

Г. В. Бадалян

Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Глава III. Некоторые приложения общей теории.

§ 1. Применение к суммированию асимптотических рядов.

§ 2. Факториальные ряды, как аппарат суммирования расходящихся рядов.

§ 3. Аналитическое и квази-аналитическое продолжения функций.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа является продолжением нашей статьи, помещенной в Известиях АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук, т. VI, № 5—6, 1953 г.) и посвящена применению изложенных там результатов к двум группам вопросов, которые касаются суммирования расходящихся рядов, а также аналитического и квази-аналитического продолжения функций.

В § 1 доказывается, что для того, чтобы асимптотический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$, определяющий функцию $\tilde{f}(z)$, суммировался методом факториального ряда по последовательности чисел $\{\gamma_n\}$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция

$\psi(x) \in C \left\{ \prod_1^{\infty} \gamma_n \right\} (\alpha, \infty)$, $\alpha \geq 0$, такая, что $\psi^{(k)}(\alpha) = c_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

причем порядок равномерной сходимости соответствующего ϵ -обобщенного ряда Тейлора равен σ_c .

Далее получается признак суммируемости асимптотических рядов методом факториального ряда.

В § 2 доказывается, что изложенный в работе метод суммирования рядов регулярен и суммирует ряды, которые не поддавались суммированию другими методами.

В § 3 вводятся определения:

Условимся говорить, что:

1. Бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки α , если задана совокупность ее последовательных производных в точке α .

2. Функция $\psi(x)$ аналитична в ε -области $D(\alpha, \{\gamma_v\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_v\}$ и $\alpha \geq 0$, если она разлагается в сходящийся при $x \in [\alpha, \infty)$ ряд

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_C \frac{e^{xz} dz}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}.$$

Доказывается теорема:

Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$, заданная своим элементом в окрестности точки $\alpha \in (0, \infty)$, $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, продолжалась аналитически или квазианалитически по ε -области $D(\alpha, \{\gamma_v\})$, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}, \quad \text{где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}, \quad \prod_{v=0}^m (t + \gamma_v) = \sum_{k=0}^m S_k^{(m)} t^{m-k}$$

сходился при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, $\sigma_c > 0$ — некоторое число; откуда получается один признак аналитического или квазианалитического продолжения функций.

Наконец, доказывается теорема об аналитическом продолжении одного класса функций, заданных своими рядами Дирихле.

Последняя теорема дает возможность судить о расположении особенностей всякого факториального ряда на границе его сходимости.

Глава III. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

В настоящей главе обобщенные факториальный ряд и ряд Тейлора применяются к суммированию асимптотических рядов, а также к вопросу аналитического и квазианалитического продолжения функций.

§ 1. Применение к суммированию асимптотических рядов

Определение 1 (e). В отличие обозначений в определении 1 назовем функции

$\phi_1(x) = \phi'(x)$, $\phi_2(x) = [e^{i_1 x} \phi_1(x)]'$, $\dots$, $\phi_{m+1}(x) = [e^{(i_m - i_{m-1})x} \phi_m(x)]'$, $\dots$, $m = 1, 2, \dots$, обобщенными последовательными ε -производными функции $\phi(x)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$.

Там где нет указания о форме обобщенных производных, следует их понимать в смысле определения 1; а в случае ε -производных всегда будет соответствующее указание.

Теорема (3.1). Всякая функция $\phi(x)$, имеющая на некотором $[\alpha, \infty)$, $(n+1)$ -ую интегрируемую производную, может быть представлена в виде

$$\psi(x) = \sum_{v=0}^n \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{(x-z)\zeta}}{\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta + r_n(\alpha, x), \quad (3.1)$$

где $x \in [\alpha, \infty)$, простой контур C_v — охватывает окрестности точек $\{-\gamma_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, v$, ($\gamma_0 = 0$), $a_k = e^{-\gamma_{k-1}^2} \psi_k(\alpha)$, где $\psi_k(x)$ — k -ая e -обобщенная производная функции $\psi(x)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$, а

$$\begin{aligned} r_n(\alpha, x) &= \int_{\alpha}^x e^{-\gamma_0 x_1} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} e^{-(\gamma_1 - \gamma_0)x_2} dx_2 \dots \\ &\dots \int_{\alpha}^{x_{n+1}} e^{-(\gamma_n - \gamma_{n-1})x_n} dx_n \int_{\alpha}^{x_n} \psi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эта теорема может быть доказана самостоятельно повторением метода теоремы (1.1), но и может быть получена из нее заменой переменных.

Применим второй способ.

Пусть $\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t)$.

Очевидно функция $\varphi(t)$ определена на $(0, u]$, где $u = e^{-\alpha}$ и там дифференцируема $(n+1)$ раз.

Для функции $\varphi(t)$ имеем представление:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_{z=-i\infty}^{z=i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)} d\zeta + R_n(u, t),$$

где $0 < t \leq u$, $\alpha = \alpha(\varphi) > 0$ — некоторое число.

$$R_n(u, t) = \int_u^1 t_1^{i_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{i_2-i_1-1} dt_2 \dots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{i_n-i_{n-1}-1} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1}.$$

Значит для функции $\psi(t)$ получим:

$$\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \sum_{v=0}^n \frac{a_v}{2\pi i} \int_{x=-i\infty}^{x=i\infty} \frac{e^{(x-z)\zeta}}{\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta + R_n(e^{-\alpha}, x); \quad (3.3)$$

здесь $x \in [\alpha, \infty)$.

Для определения коэффициентов a_v и $R_n(e^{-\alpha}, x)$ в терминах функции $\psi(x)$ нам придется $\varphi_{n+1}(t)$ выразить через обобщенные e -производные функции $\psi(x)$.

Для этого заметим, что в лемме 3 теоремы (1.8) доказано, что

$$\varphi_{m+1}(t) = \{\psi^{(m+1)}(x) + S_1^{(m)}\psi^{(m)}(x) + \dots + S_n^{(m)}\psi'(x)\} e^{(\gamma_{m+1})x}, \quad (3.4)$$

где числа $S_\nu^{(m)}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ определяются из тождества

$$\prod_{\nu=1}^m (\zeta + \gamma_\nu) = \sum_{k=0}^m S_k^{(m)} \zeta^{m-k}.$$

Нам теперь остается выразить $(m+1)$ -ую обобщенную e -производную функции $\psi(x)$ через ее обыкновенные производные и сравнить полученное выражение с $\varphi_{m+1}(x)$.

Имеем

$$\psi_1(x) = \psi'(x)$$

$$\psi_2(x) = [\psi_1(x)e^{\gamma_1 x}]' = [\psi'(x)e^{\gamma_1 x}]' = [\psi''(x) + \gamma_1 \psi'(x)]e^{\gamma_1 x}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= [\psi_2(x)e^{(\gamma_2 - \gamma_1)x}]' = \{[\psi''(x) + \gamma_1 \psi'(x)]e^{\gamma_1 x}\}' = \\ &= [\psi'''(x) + (\gamma_1 + \gamma_2)\psi''(x) + \gamma_1 \gamma_2 \psi'(x)]e^{(\gamma_2 - \gamma_1)x}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс $m+1$ раз, получим

$$\psi_{m+1}(x) = [\psi^{(m+1)}(x) + S_1^{(m)}\psi^{(m)}(x) + \dots + S_n^{(m)}\psi'(x)]e^{\gamma_{m+1}x}. \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.4) и (3.5), получаем

$$\varphi_{m+1}(t) = \psi_{m+1}(x)e^x. \quad (3.6)$$

Используя последнюю формулу, покажем как преобразуется

$$R_n(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_u^{t_{n-1}^{\gamma_{n-1}-1}} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1}$$

после замены $t = e^{-x}$.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} R_n(u, t) &= r_n(z, x) = \int_u^x e^{-\gamma_1 x_1} dx_1 \int_{x_1}^{x_2} e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)x_2} dx_2 \dots \\ &\dots \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{-(\gamma_n - \gamma_{n-1})x_n} dx_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1}, \end{aligned}$$

где $x_k = \ln \frac{1}{t_k}$, $z = \ln \frac{1}{u}$, причем берем арифметические значения логарифмов.

Для завершения доказательства теоремы нам остается выразить a_ν через производные функции $\psi(x)$.

Заметим, что согласно теоремам (1.1), (1.3) $a_\nu = u^{\gamma_{n-1}+1} \varphi_\nu(u)$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, $u = e^{-z}$, значит

$$a_v = \frac{\psi_n(\alpha) e^\alpha}{e^{(\gamma_v - 1)\alpha}} = e^{-\gamma_v \alpha} \psi_v(\alpha). \quad (3.7)$$

Этим теорема полностью доказана.

Определение 3 (e). Формулу

$$\psi(x) = \sum_{v=0}^n \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta + r_n(\alpha, x), \quad (3.1)$$

где $x \in [\alpha, \infty)$, $\alpha \geq 0$, простой контур C_v охватывает окрестности нулей функции $\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)$, а

$$r_n(\alpha, x) = \int_{\alpha}^x e^{-\gamma_1 x_1} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)x_2} dx_2 \dots \int_{\alpha}^{x_{n-1}} \psi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1},$$

будем называть обобщенной e -формулой Тейлора, а ряд

$$\psi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta, \quad (3.1')$$

который получается из (3.1), после перехода к пределу, когда $n \rightarrow \infty$ (при соблюдении условия сходимости), будем называть обобщенным e -рядом Тейлора.

Определение 4 (e). Число κ называется порядком равномерной сходимости ряда (3.1'), если оно является порядком равномерной сходимости ряда

$$\varphi(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{k=0}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta,$$

где $t = e^{-x}$, $u = e^{-\alpha}$ на сегменте $[0, u]$.

Введем классификацию функций $\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t)$, где $t \in (0, 1)$.

Определение 8 (e). Функция $\psi(x)$ на $(0, \infty)$ принадлежит к классу функций $C_{\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_{\nu_i}\right\}} \left(C_{\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_{\nu_i}\right\}}(0, \infty)\right)$, если функция

$$\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) \in C_{\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_{\nu_i}\right\}}(0, 1).$$

Определение 8' (e). Функция $\psi(x)$ на $[a, \infty)$, где $a \geq 0$, принадлежит к классу функций $C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\} \cdot \left(C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}[a, \infty)\right)$, если функция

$$\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) \in C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}(0, u], \text{ где } u = e^{-a}.$$

Из определений 8 и 8' (e) следует.

Теорема (3.2). Пусть функция $\psi(x) \in C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}(0, \infty)$, тогда для

всякой точки $x \in (0, \infty)$ существует последовательность чисел $\{\delta \gamma_i\}$, где $\delta = \delta(x, \{\gamma_i\})$, такая, что при $x \leq x < \infty$ сходится ряд

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{(x-\zeta)\tau}}{\prod_{i=1}^n (\zeta + \delta \gamma_i)} d\zeta, \quad (3.8)$$

где $x > 0$ — некоторое число, $a_n = e^{-a} \gamma_{n-1} \psi_n(x)$, а $\psi_n(x)$ — n -ая обобщенная e -производная функции.

Замечание 5. Не нарушая общности, впредь вместо $\delta \gamma_i$ всегда будем писать γ_i .

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что существует число $x > 0$ такое, что при $t \in (0, u]$, где $u = e^{-a}$, сходится ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{i=1}^n (\zeta + \gamma_i)} d\zeta,$$

где $\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) = \psi(x)$.

Последняя теорема может быть применена к суммированию асимптотических рядов, а именно справедливо:

Теорема (3.3). Асимптотический ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots \quad (3.9)$$

определяющий функцию $i(z)$, всегда суммируем при помощи факториального ряда по последовательности чисел $\{\gamma_i\}$, когда $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, где $\sigma_c > 0$ некоторое число, если существует $\psi(x) \in C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}(0, \infty)$ такая, что в некоторой точке $x \in (0, \infty)$,

$$\psi^{(n)}(x) = c_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, x, \quad x = \sigma_c.$$

Из условия $\psi(x) \in C\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}(0, \infty)$ следует, что

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{e^{-(x-\zeta)\zeta}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta,$$

где $\alpha \leq x < \infty$, $x_1 > 0$ некоторое число, превосходящее порядок равномерной сходимости последнего ряда α .

Составим интеграл

$$F(z) - c_0 = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(z-x)x} \psi(x) dx, \quad (3.10)$$

который существует для всех z при $\operatorname{Re}(z) > \alpha$.

Обозначим $x - \alpha = x'$, тогда (3.10) запишется в виде

$$F(z) - c_0 = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(\alpha + x) dx. \quad (3.10')$$

Интегрируя (3.10') по частям, что законно в силу леммы 2 теоремы (1.8), получим

$$F(z) = c_0 + \frac{\psi(\alpha)}{z} + \frac{\psi'(\alpha)}{z^2} + \dots + \frac{\psi^{(n)}(\alpha)}{z^{n+1}} + R_n(z),$$

где

$$R_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi^{(n+1)}(\alpha + x) dx.$$

По условию теоремы $\psi^{(k)}(\alpha) = c_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, значит

$$F(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} + R_n(z).$$

Оценим теперь сверху $|R_n(z)|$, когда $\operatorname{Re}(x) > \alpha > 0$. Для этого заметим, что в лемме 3 теоремы (1.8) доказано, что

$$|\psi^{(n)}(\alpha)| < C(\alpha_1) \prod_{k=1}^n (\alpha_1 + \gamma_k) (e - \varepsilon)^n e^{\alpha_1(x_1 - \alpha)},$$

где $\alpha_1 > \alpha = \sigma_c$ — произвольное число, $\sigma_c > 0$ — абсцисса сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left(-z \sum_{l=1}^n \frac{1}{\gamma_l} \right), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство показывает, что

$$|\psi^{(n)}(\alpha + x)| < C(\alpha_1) \prod_{k=1}^n (\alpha_1 + \gamma_k) (e - \varepsilon)^n e^{\alpha_1(x_1 - \alpha)}.$$

Согласно полученному неравенству имеем

$$|R_n(z)| < \frac{C(\alpha_1)}{|z|^{n+1}} \prod_{k=1}^n (\alpha_1 + \gamma_k) (e - \varepsilon)^n \int_0^{\infty} e^{-[\operatorname{Re}(z) - \alpha_1]x} dx,$$

или, при $\operatorname{Re}(z) > \alpha_1 > \alpha$,

$$\begin{aligned}
 & (e - \varepsilon)^n \prod_{k=1}^n (z + \gamma_k) \\
 |R_n(z)| & < C_1(z) \frac{1}{|z|^{n+1}} < \\
 & \prod_{k=1}^n [(e - \varepsilon) \gamma_k] e^{\gamma_k \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \\
 & < C_2(z) \frac{1}{|z|^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

определяет функцию $F(z)$ единственным образом, следовательно $F(z) \equiv f(z)$ и

$$f(z) - c_0 = \int_0^\infty e^{-zx} \psi(x + \alpha) dx = \int_\alpha^\infty e^{-(x-\alpha)x} \psi(x) dx.$$

Функция $\varphi(t) = \psi(e^{-t})$ на $[0, u]$, где $u = e^{-\alpha}$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta.$$

Значит

$$\begin{aligned}
 f(z) - c_0 &= \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^z \psi(\ln t) d\left(\frac{t}{u}\right) = \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^x \varphi(t) \frac{dt}{u} = \\
 &= \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta \frac{dt}{u},
 \end{aligned}$$

где $\gamma_1 > \alpha$.

Нетрудно заметить, что при $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ будем иметь

$$f(z) - c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta \cdot \frac{dt}{u},$$

где C_n — окружность $|\zeta + \gamma_n| = \gamma_n + \delta$, причем $0 < \delta < \alpha$.

Совершая почленную интеграцию с перестановкой интегралов (что законно), получаем

$$f(z) - c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{dz}{(z-\zeta) \prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}.$$

Так как $\operatorname{Re}(z) > \kappa$, значит z находится во внешней к контуру C_n области, а так как подынтегральное выражение вне контура C_n кроме полюса $\zeta = z$ других особенностей не имеет, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{dz}{(z-\zeta) \prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} = \frac{1}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}.$$

Следовательно, ряд

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}$$

сходится при всяком z , $\operatorname{Re}(z) > \kappa = \sigma_c$.

Этим теорема доказана.

Докажем предложение, являющееся обращением теоремы (3.3).

Теорема (3.4). Если асимптотический ряд $f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$

$\dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$ суммируется методом факториального ряда по последовательности чисел $\{\gamma_v\}$, $v=0, 1, 2, \dots$, $\gamma_0=0$, тогда существует единственная функция $\psi(x)$, принадлежащая к классу

$$C \left\{ \prod_{v=1}^n \gamma_v \right\} [\alpha, \infty),$$

такая, что $\psi^{(k)}(\alpha) = c_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$, причем порядок равномерной сходимости κ обобщенного e -ряда $\psi(x)$ равняется σ_c .

Действительно, составим ряд

$$f(z) - c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)},$$

который согласно условию теоремы сходится при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, где

$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$, а числа $S_k^{(n)}$ определяются из тождества

$$\prod_{v=1}^n (x + \gamma_v) = \sum_{k=1}^n S_k^{(n)} x^{n-k}.$$

Составим теперь функцию

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} dz,$$

где $x_1 > \sigma_c$, $u \in (0, 1)$, $t \in (0, u]$.

Очевидно, что в силу теорем (1.7) и (1.8)

$$\varphi(t) \in C\left(\prod_{\gamma=0}^n \gamma_v\right)(0, 1] \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_2-i\infty}^{x_1+i\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{-z} [f(\zeta) - c_0] d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{e^{z(x-\pi)}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta$$

или

$$\psi(x + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{e^{z\alpha}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta.$$

Легко заметить, что

$$\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно, согласно формуле (3.5) имеем

$$\Phi_{m+1}(z) = [\Phi^{(m+1)}(z) + S_1^{(m)}\Phi^{(m)}(z) + \dots + S_m^{(m)}\Phi'(z)]e^{zm^2}$$

или

$$\Phi_{m+1}(0) = \Phi^{(m+1)}(0) + S_1^{(m)}\Phi^{(m)}(0) + \dots + S_m^{(m)}\Phi'(0).$$

Полагая $\psi(x + \alpha) = \Phi(x)$, $m+1=n$, получаем

$$a_n = \psi^{(n)}(\alpha) + S_1^{(n-1)}\psi^{(n-1)}(\alpha) + \dots + S_{n-1}^{(n-1)}\psi'(\alpha).$$

Задавая m значения $m = 1, 2, \dots$, получаем треугольную систему линейных уравнений относительно $\psi^{(k)}(\alpha)$, $k = 1, 2, \dots, (m+1)$.

Решая имеющуюся систему уравнений и зная, что

$$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}, \text{ получаем } \psi^{(n)}(z) = c_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

нетрудно заметить, что и $c_1 = \psi(z)$. Значит $\psi^{(n)}(z) = c_{n+1}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

С другой стороны, на основании формулы (1.19) леммы 2 теоремы (1.8), а также теоремы (1.7) получаем, что порядок равномерной сходимости обобщенного e -ряда функции $\psi(x)$ равен σ_c .

Этим теорема доказана.

Объединяя теоремы (3.3) и (3.4), получаем:

Теорема (3.5). Для того, чтобы асимптотический ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots,$$

определяющий функцию $i(z)$, суммировался методом факториального ряда по последовательности чисел $\{\gamma_n\}$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция

$$\psi(x) \in C_{\left\{ \prod_{i=1}^n \gamma_i \right\}} [\alpha, \infty)$$

такая, что $\psi^{(k)}(x) = c_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем порядок равномерной сходимости к соответствующего e -обобщенного ряда Тейлора равен σ_c .

Отметим также предложение.

Теорема (3.6). Если асимптотический ряд

$$i(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

методом факториального ряда суммируем по последовательности $\{\gamma_n\}$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$, тогда этот же асимптотический ряд суммируем по тому же методу по любой последовательности $\{\gamma'_n\}$,

когда начиная с $\nu = 1$, $\gamma'_\nu \geq \gamma_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty$, для всякого z , при

$\operatorname{Re}(z) > \sigma'_c$, где $\sigma'_c \leq \sigma_c$.

Действительно, пусть ряд

$$i(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_\nu)} \quad (3.11)$$

сходится при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$.

Тогда в силу теоремы (1.5) функция $i(z) - c_0$ разлагается также в факториальный ряд по последовательности $\{\gamma'_\nu\}$, где начиная с $\nu = 1$,

$\gamma'_\nu \geq \gamma_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty$, причем каждая точка сходимости $\sigma \geq \sigma_c$,

$J_m \sigma = 0$ ряда (3.11) является точкой сходимости также для ряда

$$f(x) - c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}. \quad (3.11')$$

Этим очевидно устанавливается, что абсцисса сходимости ряда (3.11') не больше σ_c .

Так как числа $E_k^{(n)}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$, получаемые из тождества

$$\prod_{v=1}^n (z + \gamma_v) = \sum_{k=0}^n E_k^{(n)} z^{n-k}$$

называются числами Стирлинга, будет естественно числа $\{S_k^{(n)}\}$, получаемые из тождества

$$\prod_{v=1}^n (z + \gamma_v) = \sum_{k=0}^n S_k^{(n)} z^{n-k},$$

называть обобщенными числами Стирлинга.

Впредь под символами $S_k^{(n)}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ будем понимать обобщенные числа Стирлинга.

Следующие две теоремы могут служить в качестве признаков суммируемости асимптотических рядов методом факториального ряда.

Теорема (3.7). Пусть функция $f(z)$ задана своим асимптотическим рядом $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \exp\left(-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}\right)}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \quad \text{где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)} \quad (3.12)$$

имеет конечную абсциссу сходимости $\sigma_c > 0$, тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)},$$

причем абсцисса сходимости последнего ряда также равняется σ_c .

Для доказательства теоремы заметим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}$$

сходится для всякого z , удовлетворяющего неравенству $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$.

Составим далее функции

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta$$

и

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt,$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad 0 < t \leq 1.$$

Очевидно, что функция $f_1(z)$ определяется единственным образом в силу единственности функции $\varphi(t)$; учитывая то обстоятельство, что ряд

$$t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta$$

при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$ на $[0, 1]$ можно интегрировать почленно, получим

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\gamma=0}^n (z + \gamma_v)}.$$

С другой стороны, интегрируя по частям

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx,$$

получим

$$f_1(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi^{(n)}(x) dx,$$

или

$$f_1(z) \sim \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

Учитывая единственность функции $f(z)$, замечаем, что

$$f_1(z) = f(z).$$

Значит при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}.$$

Последняя теорема существенно упрощается, когда последовательность чисел $\{\gamma_v\}$ удовлетворяет условию $\gamma_v \leq \omega v$, где $v = 1, 2, \dots$, а $\omega > 0$ — некоторое число.

Теорема (3.7'). Пусть функция $f(z)$ задана своим асимптотическим рядом

$$f(z) \sim \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

а $|a_n| < C \prod_{v=1}^n (x + \gamma_v)$, где $\gamma_v \leq \omega v$, $v = 1, 2, \dots, \infty$, $\omega > 0$, $x > 0$ — не-

которые числа, $a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k E_{n+1-k}^{(n-1)}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$ суммируется методом факториального ряда по последовательности $\{\gamma_v\}$ при всех z , для которых имеет место неравенство $\operatorname{Re}(z) > x + \delta$, где $\delta > \omega$.

Для доказательства этой теоремы нам достаточно заметить, что из условия

$$|a_n| \leq C \prod_{v=1}^n (x + \gamma_v)$$

следует, что при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{\prod_{v=1}^n (x + \gamma_v + \delta)} \right| &< C \frac{|a_n| e^{-\sum_{v=1}^n \frac{1}{x + \gamma_v}}}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} e^{-\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \leq \\ &\leq C e^{-\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \leq C e^{-\frac{\delta - \varepsilon_1}{n} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} = C_2 n^{-\frac{\delta - \varepsilon_1}{\omega}}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ сколь угодно малые числа, $C_2 = C_2(\varepsilon_1)$.

Так как $\delta > \omega$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\delta-\varepsilon_1}{\omega}}$ сходится, следовательно, сходится также ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq n}} (z + \gamma_{\nu})}$, когда $\operatorname{Re}(z) > \alpha + \delta$.

Дальше доказательство теоремы продолжается так, как в теореме (3.7).

§ 2. Факториальные ряды, как аппарат суммирования расходящихся рядов

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы показывают, что факториальные ряды могут быть рассмотрены как аппарат суммирования рядов.

Для обоснования этого следует показать, что этот процесс удовлетворяет условиям:

1. Метод суммирования регулярен, т. е. всякий сходящийся ряд преобразуется также в сходящийся ряд.

2. Если данный ряд суммируется методом факториальных рядов по двум последовательностям $\{\gamma_{\nu}\}$ и $\{\gamma'_{\nu}\}$, то суммируется к единственной сумме, независимо от взятых последовательностей.

Речь идет о суммировании рядов вида

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots \quad (3.13)$$

Не нарушая общности, мы можем рассматривать ряды вида

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots \quad (3.13')$$

Ряд (3.13) получается из (3.13') при $z=1$.

Покажем, что процесс суммирования методом факториальных рядов регулярен; для этого заметим, что если в теореме (1.5) гл. I настоящей работы положить $\gamma_{\nu}=0$, $\nu=0, 1, 2, \dots$ (на что мы имеем право, так как в теореме нигде не использовано отличие от нуля чисел γ_{ν} , $\nu=1, 2, \dots$), тогда получим предложение.

Теорема. Если функция $f(z)$ при $|z| > \sigma_c > 0$ представляется сходящимся рядом

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad (3.13'')$$

то функция $f(z)$ разлагается в факториальный ряд по любой последовательности $\{\gamma'_{\nu}\}$, если только $0 < \gamma'_1 \leq \gamma'_2 \leq \dots$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_{\nu}} = \infty$.



причем каждая точка σ , где $J_m(\sigma) = 0$, сходимости ряда (3.13'') является точкой сходимости полученного факториального ряда

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}$$

Этим регулярность процесса суммирования по методу факториального ряда можем считать доказанной.

В частности, получаем, что если ряд $c_0 + \frac{c_1}{\sigma} + \dots + \frac{c_n}{\sigma^n} + \dots$ сходится, то сходится также ряд

$$c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (\sigma + \gamma_v)}, \quad \text{где, } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)},$$

притом к той же сумме.

Теперь покажем, что если данный ряд суммируется по методу факториальных рядов по двум последовательностям $\{\gamma_v\}$ и $\{\gamma'_v\}$, то суммируется к одной единственной сумме.

Теорема (3.8). Пусть ряды

$$f_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (\sigma + \gamma_v)} \quad \text{и} \quad f_2(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{\prod_{v=0}^n (\sigma + \gamma'_v)},$$

$$\text{где} \quad a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}, \quad a'_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}.$$

$$S_k^{(n-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (\zeta + \gamma_v)}{\zeta^{n-k}} d\zeta,$$

$$S'_k{}^{(n-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (\zeta + \gamma'_v)}{\zeta^{n-k}} d\zeta$$

при данном σ , $J_m\sigma = 0$ сходятся, тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Составим ассоциированные с функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$ по Лапласу функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Нетрудно показать, что

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n'} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_{\gamma})},$$

где контуры C_n и C_n' — охватывают окрестности полюсов подинтегральных функций. Эти ряды сходятся на $(0, 1]$, причем порядок равномерной сходимости каждого из них не больше σ .

Сделаем замену переменного $t = e^{-x}$, получим:

$$\varphi_1(e^{-x}) = \psi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_{\gamma})} d\zeta,$$

$$\varphi_2(e^{-x}) = \psi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n'} \frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma_{\gamma})} d\zeta.$$

Имеем

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_1(x) dx, \quad f_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_2(x) dx,$$

где $\operatorname{Re}(z) \geq \sigma$.

Проинтегрировав последние интегралы по частям, соответственно получим:

$$f_1(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_1^{(n)}(x) dx,$$

$$f_2(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_2^{(n)}(x) dx.$$

Обозначим

$$\frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_1^{(n)}(x) dx = r_{1n}(z), \quad \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi_2^{(n)}(x) dx = r_{2n}(z),$$

где $\operatorname{Re}(z) \geq \sigma$.

В силу неравенства (1.19') имеем

$$|\psi_1^{(n)}(x)| < c(x) \prod_{\gamma=1}^n (x + \gamma_{\gamma}) (e - \varepsilon)^n e^{\varepsilon x}, \quad (1.19')$$

где $x \in [0, \infty)$.

Имеем также

$$|\psi_2^{(n)}(x)| < c(x) \prod_{\gamma=1}^n (x + \gamma_{\gamma}') (e - \varepsilon)^n e^{\varepsilon x},$$

где $\gamma_n = \delta_1 \frac{m_n}{m_{n-1}}$, $\gamma'_n = \delta_2 \frac{m'_n}{m_{n-1}}$, $n = 1, 2, \dots$

Это значит, что $\psi_1(x) \in C_{\{m_n\}}[0, \infty)$, $\psi_2(x) \in C_{\{m'_n\}}[0, \infty)$, следовательно,

$$|r_{1n}(z)| < \frac{k^n m_n}{|z|^n}, \quad |r_{2n}(z)| < \frac{k'^n m'_n}{|z|^n}$$

$$\operatorname{Re}(z) > \sigma = \sigma_c > 0.$$

Используя решение проблемы Ватсона, убедимся, что $f_1(z) \equiv f_2(z)$; следовательно $f_1(\sigma) = f_2(\sigma)$.

Этим теорема доказана.

Теперь естественно поставить вопрос возможностей предложенного метода суммирования рядов.

Различим два понятия:

1. Процесс суммирования условимся называть сильным методом, если он данный ряд преобразует в сравнительно быстро сходящийся ряд.

2. Процесс суммирования будем называть мощным методом, если по данному методу суммируются ряды более широкого класса.

Заметим, что сильный процесс суммирования может оказаться маломощным методом (процессом) или, наоборот, более мощный метод суммирования в применении к отдельным рядам может оказаться слабосильным.

Докажем, что метод факториального ряда суммирования рядов является наиболее мощным методом суммирования.

Действительно, пусть имеем ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots$$

или ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Если этот ряд определяет единственную функцию, то последняя должна быть представлена в виде

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + r_n(z),$$

где $|r_n(z)| \leq m_n k^n |z|^{-n}$ для всех z , удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re}(z) > \sigma$ ($\sigma > 0$ — некоторое число).

Это значит, что существует функция $\psi(x)$, ассоциированная с $f(z)$ по Лапласу:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \psi(x) dx$$

и такая, что $\psi(x) \in C_{\{m_n\}}[0, \infty)$, $\psi^{(n)}(0) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-(\sigma+x)z} \psi(x)] = 0.$$

Функция $\psi(x)$, а с ней и $f(z)$, определяются единственным образом только тогда, когда класс $C_{\{m_n\}}(0, \infty)$ (в смысле Карлемана) является классом аналитических или квази-аналитических функций.

С другой стороны, известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ суммируем по методу факториального ряда, если существует функция $\psi(x) \in C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, \infty)$,

где $\gamma_v = \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta$, $v = 1, 2, \dots$, $0 < \delta < \infty$ такая, что $\psi^{(n)}(0) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Из последних рассуждений заключаем, что асимптотический ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

определяет единственную функцию $f(z)$, если ассоциированная с $f(z)$ функция $\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t) \in C_{\{m_n\}}(0, 1]$, причем существует такое

конечное число σ , что $\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \varphi(t) = 0$. Но ряд $c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ суммируется методом факториального ряда, если $\varphi(t) \in C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, 1]$

(в смысле определения 8), где $\gamma_v = \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta$, $v = 1, 2, \dots$, $0 < \delta < \infty$.

Заметим, что

$$C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, 1] \subseteq C_{\{m_n\}}(0, 1],$$

причем неизвестно

$$C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, 1] \subseteq C_{\{m_n\}}(0, 1] \quad \text{или} \quad C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, 1] = C_{\{m_n\}}(0, 1].$$

В последнем случае получили бы, что определяемость асимптотического ряда и его суммируемость методом факториального ряда осуществляются одновременно.

Но и без этого, тот факт, что $C_{\{m_n\}}[0, 1] \subseteq C_{\left\{\prod_{v=1}^n \gamma_v\right\}}(0, 1]$, говорит о том, что метод факториального ряда является самым мощным из всех известных методов суммирования расходящихся рядов, потому что все известные методы суммирования, возможность суммирования

ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ связывают с фактом аналитичности функции

$$c_0 + c_1 z + \frac{c_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{c_n}{n!} z^n + \dots$$

в той или другой области.

§ 3. Аналитическое и квази-аналитическое продолжение функций

Определение 9. Условимся говорить, что бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки α , если задана последовательность чисел $\{c_n\}$ $n = 1, 2, \dots$ такая, что $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В случае аналитичности функции $\psi(x)$ такое задание функции равносильно заданию тейлоровского разложения функции $\psi(x)$ в окрестности точки α .

В случае квази-аналитичности функции $\psi(x)$ элемент функции также определяет ее в некотором интервале, содержащем точку α .

Очевидно, что другие классы бесконечно дифференцируемых функций своими элементами однозначно не определяются.

Так как аналитические и квази-аналитические функции своими элементами вполне (притом однозначно) определяются, то для них ставится проблема аналитического или квази-аналитического продолжения, когда задан элемент данной функции.

В настоящем параграфе рассматривается несколько теорем такого характера.

Для этого достаточно обратиться к теоремам (3.5), (3.7), (3.7') первого параграфа настоящей работы, выражая их в терминах функции $\psi(x)$, являющейся ассоциированной с $f(z)$ по Лапласу функцией.

Определение 10. Мы говорим, что функция аналитична в e -области $D(\alpha, \{\gamma_n\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_n\}$ и $\alpha \geq 0$, если она разлагается в обобщенный e -ряд Тейлора по последовательности $\{\gamma_n\}$, сходящийся при $x \in [\alpha, \infty)$.

Замечание 6. Заметим, что если функция $\psi(x)$ аналитична в e -области $D(\alpha, \{\gamma_n\})$, то $\psi(x) \in C\left(\prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n\right)[\alpha, \infty) \subset C\{m_n\}[\alpha, \infty)$, где

$$m_n = \prod_{i=1}^n \gamma_i, \text{ следовательно, или аналитична в некоторой области, содержащей } [\alpha, \infty), \text{ или квази-аналитична на } [\alpha, \infty) \text{ с точным указанием класса.}$$

Полученные теоремы соответственно будут занумерованы (3.5*), (3.7*) и (3.7'').

Теорема (3.5*). Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$, заданная своим элементом в окрестности точки $\alpha \in (0, \infty)$, $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ продолжалась аналитически или квази-аналитически по e -области $D(\alpha, \{\gamma_n\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_n\}$ и α , необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}, \text{ где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$$

сходилсся при $\operatorname{Re} z > \sigma_c$, $\sigma_c > 0$ — некоторое число.

Легко заметить, что доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы (3.5) лишь тем, что в этом случае необходимое и достаточное условия переставлены местами, поэтому мы здесь ее доказывать не будем.

Теперь выразим в терминах функции $\psi(x)$ теоремы (3.7) и (3.7').

Эти теоремы очевидно будут одновременно являться признаками аналитического или квази-аналитического продолжения функции.

Теорема (3.7). Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки $\alpha \in [0, \infty)$ $\varphi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$ и пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-z \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i}}}{\prod_{i=1}^n \gamma_i}, \text{ где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$$

сходится при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, тогда функция $\psi(x)$ продолжается аналитически или квази-аналитически по ε -области, определяемой последовательностью $\{\gamma_n\}$ и α .

Эта теорема также не нуждается в доказательстве.

Между прочим, теорема (3.7*) позволяет установить также в каком классе $C_{\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}}[\alpha, \infty)$ продолжается функция $\psi(x)$.

Действительно, в силу теоремы (1.6) нетрудно заметить, что если функция $\psi(x)$ продолжается по ε -области $D(\alpha, \{\gamma_n\})$, то она продолжается также по ε -области $D(\alpha, \{\gamma'_n\})$, если только, начиная с $n=1$, $\gamma'_n \geq \gamma_n$.

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_n} = \infty.$$

Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Замечание 5 в силу теоремы (2.9) показывает, что функция $\psi(x)$ может аналитически или квази-аналитически продолжаться по ε -области $D(\alpha, \{\gamma'_n\})$ тогда, когда она не продолжается по ε -области

$$D(\alpha, \{\gamma_n\}).$$

Таким образом, теоремы (3.5*) и (3.7*) не только вообще отвечают на вопрос возможности аналитического или квази-аналитического продолжения, но и указывают класс функций $C_{\left\{\prod_{i=1}^n \gamma_i\right\}}[\alpha, \infty)$,

которому принадлежит функция $\psi(x)$.

Теорема (3.7''). Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки $\alpha \in [0, \infty)$

$$|a_n| = \left| \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)} \right| \leq \prod_{v=1}^n (z + \gamma_v).$$

где $\kappa > 0$, и начиная с некоторого номера p , $\gamma_v \leq \omega v$, ($v = p, p+1, \dots$), тогда функция $\psi(x)$ аналитична в области

$$|e^{-\omega(z-\kappa)} - 1| < 1.$$

Для доказательства этой теоремы заметим, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)} \quad \text{сходится при } \operatorname{Re}(z) > \kappa + \delta, \text{ где } \delta > \omega > 0.$$

Согласно теореме (1.5) функция $f(z)$ при $\operatorname{Re}(z) > \kappa + \delta$ разлагается также в ряд

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a'_v}{\prod_{v=0}^v (z + \gamma'_v)},$$

где $\gamma'_v = \gamma_v$, когда $v < p$ и $\gamma'_v = \omega v$, когда $v \geq p$.

Составим теперь функцию

$$\varphi(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a'_v}{2\pi i} \int_{\gamma'_v - i\infty}^{\gamma'_v + i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^v (\zeta + \gamma'_v)}, \quad \kappa_1 > \kappa + \delta.$$

Известно, что полученный ряд при $t \in (0, 1]$ можно дифференцировать любое число раз.

После p -кратного обобщенного дифференцирования по последовательности $\{\gamma'_v\}$, получим:

$$\varphi_{(p)}(t) = (-1)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a'_n}{2\pi i} \int_{\gamma'_n - i\infty}^{\gamma'_n + i\infty} \frac{t^{-\zeta - \gamma_{p-1} - 1}}{\prod_{v=p}^n (\zeta + \gamma'_v)} d\zeta.$$

В силу формул (4) и (5) главы II работы [1] получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{(p)}(t) &= (-1)^p \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-p-1} a'_n \omega_{n-p-1}(t, \gamma'_p, \gamma'_{p+1}, \dots, \gamma'_n) t^{\gamma_p - \gamma_{p-1} - 1} = \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} a'_n t^{\gamma_p - \gamma_{p-1} - 1} \int_1^t t_1^{n-1} dt_1 \int_1^t t_2^{n-1} dt_2 \dots \int_1^t t_{n-p-1}^{n-1} dt_{n-p-1}. \end{aligned}$$

или

$$t^{p+1} \varphi_{p+1}(t) = t^{(p+1)\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{(t^\omega - 1)^n}{n!},$$

причем ряд в правой части последнего соотношения сходится на $(0, 1]$; следовательно он сходится в $|t^\omega - 1| < 1$. Это значит, что функция $\varphi(t)$ регулярна в $|t^\omega - 1| < 1$.

Составим теперь функцию

$$\psi_*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\substack{\zeta_1 + i\infty \\ \zeta_1 - i\infty}}^{\zeta_1 + i\infty} \frac{e^{\zeta x}}{\prod_{n=0}^{\infty} (\zeta + \gamma_n)} d\zeta.$$

Очевидно, что функция $\psi_*(x)$ получается из $\varphi(t)$ после замены переменной $t = e^{-x}$. Это значит, что функция $\psi_*(x)$ регулярна в области $|e^{-\omega x} - 1| < 1$.

С другой стороны, замечаем, что

$$\psi_*^{(n)}(0) = c_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это значит, что

$$\psi_*(z) = \psi_*(z + \alpha) = \psi_*(z'),$$

следовательно, функция $\psi_*(z')$ регулярна в области

$$|e^{-\omega(z' - z)} - 1| < 1.$$

Этим теорема доказана.

Покажем, что теорема (1.5) может быть использована также для аналитического продолжения некоторых рядов Дирихле, Ньютона и Р. Лагранжа.

Рассмотрим две последовательности чисел $\{\alpha_n = u\gamma_n\}$, $\{\beta_n = v\gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, а u и v — произвольные, отличные от нуля комплексные числа.

Пусть последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет еще условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[\sigma(z) \sum_{l=1}^n \frac{1}{\gamma_l}]}{\gamma_n^2} < +\infty, \text{ где } \sigma > 0 \text{ — некоторое число, а}$$

$$\sigma(\alpha) = \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right).$$

Все эти условия в совокупности будут называться условиями совпадения.

Докажем теперь предложение о совпадении особенностей на общей прямой сходимости некоторого ряда Р. Лагранжа и ассоциированного с ним ряда Дирихле.

Теорема (3.9). При выполнении условий совпадения на общей границе (прямой) сходимости особенностей рядов

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right] \quad (3.14)$$

и

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{v=1}^n \frac{1 - \frac{z}{\alpha_v}}{1 + \frac{z}{\beta_v}} \quad (3.15)$$

совпадают.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию

$$M(z) = \prod_{v=1}^n \frac{1 - \frac{z}{\alpha_v}}{1 + \frac{z}{\beta_v}} e^{z \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right)},$$

(в силу условий теоремы функция $M(z)$ существует) и составим разность

$$\begin{aligned} g_p(z) - \frac{f_p(z)}{M(z)} &= \sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right] - \\ &- \sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right] \prod_{v=n+1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_v} \right) e^{-\frac{z}{\beta_v}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_v} \right) e^{\frac{z}{\alpha_v}}}. \end{aligned}$$

После вынесения общего множителя за скобку, получаем

$$g_p(z) - \frac{f_p(z)}{M(z)} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right)} \left[1 - \prod_{v=n+1}^{\infty} \frac{1 + \frac{z}{\beta_v}}{1 - \frac{z}{\alpha_v}} e^{-\left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) z} \right]. \quad (3.16)$$

Докажем, что для произвольного заранее заданного числа $\epsilon > 0$ можно указать целое число $n_0 > 0$ такое, что для всех $p \geq n_0$ будем иметь $\left| g_p(z) - \frac{f_p(z)}{M(z)} \right| < \epsilon$ равномерно для всех z , удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c - \alpha$, где σ_c — общая абсцисса сходимости рядов (3.14) и (3.15).

Примем обозначения:

$$A_n = a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right],$$

$$B_n = 1 - \prod_{s=n+1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_s}\right) e^{-\frac{z}{\beta_s}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_s}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_s}}}$$

и применим преобразование Абеля

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) \sum_{m=p}^n A_m + B_q \sum_{m=p}^q A_m.$$

С этой целью составим

$$B_n - B_{n+1} = \prod_{s=n+2}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_s}\right) e^{-\frac{z}{\beta_s}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_s}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_s}}} \left[\frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_{n+1}}\right) e^{-\frac{z}{\beta_{n+1}}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n+1}}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_{n+1}}}} - 1 \right].$$

Известно, что при $n \rightarrow \infty$ для конечных z справедливо:

$$\left| \prod_{n+1=\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_s}\right) e^{-\frac{z}{\beta_s}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_s}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_s}}} \right| \rightarrow 1.$$

Для краткости обозначим

$$\frac{\left(1 + \frac{z}{\beta_s}\right) e^{-\frac{z}{\beta_s}}}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_s}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_s}}} = e^{v_s(z)}.$$

С одной стороны, имеем

$$v_s(z) = \ln \left(1 + \frac{z}{\beta_s}\right) - \frac{z}{\beta_s} - \ln \left(1 - \frac{z}{\alpha_s}\right) - \frac{z}{\alpha_s} \quad (3.17)$$

а, с другой стороны,

$$\left| e^{v_s(z)} - 1 \right| = \left| \frac{v_s(z)}{1!} + \frac{v_s^2(z)}{2!} + \dots \right| < |v_s(z)| \cdot \exp |v_s(z)|.$$

Из (3.17) для достаточно больших s получаем:

$$|v_s(z)| = \left| -\frac{z^2}{2\beta_s^2} + \frac{z^3}{3\beta_s^3} + \dots + \left[\frac{z^2}{2\alpha_s^2} + \frac{z^3}{3\alpha_s^3} + \dots \right] \right| <$$

$$\leq \frac{|z|}{2 \cdot |\beta_v|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|\beta_v|}} + \frac{|z|}{2 \cdot |\alpha_v|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|\alpha_v|}} < \frac{c}{\gamma_v^2}, \quad (3.17')$$

где c — постоянная, зависящая от $|z|$ и u, v .

Таким образом,

$$|e^{v_v(z)} - 1| \leq \frac{c}{\gamma_v^2}, \quad (3.18)$$

Следовательно в силу соотношений (3.17') и (3.18) получаем

$$|B_n - B_{n+1}| < \frac{c_1}{\gamma_{n+1}^2},$$

где c_1 зависит, как и c , от $|z|$, u, v .

Оценим теперь

$$|B_q| = |1 - \exp\left(\sum_{v=q+1}^{\infty} v_v(z)\right)| \leq \sum_{v=q+1}^{\infty} |v_v(z)| \cdot \exp\left(\sum_{v=q+1}^{\infty} |v_v(z)|\right).$$

Зная, что $|v_v(z)| < \frac{c}{\gamma_v^2}$ и учитывая сходимость ряда $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2}$, бу-

дем иметь
$$|B_p| < c_2 \sum_{v=q+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v^2},$$

где $c_2 = c_2(|z|, v, u)$.

Перейдя теперь в формуле Абеля к модулям, получим

$$\left| \sum_{n=p}^q A_n B_n \right| \leq \sum_{n=p}^q |B_n - B_{n+1}| \cdot \left| \sum_{m=p}^n A_m \right| + |B_q| \cdot \left| \sum_{m=p}^n A_m \right|,$$

а после замены $|B_n - B_{n+1}|$ и $|B_q|$ своими мажорантами будем иметь

$$\left| \sum_{n=p}^q B_n A_n \right| < c_3 \left[\sum_{n=p}^{q-1} \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left| \sum_{m=p}^n A_m \right| + \left| \sum_{m=p}^q A_m \right| \sum_{n=p}^q \frac{1}{\gamma_n^2} \right]. \quad (3.19)$$

Для завершения доказательства теоремы оценим сверху также

$$\left| \sum_{m=p}^n A_m \right|.$$

Имеем
$$\sum_{m=p}^n A_m = \sum_{m=p}^n a_m \exp \left[-z \sum_{v=1}^m \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right];$$

обозначим
$$A_m = a_m \exp \left[-(z + \alpha) \sum_{v=1}^m \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right],$$

$$B'_m = \exp \left[\alpha \sum_{v=1}^m \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right].$$

Тогда, имея в виду, что у нас введено обозначение $\operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha}{v} \right) = \sigma(\alpha)$, для $|B'_m|$ и $|B'_m - B'_{m+1}|$, соответственно будем иметь оценки

$$|B'_m| < \exp \left(\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right),$$

$$|B'_m - B'_{m+1}| < \exp \left(\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right) \frac{\left| \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha}{v} \right|}{\gamma_{m+1}} \exp \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\gamma_{m+1}} \right),$$

так как

$$\left| 1 - e^{\frac{\alpha}{\gamma_{m+1}} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right)} \right| < \frac{\left| \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha}{v} \right|}{\gamma_{m+1}} \exp \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\gamma_{m+1}} \right).$$

или

$$|B'_m - B'_{m+1}| < c \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right]}{\gamma_{m+1}}.$$

Подставляя мажоранты $|B'_m|$ и $|B'_m - B'_{m+1}|$ в неравенство

$$\left| \sum_{m=p}^n A_m \right| \leq \max_{p < m < n} \left| \sum_{k=p}^m A'_k \right| \cdot \left| \sum_{m=p}^{n-1} |B'_m - B'_{m+1}| + |B'_n| \right|$$

получим

$$\left| \sum_{m=p}^n A_m \right| \leq \max_{p < m < n} \left| \sum_{k=p}^m A'_k \right| c_1 \left\{ \sum_{k=p}^{n-1} \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right]}{\gamma_{m+1}} + \exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right] \right\},$$

где $c_1 = c_1(\alpha, u, v)$.

Заметим теперь, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A'_k$ при $\operatorname{Re}(z) = \sigma_c - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha$,

сходится равномерно.

Зададимся теперь сколь угодно малым числом $\varepsilon_1 > 0$ и возьмем p настолько большим, чтобы

$$\max_{p < m < n} \left| \sum_{k=p}^m A'_k \right| < \varepsilon_1.$$

Тогда очевидно будем иметь

$$\left| \sum_{m=p}^n A_m \right| < c_3 \varepsilon_1 \exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right],$$

где $c_3 = c_3(\alpha, u, v)$.

Это значит, что

$$\left| \sum_{m=p}^n A_m \right| < \varepsilon_2 \exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right],$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — есть также число сколь угодно малое.

Подставляя мажоранту $\left| \sum_{m=p}^n A_m \right|$ в наше основное неравенство

(3.19), получим:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q A_n B_n \right| &\leq c_3 \varepsilon_2 \left\{ \sum_{n=p}^{q-1} \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \right]}{\gamma_{n+1}^2} + \right. \\ &\left. + \exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^q \frac{1}{\gamma_v} \right] \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \right\} < c_3 \varepsilon_2 \sum_{n=q}^{\infty} \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \right]}{\gamma_n^2}, \end{aligned}$$

так как

$$\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^q \frac{1}{\gamma_v} \right] \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \sum_{n=q}^{\infty} \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \right]}{\gamma_n^2}.$$

В силу условий совпадения получаем

$$\left| \sum_{n=p}^q A_n B_n \right| < \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = c_3 \varepsilon_2 \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\exp \left[\sigma(\alpha) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right]}{\gamma_n^2}.$$

Вспомним теперь, что]

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q A_n B_n &= \sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right] \left(1 - \right. \\ &\left. - \prod_{v=n+1}^{\infty} \frac{1 + \frac{z}{\beta_v}}{1 + \frac{z}{\alpha_v}} \exp \left[-z \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\beta_v} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Значит ряд (3.16') функции

$$g(z) = \frac{f(z)}{M(z)}$$

сходится равномерно также в любой конечной области плоскости z , если только $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c - \varepsilon_0$, где $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha$.

Этим доказано совпадение особенностей рядов (3.14) и (3.15) не только на их общей прямой сходимости, но и в полосе

$$\sigma_c - \varepsilon_0 < \operatorname{Re}(z) \leq \sigma_c, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha.$$

Так как от чисел u и v кроме требования, чтобы они не обращались в нуль (в теореме (3.9)) ничего больше не требовалось, значит мы можем по желанию устремить u или v к бесконечности, тогда соответственно получим теоремы:

Теорема (3.9'). На общей прямой сходимости, при выполнении условий совпадения, особенности факториального ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{z}{\beta_v}\right)}$$

и ассоциированного с ним ряда Дирихле

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=0}^n \frac{1}{\beta_v} \right]$$

совпадают.

Теорема (3.9''). На общей прямой сходимости, при выполнении условий совпадения, особенности ряда Ньютона

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right)$$

и ассоциированного с ним ряда Дирихле

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_v} \right]$$

совпадают.

Причем мы можем в последних теоремах соответственно полагать $u = 1$, $v = 1$.

Заметим теперь, что соединение теорем [(1.5) и (3.9')] позволяет сформулировать теорему аналитического продолжения для рядов Дирихле (при выполнении условий совпадения).

Теорема (3.10). Ряд Дирихле

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right]$$

в конечной абсциссой сходимости σ_c при выполнении условий сов-

падения аналитически продолжается в область $\operatorname{Re}(z) < \sigma_c$, если существует такая последовательность чисел $|\gamma'_v|$, $\gamma'_v > \gamma_v$,

$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_v} = \infty$, что абсцисса сходимости ряда

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma'_v} \right],$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k z_v^{(k)}, \quad z_v^{(k)} = \frac{\prod_{m=1}^k \gamma_m}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma'_m}\right)}{\prod_{m=1}^k (\zeta + \gamma_m)} d\zeta,$$

меньше σ_c .

Действительно, составим ассоциированный с

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right]$$

факториальный ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{z}{\gamma_v}\right)}.$$

Согласно теореме (3.9') особенности этих рядов на общей прямой сходимости совпадают.

С другой стороны, нетрудно заметить, что, преобразуя последний ряд, согласно теореме (1.5), получим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{z}{\gamma'_v}\right)},$$

причем абсцисса сходимости этого ряда совпадает с абсциссой сходимости ряда функции $g_1(z)$.

Когда абсцисса сходимости ряда

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma'_v} \right]$$

меньше σ_c , это значит, что $f(z)$ на прямой $\operatorname{Re}(z) = \sigma_c$ не имеет особых точек; следовательно, на $\operatorname{Re}(z) = \sigma_c$ особых точек не имеет также и $g(z)$.

Этим теорема доказана.

Заметим также, что теоремы (3.9'') и (3.10) позволяют доказать следующее предложение:

Теорема (3.10). Ряд Ньютона

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{z}{\gamma_v}\right)$$

с конечной абсциссой сходимости σ_c , при выполнении условий совпадения, аналитически продолжается в область $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, если существует такая последовательность чисел $\{\gamma'_v\}$, $\gamma'_v \geq \gamma_v$, $v = 1, 2, \dots$,

$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_v} = \infty$, что абсцисса сходимости ряда

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left[-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma'_v} \right],$$

где

$$A_v = \sum_{k=1}^v a_k \alpha_v^{(k)}, \quad \alpha_v^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\prod_{m=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma'_m}\right)}{\prod_{m=1}^k (\zeta + \gamma'_m)} d\zeta,$$

меньше σ_v .

Замечание 7. Используя свободу выбора последовательности $\{\gamma'_v\}$, можем получить сравнительно удобные признаки аналитического продолжения факториального ряда, а также рядов Дирихле и Ньютона.

В заключение параграфа отметим, что теоремы (3.9') и (1.5) позволяют судить о расположении особенностей суммы всякого факториального ряда на границе его сходимости.

Сектор математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 31 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

Бадалян Г. В. Сообщения Института математики и механики АН Армянской ССР, выпуск 5, 1950, Ереван.

Հ. Վ. Բադալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ ԵՎ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՈՒ ԿՎԱԶԻ-
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածը հանդիսանում է «Հայկական ՍՍՌ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագրի» (ՖՄԲՏ գիտությունների սերիա) VI հատորի № 5—6-ում գետեղված մեր հոդվածի շարունակությունը և նվիրված է այնպեղ ստացված արդյունքների կիրառությանը՝ ասիմպտոտիկ շարքերի դոմարմանը ֆակտորիալ շարքերի միջոցով, ինչպես նաև ֆունկցիաների անալիտիկ և կվադր-անալիտիկ շարունակման հարցերին: