение полной энергии рассеяния, обусловленной тангенциальными напряжениями

$$\Omega^{(2)} = 2b \int_0^l dx \int_0^{h/2} \sum_{i=1}^k c_i \left[\frac{E}{2} i \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]^i dz. \quad (8)$$

При вычислении $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, мы исходили из допущения о независимости энергий рассеяния ω_1 и ω_2 от сосуществования σ_0 и τ_0 .

Полная энергия рассеяния за каждый полупериод колебаний, в силу равенства площадей петель гистерезиса относительно оси 0—0 (фиг. 3) при переходе от одного крайнего отклоненного положения $f_i y(x)$ в противоположное $-f_{i+1} y(x)$, будет равна

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_i) + \Omega^{(2)}(f_i) \right] + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_{i+1}) + \Omega^{(2)}(f_{i+1}) \right]. \quad (9)$$

Подставив полученные значения полных энергий рассеяния (9)

в рекуррентные соотношения (1), получим систему уравнений, откуда, имея экспериментально измеренные величины максимальных прогибов, можно определить параметры a_i и c_i , характеризующие энергию рассеяния от максимальных нормальных и тангенциальных напряжений.

В выражения (9) для $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$ входят максимальные прогибы f_1, f_2, \dots, f_i в различных степенях. Имея величину начального максимального прогиба f_1 , можно последовательно определить значения f_2, f_3, \dots, f_i из алгебраических уравнений, наивысшая степень которых зависит от наивысших степеней σ_0 и τ_0 , входящих в (2) и (3).

Во избежание решения алгебраических уравнений высоких степеней, воспользуемся тем, что f_i мало отличается от f_{i+1} . Перенишем, например, первую строчку (1) с подстановкой значения Ω_i из (9). Получим

$$Af_1^2 = Af_2^2 + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right] + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_2) + \Omega^{(2)}(f_2) \right]. \quad (10)$$

Примем, что $f_2 = f_1 + \Delta f$, причем Δf настолько мало, что его степенями, начиная со второй, можно пренебречь.

Тогда (10) перенишется в виде:

$$2Af_1\Delta f + [\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right] \Delta f = 0,$$

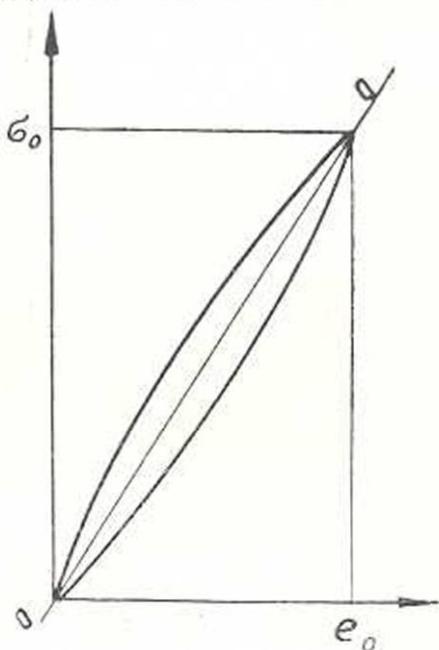
откуда

$$\Delta f = - \frac{\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1)}{2Af_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right]}. \quad (11)$$

При более крутом затухании свободных колебаний можно сохранить еще члены с $(\Delta f)^2$, что приведет к квадратным уравнениям.

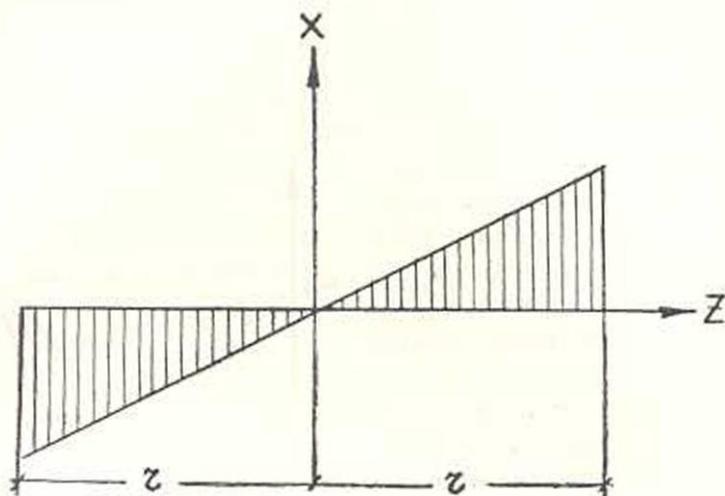
По аналогичной методике можно определить энергию рассеяния при крутильных колебаниях.

Рассмотрим для примера стержень постоянного поперечного сечения диаметром d и длиной l .



Фиг. 3.

Распределение касательных напряжений по сечению образца показано на фигуре 4.



Фиг. 4.

Обозначив угол скручивания образца через $\varphi(x)$, получим следующее значение максимального краевого напряжения

$$\tau_{\text{max}} = r \frac{GJ_p}{W_p} \frac{d\varphi}{dx} = GJ \frac{d\varphi}{dx} \cdot r.$$

Напряжение τ_0 в точке z сечения образца будет

$$\tau_0 = GJ \frac{d\varphi}{dx} z. \quad (12)$$

Энергия рассеяния для дифференциального элемента стержня dx запишется так

$$d\Omega = dx \int_0^r 2 \pi \omega z dz = 2 \pi dx \int_0^r \omega z dz. \quad (13)$$

Подставляя в (3) значение τ_0 из (12) и произведя интегрирование (13), получим

$$d\Omega = 2\pi dx \sum_{i=1}^k c_i \left[GJ \frac{d\varphi}{dx} \right]^i \frac{r^{i+2}}{i+2}.$$

Полная энергия рассеяния будет

$$\Omega = 2\pi \int_0^l \sum_{i=1}^k c_i \left[GJ \frac{d\varphi}{dx} \right]^i \frac{r^{i+2}}{i+2} dx.$$

Остальные операции будут такими же, что и в случае поперечных колебаний.

Таким же образом можно разработать методику определения параметров внутреннего трения и для других видов напряженного состояния материала при колебаниях.

По разработанному методу, на основе экспериментов наших и Е. Б. Лунца над стальными стержнями, произведено исследование внутреннего трения при свободных поперечных и крутильных колебаниях.

В нашем случае испытания проводились под консольным брусом постоянного поперечного сечения из стали 3, жестко заземленным одним концом.

Свободные поперечные колебания осуществлялись мгновенным освобождением образца от статически приложенной силы, вызывающей начальный прогиб.

Запись колебаний производилась электромагнитным способом. При этом получалась запись скорости колебаний образца.

В качестве примера на фигуре 5 показан начальный отрезок осциллограммы свободных поперечных колебаний образца № 2. Прерывистая линия изображает марку времени (два соседних отрезка соответствуют времени в 1 сек).

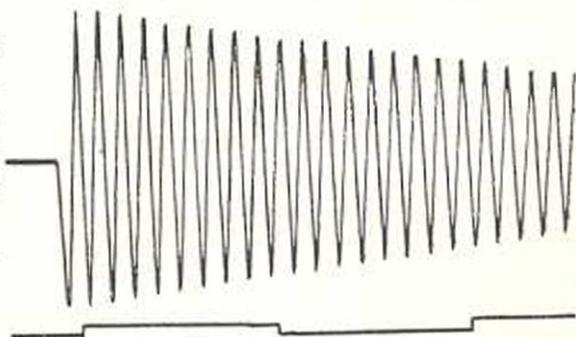
Для перехода от скорости к смещению нужно было произвести тарировку, заключающуюся в том, чтобы статически измеренный прогиб образца поставить в соответствие с полученной на осциллограмме скоростью. Это легко было проделать потому, что колебания происходили почти по гармоническому закону, поскольку затухание было незначительное.

Геометрические размеры, а также некоторые другие характеристики образцов сведены в таблицу 1.

Как видно из таблицы, колебания образцов происходили при начальных напряжениях порядка 1500 кг/см^2 ; частота колебаний менялась в пределах $\sim 10 \div 65$ герц.

Для определения параметров внутреннего трения стали-3 были использованы полученные осциллограммы.

Испытанные стальные стержни имели различную форму колебания из-за наличия добавочной массы в образцах №№ 2, 4, 6, 8, 10. Уравнение изогнутой оси было принято соответственно форме колебания образца.



Фиг. 5

Таблица 1

№№ образцов	Размеры образцов в см	Максимальн. прогиб в см	Напряжения в кг/см ²	Частота колебаний в герцах	Примечание
1	31,6×2,1×0,8	0,580	1465	65,5	Образцы №№ 2, 4, 6, 8, 10 имели на конце добавочную массу весом 1,750 кг.
2	31,6×2,1×0,8	0,585	1465	17,5	
3	42,6×2,1×0,8	1,090	1520	36,5	
4	42,6×2,1×0,8	1,098	1520	10,7	
5	40,0×2,1×1,2	0,640	1507	59,2	
6	40,0×2,1×1,2	0,649	1507	21,2	
7	47,0×2,1×1,2	0,880	1490	42,5	
8	47,0×2,1×1,2	0,875	1490	16,0	
9	54,0×2,1×1,2	1,210	1555	33,2	
10	54,0×2,1×1,2	1,210	1555	13,3	

Так, для образцов №№ 1, 3, 5, 7, 9 было принято приближенное уравнение изогнутой оси

$$y(x) = \frac{8}{l^4} \left(\frac{l^2 x^2}{4} - \frac{l x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right). \quad (15)$$

а для образцов №№ 2, 4, 6, 8, 10

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right). \quad (16)$$

Из-за большой длины испытанных стержней влиянием тангенциальных напряжений пренебрежено и принято, что энергия рассеяния зависит только от нормальных напряжений.

Исходя из результатов эксперимента многих исследователей, показавших, что для стали имеется квадратичная или кубическая зависимость между энергией рассеяния и напряжением, полином (2) нами представлен в виде

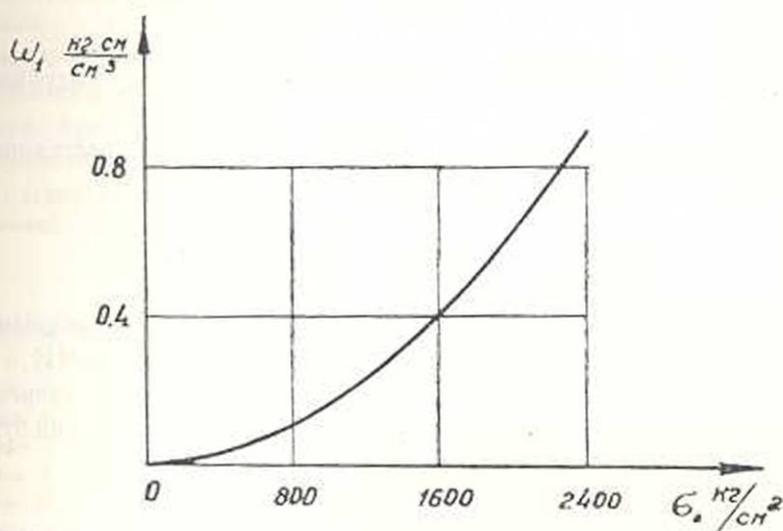
$$\omega_1 = a_2 \sigma_0^2 + a_3 \sigma_0^3. \quad (2')$$

Решая систему уравнений (1), при этом учитывая (2'), получаем значения параметров a_2 и a_3 , на основании которых зависимость удельной энергии рассеяния от максимальных нормальных напряжений можем выразить в следующем виде

$$\omega_1 = 0,16 \cdot 10^{-6} \sigma_0^2 - 0,65 \cdot 10^{-12} \sigma_0^3. \quad (2'')$$

Графическое изображение этой зависимости представлено на фиг. 6.

Полученные параметры подставлены в выражения (11), составленные для каждого образца и вычислены значения последующих амплитуд колебаний.



Фиг. 6.

Сравнение вычисленных амплитуд колебаний с их экспериментальными значениями показывает малое отклонение.

Экспериментальные данные Е. Б. Лунца по свободным крутильным колебаниям металлов имелись лишь для образца из стали ЭУ-11 [2].

Величины максимальных амплитуд угла скручивания, соответствующие им напряжения и некоторые другие характеристики приведены в таблице 2.

Таблица 2

№№ полупериодов	Максимальные углы скручив. в радианах	Максимальные динамич. напряж. в кг/см^2	Примечание
0	0,0580	945	Размеры образцов: длина—240.мм, диаметр—10 мм. Модуль касательной упругости $G = -0,801 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$
10	0,0533	868	
20	0,0493	803	
30	0,0458	746	
40	0,0428	697	
50	0,0401	653	
60	0,0378	616	
70	0,0359	585	
80	0,0341	556	
90	0,0323	525	
100	0,0309	503	
110	0,0296	482	
120	0,0284	483	
130	0,0273	445	
140	0,0262	427	
150	0,0252	410	

Удельную энергию рассеяния при крутильных колебаниях представляем в виде следующей зависимости от максимальных касательных напряжений

$$\omega_2 = c_2 \tau_0^2 + c_3 \tau_0^3. \quad (3')$$

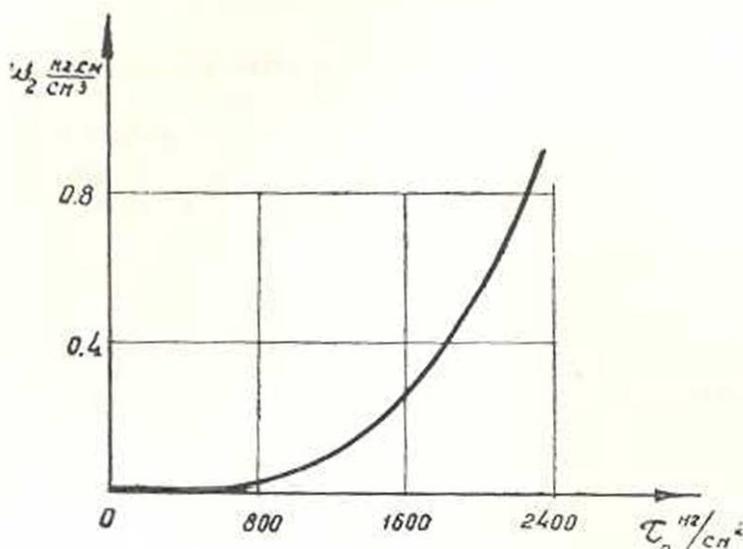
Подставляя (3') в (14) и учитывая, что $\varphi(x) = \frac{x}{l}$, получим следующее выражение для определения полной энергии рассеяния при крутильных колебаниях

$$\Omega^{(2)} = C_2 \frac{\pi r^4}{2l} G^2 \tau^2 + c_3 \frac{2\pi r^5}{5l^2} G^2 \tau^3. \quad (14')$$

Взяв из таблицы 2 значения l , соответствующие различным величинам напряжений, подставляем их в систему уравнений (1), решая которую получим значения параметров. Тогда уравнение зависимости энергии рассеяния от максимальных касательных напряжений будет

$$\omega_2 = 0,25 \cdot 10^{-8} \tau_0^2 + 0,66 \cdot 10^{-10} \tau_0^3. \quad (3'')$$

Графическое изображение этой зависимости представлено на фиг. 7.



Фиг. 7.

Анализ экспериментов проведен нами с целью проверки разработанного метода определения параметров внутреннего трения при колебаниях. Величины полученных параметров для сталей-3 и ЭУ-11 являются ориентировочными.

Для определения окончательных величин параметров внутреннего трения необходимо произвести исследование материала при различ-

ных напряженных состояниях. Так, например, целесообразно произвести исследование определенного материала, положим металла, на чистые изгибные и крутильные колебания, определить для этих случаев параметры внутреннего трения и затем сопоставить их с таковыми, полученными при поперечных изгибных колебаниях того же материала.

Такую работу мы намеряем проделать в дальнейшем.

Пользуемся случаем выразить благодарность доктору технических наук профессору Я. Г. Пановко за ценные советы по анализу экспериментальных результатов по разработанному нами методу.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 10 XI 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Давиденков Н. Н. Журнал технической физики, т. VII, вып. 3, 1938.
2. Луцц Е. Б. Вестник металлопромышленности, №№ 5, 12, 15, 1936.
3. Луцц Е. Б. ПММ, новая серия, т. I, вып. 3, 1938.
4. Назаров А. Г. ДАН Армянской ССР, т. XVI, №3, 1953.
5. Назаров А. Г. ДАН Армянской ССР, т. XVI, № 4, 1953.
6. Назаров А. Г. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 4, 1953.
7. Пановко Я. Г. Журнал технической физики, т. XXVIII, вып. 3, 1953.
8. Писаренко Г. С. Журнал технической физики, т. XV, вып. 9, 1945.
9. Писаренко Г. С. Инженерный сборник, т. V, вып. 1, 1948.
10. Писаренко Г. С. Сборник трудов Института строительной механики АН Украинской ССР, № 15, 1951, Киев.
11. Сорокин Е. С. Сборник ЦНИПС „Исследования по динамике сооружений“, 1951, М.—Л.
12. Voigt W. Wied. Ann. 47, p. 671—693, 1892.

Բ. Կ. Կարապետյան

ԱՋԱՏ ՏՏԱՏՆՈՒՄՆԵՐԻ ԺԱՄԱՆԱԿ ՆՅՈՒԹԻ ՆԵՐՔԻՆ ՇՓՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արված է ծոման և ոլորման աստանուժների ժամանակ նորմալ ու ասնգենցիալ լարումներին համապատասխան նյութի մեջ ներքին շփումից առաջացած ցրման էներգիայի պարամետրների որոշման եղանակ. Այս եղանակը կարելի է տարածել նյութի նաև ալլ լարվածային վիճակների վրա: Ընդունված է, որ աստձգական սրտեմների ուղատ աստանուժների ժամանակ ցրման էներգիայի պատճառը հիմնականում հանդիսանում է նյութի աստձգական հրտերեզիսը:

Ըստ մշակված եղանակի՝ կլնելով պողպատի ձողերի ծոման և ոլորման ազատ աստանուժների փորձարկումներից ստացված տվյալներից, որոշված են պողպատի ներքին շփման պարամետրների մեծությունները և կառուցված են նորմալ և ասնգենցիալ լարվածությունների՝ անսակարար ցրման էներգիայից կախման կարերը: