

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян, А. П. Тамадян

О полноте в одном классе нежордановых областей

1. Рассмотрим односвязную область D , расположенную в ограниченной части плоскости, и класс $H_2(D)$ функций $f(z)$, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модуля по площади D . Вопросу о полноте системы полиномов в классе $H_2(D)$, т. е. вопросу о справедливости соотношения

$$\inf_{\{P(z)\}} \int_D |f(z) - P(z)|^2 dx dy = 0$$

для любой $f(z) \in H_2(D)$ посвящен большой цикл работ.

Из полученных в этом направлении результатов отметим теорему Маркушевича-Фарреля, согласно которой полнота имеет место, если D — область Каратеодори, т. е. если граница Γ области D совпадает с границей той из дополнительных к $\bar{D}$ областей, которая содержит бесконечно-удаленную точку (обозначим такую область через D_∞). Непринадлежность области D к классу Каратеодори может быть вызвана или наличием в составе Γ непрерывных разрезов, т. е. континуумов, содержащихся в множестве внутренних точек замыкания D , или же таких континуумов, которые принадлежат границе одной из конечных дополнительных к $\bar{D}$ областей и не принадлежат границе D_∞ .

Характерным носителем особенностей первого типа является область, ограниченная двумя внутренне соприкасающимися окружностями, например, область

$$|z| < 1, \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

а также любая область топологически ей эквивалентная.

На примере подобного рода областей М. В. Келдышем впервые была обнаружена [1, 3] зависимость полноты от метрических свойств области (в данном случае от локальных метрических свойств области вблизи кратной граничной точки).

В настоящей статье рассматривается другой характерный класс областей, для которых непринадлежность к классу Каратеодори

объясняется наличием множества континуальных разрезов, в то время как дополнение к D связано и состоит из одной области D_∞ .

Устанавливается достаточный метрический критерий полноты в рассматриваемом классе областей. Получение этого критерия и следствий из него связано с исследованием тех метрических факторов, которые обуславливают полноту в произвольной односвязной области.

2. Пусть P — совершенное, нигде не плотное множество точек, расположенных на окружности $|z|=1$.

Рассмотрим множество L_P отрезков

$$\arg z = \arg t, \quad 1-h \leq |z| \leq 1, \quad (0 < h < 1),$$

для всевозможных точек $t \in P$, т. е. ту часть радиусов, проведенных из начала координат ко всем точкам P , которую отсекает кольцо $1-h \leq |z| \leq 1$.

Пусть D_P — дополнение к рассматриваемому множеству отрезков относительно круга $|z| < 1$. D_P представляет, очевидно, односвязную область, граница Γ_P которой состоит из окружности $|z|=1$ и множества L_P .

Свойства области D_P , могущие влиять на полноту в D_P , полностью определяются, таким образом, совершенным нигде не плотным множеством P .

Теорема. Система полиномов полна в области D_P , если можно указать счетное всюду плотное на P множество M так, что для любой точки этого множества существуют покрывающие ее отрезки Δ сколь угодно малой длины с условием

$$(A) \quad \text{mes}(\Delta \cdot CP) < \exp \left\{ - \exp \frac{C_1 h}{\text{mes} \Delta} \right\},$$

где CP — дополнение к P относительно окружности $|z|=1$, $C_1=31$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что точки $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, составляющие множество M , принадлежат P .

Пусть $\Delta_{k,n}$ ($n=1, 2, \dots$) совокупность дуг окружности $|z|=1$, стягивающихся (при $n \rightarrow \infty$) к z_k , для которых выполнено неравенство (A). Мы будем считать, что при разных k $\Delta_{k,n}$ не пересекаются, так как в противном случае отбросим конечное число $\Delta_{k,n}$ для каждого k и оставшиеся отрезки вновь перенумеруем по n ($n=1, 2, \dots$), а также, что дл. $\Delta_{k,n} < \frac{1}{2n}$ при любом k .

Пусть $z_{k,n}$ есть центр дуги $\Delta_{k,n}$. Через D_k обозначим область, получаемую из единичного круга $|z| < 1$ удалением k отрезков

$$\arg z = \arg z_i, \quad 1-h \leq |z| \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, k,$$

а через $D_{k,n}$ — ту область, которая дополняет до единичного круга систему отрезков

$$\arg z = \arg z_{i,n}, \quad 1-h + \text{дл.} \Delta_{i,n} \leq |z| \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

функция $w(z)$ пусть отображает область D_p на круг $|w| < 1$ ($w(0) = 0$, $w'(0) > 0$), $w_k(z)$ отображает D_k на $|w| < 1$ ($w_k(0) = 0$, $w'_k(0) > 0$) и $w_{k,n}(z)$ — отображает $D_{k,n}$ на круг $|w| < 1$ ($w_{k,n}(0) = 0$, $w'_{k,n}(0) > 0$).

Области D_k при $k \rightarrow \infty$ сходятся к D_p в смысле Каратеодори как к своему ядру (см. [2]), а области $D_{k,n}$ при $n \rightarrow \infty$ — к D_k . В силу теоремы Каратеодори [1] из этого следует, что на каждом замкнутом подмножестве $F \subset D_p$ $w_k(z)$ равномерно сходится к $w(z)$, а $w'_k(z)$ — к $w'(z)$, а также на каждом замкнутом подмножестве D_k $w_{k,n}(z)$ равномерно сходится к $w_k(z)$, а $w'_{k,n}(z)$ к $w'_k(z)$. Отсюда нетрудно заключить, что при любом фиксированном целом $m > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_p} |w'_k(z)[w(z)]^m - w'_{k,n}(z)[w_k(z)]^m|^2 dx dy = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{|z| < 1} |w'_k(z)[w(z)]^m - w'_{k,n}(z)[w_{k,n}(z)]^m|^2 dx dy = 0, \quad k=1,2,\dots$$

Известно (2), что для полноты достаточно выполнение соотношений

$$\inf_{\{\Phi\}} \iint |w'(z)[w(z)]^m - \Phi(z)|^2 dx dy = 0$$

для всех целых $m \geq 0$.

Таким образом, для доказательства полноты в D_p достаточно показать, что для любых фиксированных целых $m \geq 0$ и $k \geq 1$

$$\inf_{\{Q(z)\}} \iint_{D_p} |w'_{k,n}(z)[w_{k,n}(z)]^m - Q(z)|^2 dx dy \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

где нижняя грань берется по всевозможным полиномам.

На дуге $\Delta_{i,n}$ единичной окружности отметим две точки $a_{i,n}$ и $b_{i,n}$ так, чтобы точка $z_{i,n}$ была расположена между $a_{i,n}$ и $b_{i,n}$, причем расстояние $a_{i,n}, b_{i,n}$ как до $z_{i,n}$, так и до концов дуги $\Delta_{i,n}$ превосходило $\frac{1}{6}$ дл. $\Delta_{i,n}$. Через $A_{i,n}, B_{i,n}$ обозначим концы дуги $\Delta_{i,n}$ ($\arg A_{i,n} > \arg B_{i,n}$).

Пусть $H_{i,n}$ означает множество точек, удовлетворяющих условию

$$\arg B_{i,n} \leq \arg z \leq \arg A_{i,n}, \quad 1-h < |z| \leq 1$$

а $G_{i,n}$ — дополнение к $\sum_{i=1}^k H_{i,n}$ относительно единичного круга. Через

$\mathcal{A}_{i,n}$ обозначим кривую, составленную из двух отрезков:

$$\operatorname{arg} z = a_{i,n}, \quad \operatorname{arg} z = b_{i,n}, \quad 1 - h + \frac{1}{2} \text{дл. } \Delta_{i,n} \leq |z| \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

и из дуги окружности $|z| = 1 - h + \frac{1}{2} \text{дл. } \Delta_{i,n}$, соединяющей эти отрезки.

Кривые $l_{i,n}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) разбивают круг $|z| < 1 + \frac{1}{2n}$ на $k + 1$ область; ту из них, которая содержит начало координат, мы обозначим через $R_{k,n}$. Граница области $R_{k,n}$ состоит из кривых $l_{i,n}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) из дуг окружности $|z| = 1 + \frac{1}{2n}$; совокупность этих дуг обозначим через $L_{k,n}$.

Из определения функций $w_{k,n}(z)$ следует, что их можно аналитически продолжить через любую дугу окружности $|z| = 1$, не содержащую точек $z_{i,n}^1$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Из этого легко усмотреть, что $w_{k,n}(z)$ аналитична и однозначна, в частности на кривой $l_{i,n}$ и во всех точках, расстояние которых до $l_{i,n}$ не превышает $\frac{1}{6} \text{дл. } \Delta_{i,n}$, причем в указанной окрестности $l_{i,n}$

$$|w_{k,n}(z)| \leq 2.$$

Представляя функцию $w_{k,n}(t)$ ($t \in l_{i,n}$, $i = 1, 2, \dots, k$) в виде интеграла Коши по окружности $|u - t| = \frac{1}{6} \text{дл. } \Delta_{i,n}$ и дифференцируя находим:

$$|w'_{k,n}(t)| \leq \frac{12}{\text{дл. } \Delta_{i,n}},$$

откуда следует, что в точках $t \in l_{i,n}$

$$|w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m| \leq \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}.$$

Согласно формуле Коши, в точках $z \in G_{k,n}$

$$\begin{aligned} w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,n}} \frac{w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m}{t - z} dt + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{i,n}} \frac{w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m}{t - z} dt = J(z) + \sum_{i=1}^k J_i(z). \end{aligned}$$

Интеграл $J(z)$ представляет функцию, аналитическую в круге $|z| \leq 1$ и аппроксимируется, поэтому полиномами с любой степенью точности в этом круге.

$$\max_{|z| < 1} |J(z) - \Phi_0(z)| < \varepsilon.$$

Равномерная аппроксимация функции $J_i(z)$ на множестве $\bar{G}_{k,n}$ с оценкой максимума модуля аппроксимирующего полинома на $H_{l,n}$ основывается на методе М. В. Келдыша вывода полюсов. Приведем формулировку вспомогательного предложения, которое устанавливается указанным методом.

Лемма*. Пусть $L: z = z(s)$ ($0 \leq s \leq l$) означает спрямляемую жорданову кривую, соединяющую точки $a = z(0)$ и $b = z(l)$, s — длина дуги L от точки a до $z(s)$, G — область, содержащая L , и $\rho(s)$ — расстояние точки $z(s)$ до границы G . Область, составленную из суммы всевозможных кругов $|z - z(t)| < \rho(t)$ для значений t в пределах от $t = s$ до $t = l$ обозначим через R_s . Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно построить полином $P\left(\frac{1}{z-b}\right)$ от $\frac{1}{z-b}$, удовлетворяющий при любом $s, 0 \leq s \leq l$ условиям:

$$\left| \frac{1}{z-b} - P\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \varepsilon$$

всюду вне G ,

$$\left| P\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \exp \left\{ \left[1 + \log \frac{1}{\rho(0)\varepsilon} \right] e^{5 \int_0^s \frac{dt}{\rho(t)}} \right\}$$

всюду вне R_s .

Следствие. Если точка a расположена в круге $|z| < 1$, а точка b — вне этого круга, причем $|z| \geq 1 + \rho(l)$, то дополнение к R_l содержит круг $|z| \leq 1$ и, следовательно, существует полином $Q(z)$ от z , удовлетворяющий неравенству

$$\left| \frac{1}{z-a} - Q(z) \right| < \varepsilon$$

в той части дополнения к G , которая расположена в круге $|z| < 1$, и неравенству

$$|Q(z)| < \exp \left\{ \left[1 + \log \frac{1}{\rho(0)\varepsilon} \right] e^{5 \int_0^l \frac{dt}{\rho(t)}} \right\}$$

в круге $|z| \leq 1$.

В качестве $Q(z)$ можно брать, например, соответствующие отрезки ряда Тейлора функции $P\left(\frac{1}{z-b}\right)$.

* Изложение метода полюсов и доказательство этой леммы приводятся в обзорной статье [3].

Применим это следствие к тому случаю, когда точка a совпадает с произвольной, наперед заданной точкой t кривой $l_{i,n}$, точка b — совпадает с ближайшим к t концом дуги $l_{i,n}$, а G представляет совокупность точек, отстоящих от дуги $l_{i,n}$ на расстоянии, меньшее $\frac{1}{6}$ дл. $\Delta_{i,n}$.

Пусть также $\varepsilon = (\text{дл. } \Delta_{i,n})^3$. В этом случае

$$\rho(s) = \frac{1}{6} \text{ дл. } \Delta_{i,n}, \quad 0 < s \leq l, \quad \rho(0) = \frac{1}{6} \text{ дл. } \Delta_{i,n}, \quad l \leq h + \frac{1}{n}.$$

Через $Q_{i,n}(z)$ обозначим полином от z , удовлетворяющий условиям:

$$\left| \frac{1}{t-z} - Q_{i,n}(z) \right| < (\text{дл. } \Delta_{i,n})^3,$$

$$\max_{|z| \leq 1} |Q_{i,n}(z)| < \exp \left\{ \left[1 + 4 \log \frac{2}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \right] e^{\frac{30 \left(h + \frac{1}{n} \right)}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}} \right\}.$$

Обозначим

$$P_{i,k,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{i,n}} w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m Q_{i,n}(z) dt,$$

$$P_{k,n}(z) = \sum_{i=1}^k P_{i,k,n}(z).$$

Имеем, очевидно, всюду в области $G_{k,n}$

$$|P_{i,k,n}(z) - J_i(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \left(h + \frac{1}{n} \right) \left(\text{дл. } \Delta_{i,n} \right)^3,$$

$$\begin{aligned} |P_{k,n}(z) - \sum_{i=1}^k J_i(z)| &\leq \frac{k}{2\pi} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \left(\text{дл. } \Delta_{i,n} \right)^3 < \\ &< \frac{2^{m+4}}{2\pi} \left(h + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(предполагаем, что $n > k$).

Кроме того,

$$\max_{|z| \leq 1} |P_{k,n}(z)| < \frac{k}{2\pi} \left(2h + \frac{2}{n} \right) \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \exp \left\{ \left[1 + 4 \log \frac{2}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \right] e^{\frac{30 \left(h + \frac{1}{n} \right)}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}} \right\}.$$

В силу этих неравенств

$$\begin{aligned} & \int_{D_p} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < \\ & \leq \int_{G_{k,n}} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy + \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{D_p} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < 2\pi \left[\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \right)^2 + \right. \\ & \quad + \varepsilon^2 + 2 \sum_{i=1}^n \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)|^2 dx dy + 2 \sum_{i=1}^k (\text{mes } D_p \cap H_{i,n}) \times \\ & \quad \times \max_{|z| < 1} (|P_{k,n}(z)| + |P_0(z)|)^2 \Big]. \end{aligned}$$

Но, согласно (A),

$$\text{mes}(D_p \cap H_{i,n}) \leq h, \text{ д.т. } \Delta_{i,n}, \exp \left\{ -\exp \frac{Ch}{\Delta_{i,n}} \right\}, \quad (C = 31)$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $n > k$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$2 \sum_{i=1}^k [\text{mes}(D_p \cap H_{i,n})] \max_{|z| < 1} (|P_{k,n}(z)| + |P_0(z)|)^2 < \varepsilon,$$

$$2 \sum_{i=1}^k \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)|^2 dx dy < \varepsilon,$$

$$2\pi \left[\frac{1}{2\pi n} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \right]^2 < \varepsilon.$$

Для выбранных значений n имеем:

$$\int_{D_p} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < 3\varepsilon + 2\pi\varepsilon^2.$$

Таким образом, полнота системы полиномов в области D_p при выполнении условия (A) доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для полноты системы полиномов в D_p достаточно наложить метрическое ограничение типа (A) на множество P не в каждой точке P , а лишь для счетного, всюду плотного на P множества.

Указанный метрический критерий существенно улучшить нельзя. Его точность характеризуется следующим предложением:

Если в правой части неравенства (А) функцию

$$\exp \left\{ -\exp \frac{C}{\operatorname{mes} \Delta} \right\}$$

заменить на функцию

$$\exp \left\{ -\exp \frac{1}{(\operatorname{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема перестает быть справедливой.

Мы докажем это, построив класс совершенных множеств P , для которых выполняется неравенство (А) с заменой правой части на (1), и таких, что в соответствующих им областях полнота не имеет места.

Пусть задана убывающая последовательность чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ $\alpha_n \rightarrow 0$ и $z_1^{(0)} = 1$, $z_2^{(0)} = -1$; через $\delta_1^{(0)}$ и $\delta_2^{(0)}$ обозначим две дуги окружности $|z| = 1$ длины α_1 с центрами в точках $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$. Дополнительные к ним дуги единичной окружности обозначим через $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, а их центры — через $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$. Дугу окружности $|z| = 1$, concentрическую с $\Delta_1^{(1)}$ длины α_2 обозначим через $\delta_1^{(1)}$ ($i = 1, 2$). Дополнение к сумме $\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \delta_i^{(j)}$ представляет, очевидно, совокупность четырех дуг окружности $|z| = 1$ равной длины

$$\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}.$$

Их центры мы обозначим соответственно через $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$, $z_4^{(2)}$. Дугу единичной окружности, concentрическую с $\Delta_1^{(2)}$, длины α_2 обозначим через $\delta_1^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Дополнение ко всем построенным $\delta_i^{(j)}$, $j \leq 2$ представляет систему 2^2 отрезков

$$\Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}, \dots, \Delta_{2^2}^{(3)}$$

равной длины.

Допустим, что таким образом мы уже построили систему 2^n непересекающихся отрезков $\Delta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) длины h_n . Через $\delta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) обозначим дугу единичной окружности, concentрическую с $\Delta_i^{(n)}$, длины α_{n+1} , через $z_i^{(n)}$ — центр дуги $\delta_i^{(n)}$. В предположении, что $\alpha_{n+1} < h_n$, определим $\Delta_i^{(n+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$) как систему дуг, дополнительных к $\sum_{i=1}^{2^n} \delta_i^{(n)}$ относительно $\sum_{i=1}^{2^n} \Delta_i^{(n)}$. Длина h_{n+1}

дуги $\Delta_i^{(n+1)}$ равна, очевидно, $\frac{h_n - \alpha_{n+1}}{2}$.

Таким образом, при любом $m \geq 1$ определены дуги $\Delta_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$).

Пусть

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \Delta_i^{(n)}.$$

Множество P точек окружности $|z|=1$ совершенно, нигде не плотно и определяется заданием достаточно быстро убывающей последовательности чисел $\{\alpha_n\}$.

При этом длина дуг $\Delta_i^{(n)}$ определяется посредством этих чисел равенством

$$h_n = \frac{1}{2^{n-1}} [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + 2^{n-2} \alpha_n)].$$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Числа α_n определим равенствами

$$\alpha_n = \exp \left\{ -\exp \exp \left[n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \log 2 \right] \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Множество P , соответствующее определенной таким образом последовательности чисел $\{\alpha_n\}$, обладает тем свойством, что для любой его точки можно указать дуги Δ единичной окружности, покрывающие ее и имеющие сколь угодно малую длину, для которых

$$\text{mes}(\Delta, CP) < \exp \left\{ -\exp \frac{1}{(\text{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}.$$

Действительно, в качестве Δ можем брать любую из дуг $\Delta_i^{(n)}$ с достаточно большим номером n , так как при $n > n_1(\varepsilon)$

$$\text{mes}(\Delta_i^{(n)}, CP) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \text{дл. } \delta_i^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} 2^k \exp \left\{ -\exp \exp \left[(k+1) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \log 2 \right] \right\} \leq \exp \left\{ -\exp \frac{1}{h_n^{1-\varepsilon}} \right\}.$$

Покажем, что в области D_P , определяемой множеством P , система полиномов не полна.

Для этого достаточно показать, что каково бы ни было число r , $h < r < 1$, существует число $M = M(r) < \infty$ так, что из неравенства

$$\iint_{D_P} |Q(z)|^2 dx dy \leq 1 \quad (2)$$

всегда следует, что

$$\max_{|z| < r} |Q(z)| \leq M(r),$$

где $Q(z)$ произвольный полином, а $M(r)$ не зависит от $Q(z)$. В самом деле, если бы при этом полнота в D_r имела место, то для некоторой последовательности полиномов $P_n(z)$

$$\iint_{D_r} |\sqrt{z - \zeta_0} - P_n(z)|^2 dx dy \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

где ζ_0 точка на границе D_r , $|\zeta_0| = h < r$, откуда следует, что $P_n(z)$ равномерно ограничены в среднем по площади D_r , а, следовательно, и по модулю в круге $|z| \leq r$, а также равномерно сходятся на каждом замкнутом подмножестве D_r к $\sqrt{z - \zeta_0}$.

Но из двух последних фактов легко заключить, что полиномы $P_n(z)$ должны равномерно сходить всюду внутри круга $|z| < r$, что невозможно ввиду наличия там особенности у функции $\sqrt{z - \zeta_0}$.

Положим, для краткости

$$r_n = \frac{1+r}{2} - \frac{1-r}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Через $\alpha_i^{(n)}$ и $\beta_i^{(n)}$ обозначим концы дуги $\Delta_i^{(n)}$ ($\arg \alpha_i^{(n)} < \arg \beta_i^{(n)}$). Через $\gamma_i^{(n)}$ обозначим дугу $|z| = r_{n+1}$, $\arg \alpha_i^{(n)} < \arg z \leq \arg \beta_i^{(n)}$, т. е. проекцию $\Delta_i^{(n)}$ из точки $z = 0$ на окружность $|z| = r_{n+1}$. Через $P_i^{(n)}$ обозначим те точки z дуги $\gamma_i^{(n)}$, для которых $e^{i \arg z} \in P$, т. е. пересечение $\gamma_i^{(n)} \cap L_r$ дуги $\gamma_i^{(n)}$ с границей области D_r , через P_i — пересечение окружности $|z| = r$ с множеством отрезков L_r .

Рассмотрим произвольный полином $Q(z)$, удовлетворяющий (2) и пусть

$$M_1 = \max_{z \in P_i} |Q(z)|.$$

Введем ряд обозначений.

Через z_1 обозначим ту точку множества P_i , в которой $|Q(z_1)| = M_1$ (если таких точек несколько, то мы здесь и в дальнейшем условимся выбирать ту, у которой наименьший аргумент).

Так как $e^{i \arg z_1} \in P$, то существует номер i_1 , для которого $e^{i \arg z_1} \in \Delta_{i_1}^{(1)}$ ($1 \leq i_1 \leq 2$).

Обозначим

$$M_2 = \max_{z \in P_{i_1}^{(1)}} |Q(z)|$$

и пусть z_2 — точка множества $P_{i_1}^{(1)}$, для которой

$$|Q(z_2)| = M_2.$$

Число i_2 ($1 \leq i_2 \leq 4$) определяем единственным образом из условия

$$e^{i \arg z_2} \in \Delta_{i_2}^{(2)}.$$

Пусть мы определили уже точки $z_1, z_2, \dots, z_n$, числа $M_1, M_2, \dots, M_n$ и числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ так, что для любого k , $2 \leq k \leq n$,

$$M_k = \max_{z \in P} |Q(z)|.$$

$$|Q(z_k)| = M_k, \quad z_k \in P_{i_k}^{(k-1)} \quad (3)$$

$$e^{i \arg z_k} \in \Delta_{i_k}^{(k)}, \quad \Delta_{i_k}^{(k)} \subset \Delta_{i_{k-1}}^{(k-1)}.$$

Через M_{n+1} обозначим

$$\max_{z \in P_n^{(n)}} |Q(z)|;$$

z_{n+1} — та точка $P_n^{(n)}$, в которой $|Q(z_{n+1})| = M_{n+1}$. Число i_{n+1} определим из условия

$$e^{i \arg z_{n+1}} \in \Delta_{i_{n+1}}^{(n+1)}.$$

Таким образом, точки $\{z_n\}$ числа $\{M_n\}$ и $\{i_n\}$ определены, и при любом k выполняются соотношения (3).

Дополнение к дугам $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{2^n}^{(n)}$ относительно единичной окружности представляет совокупность 2^n дуг $\delta_q^{(p)}$, $1 \leq q \leq 2^p$, $0 \leq p \leq n-1$.

Через $A_i^{(n)}$ и $B_i^{(n)}$ мы обозначим две точки единичной окружности, расположенные вне дуги $\Delta_i^{(n)}$, по разные от нее стороны, на дуговом расстоянии $\frac{1}{2} z_{n-1}$ от $\Delta_i^{(n)}$ ($\arg A_i^{(n)} < \arg B_i^{(n)}$).

Так как из двух дополнительных к $\Delta_i^{(n)}$ дуг $\delta_q^{(p)}$, непосредственно примыкающих к $\Delta_i^{(n)}$, у одной $p = n-1$, а у другой $p < n-1$, то одна из точек $A_i^{(n)}, B_i^{(n)}$ совпадает с центром z_q^{n-1} соответствующей дуги $\delta_q^{(n-1)}$, другая же принадлежит $\delta_q^{(p)}$, где $p < n-1$, поэтому расстояние точек $A_i^{(n)}, B_i^{(n)}$ до $\Delta_i^{(n)}$ превосходит $\frac{1}{4} z_{n-1}$.

Через G_n обозначим ту часть круга $|z| < r_{n+1}$, для которой

$$\arg A_i^{(n)} < \arg z < \arg B_i^{(n)}.$$

Граница области G_n состоит, таким образом, из дуги окружности $|z| = r_{n+1}$, которую мы обозначим через γ_n и двух радиусов

$$\arg z = \arg A_i^{(n)}, \arg z = \arg B_i^{(n)}, |z| \leq r_{n+1}, \quad (4)$$

причем точка $z_n \in G_n$ а z_{n+1} расположена на границе G_n , которую мы обозначим через γ_n .

Кривую γ_n представим в виде суммы трех множеств:

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(3)},$$

где $\Gamma_n^{(1)} = \gamma_n \cdot L_P$, $\Gamma_n^{(2)} = \gamma_n - \gamma_n \cdot L_P$, а $\Gamma_n^{(3)} = \Gamma_n - \Gamma_n^{(1)} - \Gamma_n^{(2)}$ — совокупность двух отрезков (4).

Пусть $G_n(z, \zeta)$, означает функцию Грина области G_n с особенностью в точке $\zeta = z$.

Так как функция $\log |Q(z)|$ является субгармонической, то всюду внутри G_n имеет место неравенство

$$\log |Q(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \Gamma_n} \log |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial n} |d\zeta|$$

(здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по нормали к границе G_n)

Обозначив интеграл по множеству $E \subset \Gamma_n$ от функции

$\frac{1}{2\pi} \log |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial n}$ через $J(E, z)$. Предыдущее неравенство можем записать в виде

$$\log |Q(z)| \leq J(\Gamma_n^{(1)}, z) + J(\Gamma_n^{(2)}, z) + J(\Gamma_n^{(3)}, z).$$

Оценим каждое из трех слагаемых в правой части написанного неравенства, предполагая, что $|z| \leq r_n$.

Заметим, прежде всего, что если $z \in G_n$, а $\varphi_n(z, \zeta)$ — означает функцию, реализующую конформное отображение области G_n на круг $|z| < 1$, при котором точка $z = \zeta$ переходит в начало координат, то $\varphi_n(z, \zeta)$ имеет непрерывную производную в замкнутой области G_n причем в точках ζ границы G_n

$$\frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial n} = |\varphi'_n(z, \zeta)|.$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по нормали к границе G_n в точке

ζ . $\varphi'_n(z, \zeta)$ — производная по ζ .

Функция $\varphi_n(z, \zeta)$ легко выражается через элементарные функции; непосредственные подсчеты показывают, что если $z, \zeta \in G_n$, причем $|\zeta| = r_{n+1}$, а $|z| \leq r_n$, то

$$|\varphi'_n(z, \zeta)| \leq C_2 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n}, \quad (5)$$

где C_2 — абсолютная постоянная, а μ_n определяется равенством

$$\arg B_{in}^{(n)} - \arg A_{in}^{(n)} = \frac{\pi}{\mu_n}.$$

Интеграл $J(\Gamma_n^{(1)}, z)$ оцениваем, учитывая, что $|z| = r_n$, а $\zeta \in \Gamma_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} |J(\Gamma_n^{(1)}, z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \log M_{n+1} \cdot \int_{\zeta \in \Gamma_n^{(1)}} |\varphi'_n(z, \zeta)| ds \leq \\ &\leq C_2 \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \mu_n \log M_{n+1}. \end{aligned}$$

Для оценки $J(\Gamma_n^{(2)}, z)$ заметим, что подынтегральная функция — нормальная производная функции Грина — оценивается аналогично, на основании неравенства (5).

Оценим теперь $\log |Q(\zeta)|$ для значений $\zeta \in \Gamma_n^{(2)}$. Множество $\Gamma_n^{(2)}$ состоит очевидно из интервалов, дополнительных к множеству γ_n . $L_P = \Gamma_n^{(1)}$ относительно γ_n . Если обозначить проекцию интервала $\delta_j^{(1)}$ из точки $z=0$ на окружность $|z| = r_{n+1}$ через $\delta_{j,n}^{(1)}$, то легко видеть, что подобными дополнительными интервалами служит некоторая часть интервалов $\delta_{j,n}^{(1)}$ при $j \geq n-1$. Поэтому значение $J(\Gamma_n^{(2)}, z)$ мы увеличим, если $\log |Q(\zeta)|$ заменим на $\log^+ |Q(\zeta)|$, а интегрирование распространим на все интервалы $\delta_{j,n}^{(1)}$ ($j=1, 2, \dots, 2^l$, $i=n-1, n, \dots$):

$$\begin{aligned} J(\Gamma_n^{(2)}, z) &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=n-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^l} \int_{\delta_{j,n}^{(1)}} \log^+ |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial m} |d\zeta| \leq \\ &\leq C_3 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \sum_{i=n-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^l} \int_{\delta_{j,n}^{(1)}} \log^+ |Q(t)| ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим какую-либо из дуг $\delta_{j,n}^{(1)}$, обозначим ее через (a, b) ; через c обозначим центр дуги (a, b) . Длина (a, b) равна, очевидно, $\alpha_{i+1} r_{n+1}$ при любом j ($1 \leq j \leq 2^l$). Пусть $t = t(\varphi)$ — точка дуги (a, c) , находящаяся на дуговом расстоянии φ от точки a .

Существует, очевидно, зависящая от r постоянная C_3 так, что при этом расстояние $t(\varphi)$ до границы области D_P будет превосходить $C_3 \varphi$.

Согласно (2) и теореме о среднем

$$\pi (C_3 \varphi)^2 |Q(t(\varphi))|^2 \leq \iint_{D_P} |Q(t)|^2 dx dy \leq 1,$$

поэтому

$$\int_{t \in (a, c)}^+ \log^+ |Q(t)| \cdot |dt| \leq \int_0^{\frac{1}{2} \alpha_{i+1}} \log^+ \frac{1}{\sqrt{\pi} C_3 \varphi} \cdot d\varphi \leq C_4 \alpha_{i+1} \log \frac{1}{\alpha_{i+1}}. \quad (6)$$

Аналогично оценивается интеграл по дуге (с, b).
В результате находим

$$\begin{aligned} J(\Gamma_n^{(2)}, z) &\leq C_4 C_2 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \sum_{l=n-1}^{\infty} 2^l \alpha_{l+1} \log \frac{1}{\alpha_{l+1}} < \\ &< C_5 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} 2^n \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n}, \end{aligned}$$

где C_4, C_5 — не зависят от n .

Для оценки $J(\Gamma_n^{(3)}, z)$ заметим, что $\Gamma_n^{(3)}$ состоит из двух отрезков, расстояние каждого из которых до границы области D_R превосходит $C_6 \alpha_{n-1}$, так как эти отрезки направлены из $z=0$ к точкам $A_l^{(n)}, B_l^{(n)}$, расстояние которых до P превосходит $\frac{1}{4} \alpha_{n-1}$, поэтому $\log |Q(t)|$ оцениваем в точках $\Gamma_n^{(3)}$ также согласно теореме о среднем

$$\log |Q(t)| \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n},$$

в силу чего

$$J(\Gamma_n^{(3)}, z) \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n^{(3)}} \frac{\partial G_n}{\partial m} ds \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G}{\partial m} ds = C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}$$

(C_6 и C_7 — не зависят от n).

Из этих оценок следует, что, в частности, в точке $z=z_n$

$$\begin{aligned} \log |Q(z_n)| = \log M_n &\leq C_2 \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \cdot \mu_n \log M_{n+1} + \\ &+ C_5 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} 2^n \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} + C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Но $\mu_n > C_8 2^n$; учитывая значения r_n, r_{n+1} , получаем

$$2^n \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} < C_9 \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\},$$

где положительные постоянные C_8, C_9, C_{10} не зависят от n , следовательно,

$$\begin{aligned} \log M_n &\leq C_2 2^{-n} \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\} \cdot \log M_{n+1} + \\ &+ C_{11} \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\} \cdot \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} + C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, перенося два последних члена в левую часть и учитывая, что $2^n \cdot \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} < 1$, находим:

$$C_{12} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log M_n - C_{13} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log \frac{1}{\alpha_n} < \log M_{n+1}.$$

Вводя обозначения

$$A_n = C_{12} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right),$$

$$B_n = C_{13} 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log \frac{1}{\alpha_n},$$

получаем последовательность неравенств:

$$A_n \log M_n - B_n < \log M_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решая эти неравенства, находим:

$$A_1 A_2 \dots A_n \log M_1 - [B_1 A_2 A_3 \dots A_n + B_2 A_3 \dots A_n + \dots + B_{n-1} A_n + B_n] < \log M_{n+1},$$

т. е.

$$A_1 A_2 \dots A_n \left[\log M_1 - \left(\frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_1 A_2} + \dots + \frac{B_n}{A_1 A_2 \dots A_n} \right) \right] < \log M_{n+1}.$$

Из определения чисел α_n следует, что существует независимая от n постоянная C_{14} , для которой

$$\frac{B_n}{A_1 A_2 \dots A_n} < \frac{C_{14}}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому, так как $|z_n| \leq \frac{1+r}{2} < 1$

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \dots A_n [\log M_1 - C_{14}] &< \log M_{n+1} = \\ &= \log |Q(z_{n+1})| \leq \max_{|z| < 1} |Q(z)|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\log M_1 < C_{14} + \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} \max_{|z| < 1} |Q(z)|.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим:

$$\log M_1 \leq C_{14}.$$

Постоянная $C_{14} > 0$ не зависит от $Q(z)$.

Пусть $z = \rho e^{i\theta}$, $h < \rho < r$. Имеем, согласно (6),

$$\log |Q(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q(re^{i\varphi})| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \Gamma r} \log |Q(t)| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^l} \frac{1}{2^l \pi} \int_{\tilde{\partial}_{j,0}^{(l)}} \log |Q(t)| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi \leq \\
&\leq C_{14} + \frac{C_{15}}{\pi} \frac{1}{r - \rho} \sum_{l=1}^{\infty} 2^l \alpha_l \log \frac{1}{\alpha_l} < C(r, \rho).
\end{aligned}$$

Вследствие этого

$$\max_{|z| < \rho} |Q(z)| \leq e^{\min_{\rho < r < 1} C(r, \rho)}.$$

неполнота системы полиномов в области D_ρ доказана.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 14 XII 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колдыш М. В. Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques. Матем. сб. 5 (47) (1939), 391—402.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 379, 427.
3. Мергелян С. Н. Успехи математических наук, т. VIII, вып. 4 (56), 1953, стр. 21.

Ս. Ն. Մերգելյան, Ա. Պ. Թամազյան

ՈՉ ԺՈՐԴԱՆՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅՔՆԵՐԻ ՄԵԿ ԴԱՍՈՒՄ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թող P -ն լինի կատարյալ և ոչ խիտ կետերի բազմությունը $|z| = 1$ շրջանագծի վրա: L_P -ով նշանակենք հետևյալ հատվածների բազմությունը՝

$$\arg z = \arg t, \quad 1 - h \leq |z| \leq 1, \quad (0 < h < 1),$$

Բոլոր հնարավոր $t \in P$ համար:

D_ρ -ով նշանակենք L_P բազմության լրացումը $|z| < 1$ շրջանի նկատմամբ:

Հեղինակներն ապացուցում են հետևյալ թեորեմն:

Բազմանդամների սխառմը լրիվ է D_ρ տիրույթում, եթե հնարավոր է նշել P բազմության վրա ամենուրեք խիտ այնպիսի M հաշվելի բազմու-

թյուն, որ այդ բազմությունը ցանկացած կետի համար գոյություն ունենա
այդ կետը ծածկող ցանկացած փոքր երկարություն Δ ինտերվալ, որ

$$\text{mes}(\Delta, \text{CP}) < \exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{\text{mes} \Delta} \right\}, \quad (\text{A})$$

որտեղ CP-ն P-ի լրացումն է $|z| = 1$ շրջանագծի նկատմամբ:
Թեորեմայում նշված հստակաՆ հատկանիշը էապես չի կարելի լավաց-
նել, այսինքն՝ եթե (A) անհավասարությունը աջ մասում

$$\exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{\text{mes} \Delta} \right\}$$

ֆունկցիան փոխարինենք

$$\exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{(\text{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}$$

ֆունկցիայով, որտեղ ε —ցանկացած փոքր թիվ է, ապա թեորեման դադա-
րում է ճիշտ լինելուց: