ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VI, № 5—6, 1953 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

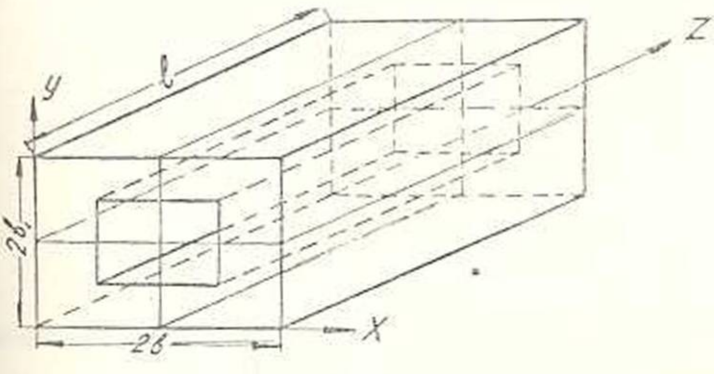
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. С. Минасян

Об установившемся распределении температуры в призматическом теле полого прямоугольного сечения конечной длины

1. *Постановка задачи и построение решения.* Рассмотрим пространственную задачу об установившемся распределении тепла в призматическом теле конечной длины l с полым прямоугольным сечением, когда задано распределение температуры на поверхности тела, при условии симметрии относительно плоскостей $x = b$ и $y = b_1$ (фиг. 1).

В этом случае функция $U(x, y, z)$ распределения температуры в теле будет удовлетворять уравнению:



Фиг. 1.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

и граничным условиям

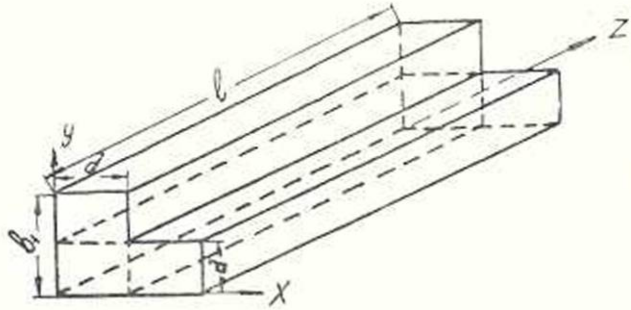
$$U(x, y, 0) = R_0(x, y), \; U(x, y, l) = R_1(x, y), \tag{1.2}$$

$$U(0, y, z) = U(2b, y, z) = S_0(y, z), \; U(d_1, y, z) = U(2b - d_1, y, z) = S_1(y, z),$$

$$U(x, 0, z) = U(x, 2b_1, z) = T_0(x, z), \; U(x, d, z) = U(x, 2b_1 - d, z) = T_1(x, z).$$

Здесь функции $R_i(x, y)$, $S_i(y, z)$ и $T_i(x, z)$—заданные температуры поверхности тела, относительно которых предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию, причем эти функции симметричны относительно плоскостей $x = b$ и $y = b_1$.

Вследствие симметрии достаточно ограничиться рассмотрением одной четвертой части тела, ограниченной плоскостями $x=0$, $x=b$, $y=0$ и $y=b_1$ (фиг. 2), причем в остальных частях функция $U(x,y,z)$ продолжается симметричным образом. При этом на плоскостях $x=b$ и $y=b_1$ должны удовлетворяться условия:



Фиг. 2.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=b}=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=b_1}=0. \tag{1.3}$$

Функцию $U(x, y, z)$ ищем в виде ряда Фурье, расположенного по $\sin\frac{\kappa\pi z}{l}$:

$$U(x, y, z)=\sum_{\kappa=1}^{\infty} U_\kappa(x, y)\sin\frac{\kappa\pi z}{l}, \tag{1.4}$$

где

$$U_\kappa(x, y)=\frac{2}{l}\int_0^l U(x, y, z)\sin\frac{\kappa\pi z}{l}\,dz.$$

Для определения $U_\kappa(x, y)$, умножив оператор Лапласа от функции $U(x, y, z)$ на $\frac{2}{l}\sin\frac{\kappa\pi z}{l}dz$ и проинтегрировав от 0 до l, придем, в силу (1.1) и (1.2), к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 U_\kappa(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_\kappa(x, y)}{\partial y^2}-\left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 U_\kappa(x, y)=$$

$$=\frac{2\kappa\pi}{l^2}\left[(-1)^\kappa R_1(x, y)-R_0(x, y)\right], \tag{1.5}$$

или, обозначив для краткости,

$$\rho_\kappa(x, y)=\frac{2\kappa\pi}{l^2}\left[(-1)^\kappa R_1(x, y)-R_0(x, y)\right], \tag{1.6}$$

к уравнению

$$L_\kappa\left[U_\kappa(x, y)\right]=\rho_\kappa(x, y), \tag{1.7}$$

где $L_к$ — к-ый дифференциальный оператор:

$$L_к = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - к^2 \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Граничные условия для функции $U_к(x, y)$ будут:

$$U_к(0, y) = S_{к,0}(y),\ U_к(d_1, y) = S_{к,1}(y),\ U_к(x, 0) = T_{к,0}(x),$$

$$U_к(x, d) = T_{к,1}(x),\ \left.\frac{\partial U_к}{\partial x}\right|_{x=b} = \left.\frac{\partial U_к}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{1.8}$$

Здесь

$$S_{к,i}(y) = \frac{2}{l}\int_0^l S_i(y, z) \sin \frac{к\pi z}{l} dz,\ T_{к,i}(x) =$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l T_i(x, z) \sin \frac{к\pi z}{l} dz. \tag{1.9}$$

Для построения функции $U_к(x, y)$ поступаем аналогично предыдущему [1]. Представим $U_к(x, y)$ в виде

$$U_к(x, y) = \begin{cases} f_к(x, y) & \text{при } x > d_1 \\ g_к(x, y) & \text{„ } x \leq d_1,\ y \leq d \\ \varphi_к(x, y) & \text{„ } y > d. \end{cases} \tag{1.10}$$

Функции $f_к(x, y)$, $g_к(x, y)$ и $\varphi_к(x, y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.5), соответствующим граничным условиям (1.8) и условиям сопряжения

$$f_к(d_1, y) = g_к(d_1, y),\ \left.\frac{\partial f_к}{\partial x}\right|_{x=d_1} = \left.\frac{\partial g_к}{\partial x}\right|_{x=d_1}$$

$$g_к(x, d_1) = \varphi_к(x, d_1),\ \left.\frac{\partial g_к}{\partial y}\right|_{y=d} = \left.\frac{\partial \varphi_к}{\partial y}\right|_{y=d}. \tag{1.11}$$

Представим $f_к(x, y)$ и $g_к(x, y)$ в виде рядов Фурье, расположенных по $\sin \frac{p\pi y}{d}$:

$$f_к(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{pк}(x) \sin \frac{p\pi y}{d},\ g_к(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} g_{pк}(x) \sin \frac{p\pi y}{d}, \tag{1.12}$$

где

$$f_{pк}(x) = \frac{2}{d}\int_0^d f_к(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy,\ g_{pк}(x) = \frac{2}{d}\int_0^d g_к(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy.$$

Умножив оператор $L_к$ от функции $f_к(x, y)$ на $\frac{2}{d} \sin \frac{p\pi y}{d} dy$ и проинтегрировав от 0 до d, получим, принимая во внимание (1.7) и (1.8), следующее дифференциальное уравнение для $f_{pк}(x)$:

$$f''_{p\kappa}(x)-\pi^2\left(\frac{p^2}{d^2}+\frac{\kappa^2}{l^2}\right)f_{p\kappa}(x)=\frac{2}{d}\left\{\frac{p\pi}{d}\left[(-1)^p T_{\kappa,1}(x)-T_{\kappa,0}(x)\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^d \rho_\kappa(x,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy\right\}, \tag{1.13}$$

общее решение которого будет

$$f_{p\kappa}(x)=A_{p\kappa}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{p\kappa}x+B_{p\kappa}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{p\kappa}x+\frac{2}{\alpha_{p\kappa}d}\int_{d_1}^{x}\left\{\frac{p\pi}{d}\left[(-1)^\kappa T_{\kappa,1}(t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-T_{\kappa,0}(t)\right]+\int_0^d \rho_\kappa(t,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy\right\}\mathrm{sh}\,\alpha_{p\kappa}(x-t)\,dt; \tag{1.14}$$

здесь

$$\alpha^2_{p\kappa}=\pi^2\left(\frac{\kappa^2}{l^2}+\frac{p^2}{d^2}\right). \tag{1.15}$$

Аналогичным образом для $g_{p\kappa}(x)$, согласно (1.7), (1.8) и (1.11), получим:

$$g''_{p\kappa}(x)-\alpha^2_{p\kappa}g_{p\kappa}(x)=\frac{2p\pi}{d^2}\left[(-1)^p\varphi_\kappa(x,d)-T_{\kappa,0}(x)\right]+$$

$$+\frac{2}{d}\int_0^d \rho_\kappa(x,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy. \tag{1.16}$$

В правую часть уравнения (1.16) входит неизвестное значение $\varphi_\kappa(x,d)$. Ищем функцию $\varphi_\kappa(x,y)$ в виде

$$\varphi_\kappa(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_{p\kappa}(y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}, \tag{1.17}$$

где

$$\varphi_{p\kappa}(y)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\varphi_\kappa(x,y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\,dx.$$

Подставив значение $\varphi_\kappa(x,y)$ из (1.17) в уравнение (1.16) и решая последнее, находим:

$$g_{p\kappa}(x)=C_{p\kappa}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{p\kappa}x+D_{p\kappa}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{p\kappa}x+(-1)^{p+1}\frac{2pd}{\pi d^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\varphi_{q\kappa}(d)}{q^2+\gamma^2\alpha^2_{p\kappa}}\sin\frac{q\pi x}{d_1}-$$

$$-\int_x^{d_1}\left[\frac{p\pi}{d}T_{\kappa,0}(t)-\int_0^d\rho_\kappa(t,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy\right]\mathrm{sh}\,\alpha_{p\kappa}(t-x)\,dt. \tag{1.18}$$

$$\left(\gamma=\frac{d_1}{\pi}\right).$$

Граничные условия для функций $f_{p\kappa}(x)$ и $g_{p\kappa}(x)$, согласно (1.8) и (1.11), будут:

$$f'_{pк}(b)=0,\ f_{pк}(d_1)=g_{pк}(d_1),\ f'_{pк}(d_1)=g'_{pк}(d_1),\ g_{pк}(0)=\xi_{pк}; \tag{1.19}$$

здесь

$$\xi_{pк}=\frac{2}{d}\int_0^d S_{к,0}(y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy=\frac{4}{dl}\int_0^d\int_0^l S_0(y,z)\sin\frac{p\pi y}{d}\sin\frac{к\pi z}{l}\,dzdy.$$

С другой стороны, умножив оператор $L_к$ от функции $\varphi_к(x,y)$ на $\frac{2}{d_1}\sin\frac{p\pi x}{d_1}$ и проинтегрировав от 0 до d_1, в силу (1.7) и (1.8) получим дифференциальное уравнение

$$\varphi''_{pк}(y)-\beta^2_{pк}\varphi_{pк}(y)=\frac{2p\pi}{d_1^2}\left[(-1)^p S_{к,1}(y)-S_{к,0}(y)\right]+$$

$$+\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\rho_к(x,y)\sin\frac{p\pi y}{d_1}\,dy,$$

общее решение которого будет:

$$\varphi_{pк}(y)=E_{pк}\,\mathrm{sh}\beta_{pк}y+F_{pк}\mathrm{ch}\beta_{pк}y+\frac{2}{\beta_{pк}d_1}\int_{d_1}^{y}\left\{\frac{p\pi}{d_1}\left[(-1)^p S_{к,1}(t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-S_{к,0}(t)\right]+\int_0^{d_1}\rho_к(x,y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\,dx\right\}\mathrm{sh}\beta_{pк}(y-t)\,dt. \tag{1.20}$$

Здесь
$$\beta^2_{pк}=\pi^2\left(\frac{к^2}{l^2}+\frac{p^2}{d_1^2}\right).$$

Прежде чем найти граничные условия для $\varphi_{pк}(y)$, представим функцию $g_к(x,y)$ в виде ряда

$$g_к(x,y)=\sum_{p=1}^{\infty}\psi_{pк}(y)\sin\frac{p\pi x}{d_1},\quad \psi_{pк}(y)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}g_к(x,y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\,dx. \tag{1.21}$$

Поступая аналогично предыдущему, для $\psi_{pк}(y)$ получим следующее выражение

$$\psi_{pк}(y)=G_{pк}\,\mathrm{sh}\beta_{pк}y+H_{pк}\mathrm{ch}\beta_{pк}y-\frac{2}{\beta_{pк}d_1}\int_y^d\left[\frac{p\pi}{d_1}S_{к,0}(t)-\right. \tag{1.22}$$

$$\left.-\int_0^{d_1}\rho_к(x,t)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\,dx\right]\mathrm{sh}\beta_{pк}(t-y)\,dt+(-1)^{p+1}\frac{2pd^2}{\pi d_1^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{f_{qк}(d_1)}{q^2+\delta^2\beta^2_{pк}}\sin\frac{q\pi y}{d}.$$

Граничные условия для $\varphi_{pк}(y)$ и $\psi_{pк}(y)$ будут:

$$\varphi'_{pк}(b_1)=0,\ \varphi_{pк}(d)=\psi_{pк}(d),\ \varphi'_{pк}(d)=\psi'_{pк}(d),\ \psi_{pк}(0)=\zeta_{pк} \tag{1.23}$$

где
$$\zeta_{pk} = \frac{2}{d_1}\int_0^{d_1} T_{k,0}(x)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx =$$

$$= \frac{4}{d_1 l}\int_0^{d_1}\int_0^{l} T_0(x, z)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\sin\frac{k\pi z}{l}dzdx, \quad \delta = \frac{d}{\pi}.$$

2. *Выполнение граничных условий (1.19) и (1.23). Исследование полученных систем.* Удовлетворяя граничным условиям (1.19), после некоторых преобразований получим следующие выражения для $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$:

$$f_{pk}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk} b}\left[B_{pk}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-x) - \nu_{pk}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} x\right] +$$
$$+\frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_{d_1}^{x}\left\{\frac{p\pi}{d}\left[(-1)^p T_{k,1}(t) - T_{k,0}(t)\right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^d \rho_k(t, y)\sin\frac{p\pi y}{d}dy\right\}\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(x-t)dt,$$

$$g_{pk}(x) = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} x}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk} b}\left[B_{pk}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-d_1)}{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d_1} - \nu_{pk}\right] + \mu_{pk}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(d_1 - x)}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk} b} -$$
$$-\frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_x^{d}\left[\frac{p\pi}{d}T_{k,0}(t) - \int_0^d \rho_k(t, y)\sin\frac{p\pi y}{d}dy\right]\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(t-x)dt +$$
$$+(-1)^{p+1}\frac{2pd_1^2}{\pi d^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\varphi_{qk}(d)}{q^2+\gamma^2\beta_{pk}^2}\sin\frac{q\pi x}{d_1}. \tag{2.1}$$

При этом неизвестные B_{pk}, посредством которых выражаются функции $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$, определяются из уравнений

$$B_{pk} = \frac{2(-1)^p p d_1\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d_1}{\alpha_{pk} d^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q q\varphi_{qk}(d)}{q^2+\gamma^2\beta_{pk}^2} + \mu_{pk}. \tag{2.2}$$

В соотношениях (2.1) и (2.2) введены следующие обозначения:

$$\mu_{pk} = \xi_{pk} + \frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_0^{d_1}\left[\frac{p\pi}{d}T_{k,0}(t) - \int_0^d \rho_k(t, y)\sin\frac{p\pi y}{d}dy\right]\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} t\,dt,$$

$$\nu_{pk} = \frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_{d_1}^{b}\left\{\frac{p\pi}{d}\left[(-1)^p T_{k,1}(t) - T_{k,0}(t)\right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^d \rho_k(t, y)\sin\frac{p\pi y}{d}dy\right\}\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-t)dt. \tag{2.3}$$

Аналогично, для $\varphi_{p\kappa}(y)$ и $\psi_{p\kappa}(y)$ будем иметь следующие выражения

$$\varphi_{p\kappa}(y)=\frac{1}{\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}b_1}\left[F_{p\kappa}\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}(b_1-y)-q_{p\kappa}\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}y\right]+$$

$$+\frac{2}{\beta_{p\kappa}d}\int_d^y\left\{\frac{p\pi}{d_1}\left[(-1)^pS_{\kappa,1}(t)-S_{\kappa,0}(t)\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^{d_1}\rho_\kappa(x,t)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx\right\}\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}(y-t)\,dt,$$

$$\psi_{p\kappa}(y)=\frac{\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}y}{\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}b_1}\left[F_{p\kappa}\frac{\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}(b_1-d)}{\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}d}-q_{p\kappa}\right]+r_{p\kappa}\frac{\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}(d-y)}{\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}d}-$$

$$-\frac{2}{\beta_{p\kappa}d_1}\int_y^d\left[\frac{p\pi}{d_1}S_{\kappa,0}(t)-\int_0^{d_1}\rho_\kappa(x,t)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx\right]\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}(t-y)dt+$$

$$+(-1)^{p+1}\frac{2pd^2}{\pi d_1^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{f_{q\kappa}(d_1)}{q^2+\delta^2\beta_{p\kappa}^2}\sin\frac{q\pi y}{d}, \tag{2.4}$$

где обозначено

$$q_{p\kappa}=\frac{2}{\beta_{p\kappa}d_1}\int_d^{b_1}\left\{\frac{p\pi}{d_1}\left[(-1)^pS_{\kappa,1}(t)-S_{\kappa,0}(t)\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^{d_1}\rho_\kappa(x,t)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx\right\}\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}(b_1-t)\,dt,$$

$$r_{p\kappa}=\zeta_{p\kappa}+\frac{2}{\beta_{p\kappa}d}\int_0^d\left[\frac{p\pi}{d_1}S_{\kappa,0}(t)-\int_0^{d_1}\rho_\kappa(x,t)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx\right]\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}t\,dt. \tag{2.5}$$

При этом неизвестные $F_{p\kappa}$, входящие в (2.4), определяются из уравнений

$$F_{p\kappa}=\frac{2(-1)^p pd}{\beta_{p\kappa}d_1^2}\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}d\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q q f_{q\kappa}(d_1)}{q^2+\delta^2\beta_{p\kappa}^2}+r_{p\kappa}. \tag{2.6}$$

Для нахождения $B_{p\kappa}$ и $F_{p\kappa}$ из (2.2) и (2.6) вводим новые неизвестные $m_{p\kappa}$ и $n_{p\kappa}$, связанные с прежними следующими зависимостями:

$$m_{p\kappa}=\frac{(-1)^p p}{\operatorname{ch}\alpha_{p\kappa}b}\left[B_{p\kappa}\operatorname{ch}\alpha_{p\kappa}(b_1-d_1)-\nu_{p\kappa}\operatorname{sh}\alpha_{p\kappa}d_1\right],$$

$$n_{p\kappa}=\frac{(-1)^p p}{\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}b_1}\left[F_{p\kappa}\operatorname{ch}\beta_{p\kappa}(b_1-d)-q_{p\kappa}\operatorname{sh}\beta_{p\kappa}d\right]. \tag{2.7}$$

Подставляя значения B_{pk} и F_{pk} из (2.7) в (2.2) и (2.6), для определения m_{pk} и n_{pk} приходим к следующей совокупности двух систем линейных уравнений

$$m_{pk} = \frac{p\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-d_1)}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk} b}\left\{\frac{2pd_1}{\alpha_{pk} d^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{n_{qk}}{q^2+\gamma^2\alpha_{pk}^2}+\right.$$

$$\left.+(-1)^p\left[\frac{\mu_{pk}}{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d_1}-\frac{\nu_{pk}}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-d_1)}\right]\right\}, \tag{2.8}$$

$$n_{pk} = \frac{p\,\mathrm{sh}\,\beta_{pk} d\,\mathrm{ch}\,\beta_{pk}(b_1-d)}{\mathrm{ch}\,\beta_{pk} b_1}\left\{\frac{2pd}{\beta_{pk} d_1^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{m_{qk}}{q^2+\delta^2\beta_{pk}^2}+\right.$$

$$\left.+(-1)^p\left[\frac{r_{pk}}{\mathrm{sh}\,\beta_{pk} d}-\frac{q_{pk}}{\mathrm{ch}\,\beta_{pk}(b_1-d)}\right]\right\}.$$

При этом формулы для коэффициентов $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$, выраженные через m_{pk} и n_{pk}, окончательно примут вид:

$$f_{pk}(x) = \frac{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-x)}{\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-d_1)}\left[(-1)^p\frac{m_{pk}}{p}-\frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_{d_1}^{x} P_{pk}(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(t-d_1)\,dt\right]-$$

$$-\frac{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(x-d_1)}{\alpha_{pk} d\,\mathrm{ch}\,\alpha_{pk}(b-d_1)}\int_{x}^{b} P_{pk}(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(b-t)\,dt,$$

$$g_{pk}(x) = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} x}{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d}\left[(-1)^p\frac{m_{pk}}{p}+\frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_{x}^{d_1} Q_{pk}(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(d_1-t)\,dt\right]+$$

$$+\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk}(d_1-x)}{\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} d_1}\left[\xi_{pk}+\frac{2}{\alpha_{pk} d}\int_{0}^{x} Q_{pk}(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{pk} t\,dt\right]+$$

$$+(-1)^{p+1}\frac{2pd_1^2}{\pi d^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q n_{qk}}{q(q^2+\gamma^2\alpha_{pk}^2)}\sin\frac{q\pi x}{d_1}. \tag{2.9}$$

Здесь обозначено

$$P_{pk}(x) = \frac{p\pi}{d}\left[(-1)^p T_{k,1}(x) - T_{k,0}(x)\right] + \int_0^d \rho_k(x,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy,$$

$$Q_{pk}(x) = \frac{p\pi}{d} T_{k,0}(x) - \int_0^d \rho_k(x,y)\sin\frac{p\pi y}{d}\,dy.$$

Для $\varphi_{p\kappa}(y)$ и $\psi_{p\kappa}(y)$ получим аналогичные выражения:

$$\varphi_{p\kappa}(y)=\frac{ch\beta_{p\kappa}(b_1-y)}{ch\beta_{p\kappa}(b_1-d)}\left[(-1)^p\frac{n_{p\kappa}}{p}-\frac{2}{\beta_{p\kappa}d_1}\int\limits_d^y N_{p\kappa}(t)\,sh\beta_{p\kappa}(t-d)\,dt\right]-$$

$$-\frac{2sh\beta_{p\kappa}(y-d)}{\beta_{p\kappa}d_1ch\beta_{p\kappa}(b_1-d)}\int\limits_y^{b_1}N_{p\kappa}(t)\,sh\beta_{p\kappa}(b_1-t)dt,$$

$$\psi_{p\kappa}(y)=\frac{sh\beta_{p\kappa}y}{sh\beta_{p\kappa}d}\left[(-1)^p\frac{n_{p\kappa}}{p}+\frac{2}{\beta_{p\kappa}d_1}\int\limits_y^d M_{p\kappa}(t)\,sh\beta_{p\kappa}(d-t)\,dt\right]+$$

$$+\frac{sh\beta_{p\kappa}(d-y)}{sh\beta_{p\kappa}d}\left[\zeta_{p\kappa}+\frac{2}{\beta_{p\kappa}d_1}\int\limits_0^y M_{p\kappa}(t)sh\beta_{p\kappa}t\,dt\right]+$$

$$+(-1)^{p+1}\frac{2pd^2}{\pi d_1^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q m_{q\kappa}}{q(q^2+\delta^2\beta_{p\kappa}^2)}\sin\frac{q\pi y}{d}, \tag{2.10}$$

где

$$N_{p\kappa}(y)=\frac{p\pi}{d_1}\left[(-1)^p S_{\kappa,1}(y)-S_{\kappa,0}(y)\right]+\int\limits_0^{d_1}\rho_\kappa(x,y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx,$$

$$M_{p\kappa}(y)=\frac{p\pi}{d_1}S_{\kappa,0}(y)-\int\limits_0^{d_1}\rho_\kappa(x,y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}dx.$$

Исследуем совокупность двух систем линейных уравнений (2.8). Оценим прежде всего суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений этих систем. Легко видеть, что суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений первой и второй систем соответственно равны:

$$\sigma_{p\kappa}^{(1)}=\frac{sh\alpha_{p\kappa}d_1\,ch\alpha_{p\kappa}(b-d_1)}{\left(1+\frac{\kappa^2d^2}{p^2l^2}\right)ch\alpha_{p\kappa}b}\left(cth\alpha_{p\kappa}d_1-\frac{1}{\alpha_{p\kappa}d_1}\right),$$

$$\sigma_{p\kappa}^{(2)}=\frac{sh\beta_{p\kappa}d\,ch\beta_{p\kappa}(b_1-d)}{\left(1+\frac{\kappa^2d_1^2}{p^2l^2}\right)ch\beta_{p\kappa}b_1}\left(cth\beta_{p\kappa}d-\frac{1}{\beta_{p\kappa}d}\right), \tag{2.11}$$

откуда следует, что система (2.8) вполне регулярна всегда, кроме случая, когда одновременно $b=d_1$ и $b_1=d$. В последнем случае система становится регулярной.

С другой стороны, нетрудно видеть, что свободные члены уравнений систем при сделанных ранее предположениях относительно распределения температуры на поверхности ограничены в своей совокупности и, следовательно, согласно теоремам о регулярных системах [2], системы (2.8) имеют единственное ограниченное решение.

Задаваясь значениями длин сторон b, b_1, d, d_1 и l, а также распределением температуры на поверхности, на основании теории регулярных систем, легко оценим сверху и снизу значения неизвестных m_{pk} и n_{pk}, посредством которых определятся значения коэффициентов $f_{pk}(x)$, $g_{pk}(x)$, $\varphi_{pk}(y)$ и $\psi_{pk}(y)$.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17 VI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минасян Р. С.* Об одной задаче теплопроводности. ДАН Армянской ССР, т. XII, № 3, 1950.
2. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.*, Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.

Ռ. Ս. Մինասյան

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՄԱՐՄՆՈՒՄ ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է վերջավոր երկարության ունեցող ուղղանկյունաձև հատվածքով սնամեջ մարմնի մեջ ջերմության կայունացած բաշխման տարածական խնդիրը, երբ տրված է ջերմության բաշխումը մարմնի մակերևույթի վրա։

Ցույց է տրված ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լիովին ռեգուլյարությունը։