

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призм треугольного поперечного сечения

Приближенное решение задачи о кручении призм с поперечным сечением в виде произвольного треугольника, дающее нижнюю оценку для величины жесткости, дано в работах Л. С. Лейбензона [1], А. И. Лурье [2], Л. В. Канторовича [3]. В работе Б. Г. Галеркина [4] приведено точное решение задачи о кручении призм с поперечным сечением в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Следует отметить, что в работе П. И. Куфарева [5] дано точное решение задачи о кручении и изгибе стержня полигонального сечения, но, как указывает сам автор, практическое применение этого метода чрезвычайно затруднительно.

В настоящей работе дается приближенное решение задачи о кручении призм с треугольным поперечным сечением, когда:

- 1) поперечное сечение стержня—равнобедренный треугольник;
- 2) поперечное сечение—прямоугольный треугольник.

Приведенное решение дает верхнюю оценку для величины жесткости при кручении.

В конце работы приведены формулы и таблицы для вычисления жесткости призм треугольного поперечного сечения при различных углах α , и показано при этом, что максимальная погрешность значения жесткости не превышает 1% для $\alpha \leq 120^\circ$ (сечение—равнобедренный треугольник) и 1,6% для $\alpha \leq 30^\circ$ (сечение—прямоугольный треугольник).

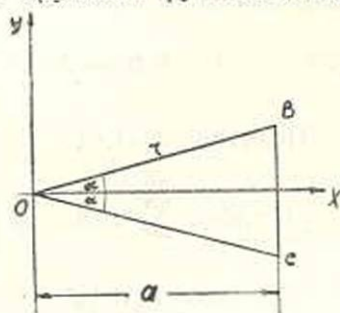
§. 1. *Кручение призм с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника.* Как известно, при кручении функция напряжений $U(x, y)$ внутри области сечения ОВС (фиг. 1) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta^2 U(x, y) = -2 \quad (1.1)$$

и на границе области принимает значения, равные нулю.

Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2. \quad (1.2)$$



Фиг. 1

На границе области должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} U(r, \varphi)|_{r=a} &= 0, & U(r, \varphi)|_{r=0} &= 0, \\ U(r, \varphi)|_{r=0} &= 0, & U(r, \varphi)|_{r=\frac{a}{\cos \varphi}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение ищем в виде:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.2) и разлагая $r^{-2\alpha}$ в ряд по

$\cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k''(r) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(r) \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} - \\ - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4\alpha^2} f_k(r) \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$f_k''(r) + \frac{1}{r} f_k'(r) - \frac{1}{r^2} \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4\alpha^2} f_k(r) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1}. \quad (1.5)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} f_k(r) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\mu_k(2-\mu_k)} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 + A_k r^{\mu_k} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_k(\mu_k+2)} \times \\ \times \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 + B_k \cdot r^{-\mu_k}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha}.$$

Для выполнения условия $U(r, \varphi)|_{r=0} = 0$ из (1.3) достаточно, чтобы $f_k(r)|_{r=0} = 0$. Чтобы $f_k(r)$ при $r=0$ было конечным и равнялось нулю, необходимо, чтобы $B_k = 0$, т. е.

$$f_k(r) = A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.4), получим:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 \right]. \quad (1.7)$$

Для определения коэффициентов A_k применим метод Трефца [1] смягчения граничных условий, заключающийся в том, что гранич-

ные условия удовлетворяются приближенно, причем так, чтобы средняя квадратичная ошибка ε_0 при этом была минимальная. Крутящий момент, вычисленный по этому методу, больше истинного, т. е. мы получаем верхнюю оценку для жесткости.

Из условия (1.3) имеем $U(x, y)|_{x=a} = 0$.

Средняя квадратичная ошибка

$$\varepsilon_0 = \int_{-a \operatorname{tg} \alpha}^{+a \operatorname{tg} \alpha} [(0 - U(a, y))^2 dy.$$

Условие минимума ε_0 дает

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial A_i} = 2 \int_{-a \operatorname{tg} \alpha}^{+a \operatorname{tg} \alpha} U(a, y) \frac{\partial}{\partial A_i} U(a, y) dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.8) значение $U(x, y)$, согласно (1.7) получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^{+a} \cos(\mu_i \varphi) \frac{a^{2i}}{\cos^{2i} \varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k \left(\frac{a}{\cos \varphi} \right)^{2k} + \right. \\ & \left. + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} \right] \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 0 \quad (1.9) \\ & (i=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Жесткость при кручении определяется по формуле:

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.10)$$

Подставим значение функции напряжений из (1.7) в (1.10)

$$\begin{aligned} C = 4G \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} r \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{2k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \right] \right) dr \cdot d\varphi, \quad (1.11) \end{aligned}$$

где A_k — решения системы (1.9).

Полагая все A_k при $k > 2$ равными нулю, для жесткости получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} C = 4G \frac{a^{2+\mu_1}}{2 + \mu_1} A_1 \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} \cos(\mu_1 \varphi) \frac{1}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi + \\ + \frac{8a^4}{\pi} G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 - \mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} \frac{\cos(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi, \quad (1.12) \end{aligned}$$

где A_1 вследствие (1.9) имеет вид:

$$A_1 = \frac{8}{\pi} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{4+\mu_1} \varphi} d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2(1+\mu_1)} \varphi} d\varphi} \cdot a^{2-\mu_1}.$$

Формула (1.11) перестает быть годной при $\mu_k = 2$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Для случая $\alpha = \frac{\pi}{4}$ решение уравнения (1.5) имеет вид:

$$i_1(r) = -\frac{2}{\pi} r^2 \ln r + A_1 r^2 + \frac{1}{2\pi} r^2, \quad (1.13)$$

$$i_k(r) = A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \text{ для } k \geq 2.$$

Подставляя (1.13) в (1.4), получим:

$$U(r, \varphi) = \cos 2\varphi \left[-\frac{2}{\pi} r^2 \ln r + A_1 r^2 + \frac{1}{2\pi} r^2 \right] + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \right].$$

Коэффициенты A_k определяются по методу Тревца. Принимая для всех $k \geq 2$ $A_k = 0$, для определения A_1 получим следующее равенство:

$$A_1 = \frac{1}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} dx} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} \ln \frac{a}{\cos x} dx - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} dx - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\cos^6 x} \cos 2x \cos(\mu_k x) dx \right\}.$$

Подставляя значение $U(r, \varphi)$ из (1.14) в (1.10) и учитывая только A_1 , для вычисления жесткости окончательно получим следующую формулу:

$$C = \frac{8}{\pi} G a^4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi -$$

$$-\frac{2}{\pi} Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} \ln \frac{a}{\cos \varphi} d\varphi + A_1 Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Для иллюстрации вычислены жесткости $\bar{C}$ (верхние оценки) призм с сечениями в виде равнобедренных треугольников для некоторых значений α . Для сравнения вычислены жесткости $\tilde{C}$ (нижние оценки) по формуле Л. С. Лейбензона [1] для тех же углов.

Принимаем за расчетную формулу C среднее арифметическое жесткостей $\bar{C}$ и $\tilde{C}$. Тогда ошибка $\delta = \frac{\bar{C} - C}{2}$.

С увеличением угла ошибка возрастает и достигает 1% для $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Таблица 1

2α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
$\bar{C}/Ga^4$	0,00693	0,0191	0,0385	0,1045	0,2365
$\tilde{C}/Ga^4$	0,00693	0,0191	0,0385	0,1042	0,2320
C/Ga^4	0,00693	0,0191	0,385	0,10435	0,23425

* Для случая $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ точное значение жесткости по Галеркину $C = 0,1044 Ga^4$.

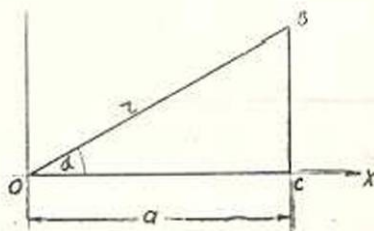
§ 2. Кручение призм с поперечным сечением в виде прямоугольного треугольника. Определение функции напряжений $U(r, \varphi)$ при кручении призматических стержней сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (2.1)$$

внутри области ОВС (фиг. 2). При этом на границе области должны выполняться следующие условия:

$$U(r, \varphi)|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad U(r, \varphi)|_{\varphi=0} = 0, \quad (2.2)$$

$$U(r, \varphi)|_{r=0} = 0, \quad U(r, \varphi)|_{r=\frac{a}{\cos \varphi}} = 0.$$



Фиг. 2

Решение ищем в виде:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и разлагая r^{-2} в ряд Фурье по $\sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}$, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} - \\ & - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{\alpha} \right)^2 f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда:

$$f_k(r) + \frac{1}{r} f_k(r) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{k\pi}{\alpha} \right)^2 f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \quad (2.4)$$

Это есть уравнение Эйлера. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 + A_k r^{\mu_k} + B_k r^{-\mu_k},$$

где $\mu_k = \frac{k\pi}{\alpha}$.

Чтобы $U(r, \varphi)|_{r=0} = 0$ достаточно, чтобы $f_k(r)|_{r=0} = 0$, т. е.

$$f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 + A_k r^{\mu_k}. \quad (2.5)$$

Подставляя $f_k(r)$ из (2.5) в (2.3), получим:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 \right]. \quad (2.6)$$

Для определения коэффициентов A_k применим, как и в §1, метод смягчения граничных условий.

$$\text{Имеем: } \frac{\partial}{\partial A_l} \int_0^{\alpha} [0 - U(a, y)]^2 dy = 0.$$

Для определения коэффициентов A_k получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y}{a}} (a^2 + y^2)^{\frac{\mu_1}{2}} \sin \left(\mu_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(\mu_k \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right) \times \\ \times \left[A_k (a^2 + y^2)^{\frac{\mu_k}{2}} + \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} (a^2 + y^2) \right] = 0$$

(i = 1, 2, ...)

Принимая все A_k при $k \geq 2$ равными нулю, для определения коэффициента A_1 получим следующее выражение:

$$A_1 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_1 \varphi) \cdot \sin(\mu_k \varphi)}{\cos^{4+\mu_k} \varphi} d\varphi}{\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi} a^{2-\mu_1}. \quad (2.7)$$

Подставляя значение функции напряжений из (2.6) в (1.10) для определения жесткости получим следующую формулу:

$$C = 2G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2+\mu_k}}{\mu_k + 2} A_k \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^{2+\mu_k} \varphi} d\varphi - \\ - \frac{4}{\pi} G a^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Принимая A_k для всех $k \geq 2$ равными нулю, получим:

$$C = 2G \frac{a^{2+\mu_1}}{2 + \mu_1} A_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi - \\ - \frac{4}{\pi} G a^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Здесь A_1 имеет значение (2.7).

В таблице 2 приведены верхние оценки $\bar{C}$ для жесткости призмы с сечениями в виде прямоугольных треугольников для некоторых значений угла α , вычисленные по формуле (2.8) и нижние оценки $\hat{C}$ для жесткости, вычисленные по формуле Лейбензона [1]. За расчетную формулу C принимаем среднее арифметическое жесткостей $\hat{C}$ и $\bar{C}$. Как видно из таблицы, с увеличением угла ошибка возрастает, достигая 1,6% для $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таблица 2

α	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$
$\bar{C}/Ga^4$	0,00115	0,00358	0,00811
$\bar{C}/Ga^4$	0,00114	0,00353	0,00785
C/Ga^4	0,001145	0,003555	0,00798

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30 VI 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. I, Изд. АН СССР, М., 1951.
2. Лурье А. И. Труды Лен. инд. ин-та, 1939, № 3, физ.-мат. науки, вып. I, стр. 121—126.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, Гос. изд. тех.-теор. лит., М.—Л., 1950.
4. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, т. I, изд. АН СССР, М., 1952.
5. Куфарев П. И. К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения. ПММ, т. I, вып. I, 1937.

Ն. Օ. Գուլկանյան

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՆԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված է եռանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող պրիզմաների ոլորման խնդրի մոտավոր մի լուծում:

Ուսումնասիրված են հետևյալ դեպքերը՝

ա) ձողի լայնական կտրվածքը հավասարադրուն եռանկյուն է.

բ) լայնական կտրվածքը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Բերված մոտավոր լուծումը տալիս է ոլորման կոշտության համար նրա վերին գնահատականը.

Տրված են կամավոր անկյունով եռանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող ձողերի ոլորման կոշտությունները հաշվելու համար բանաձևեր: Բերված թվային օրինակների համար կազմված են աղյուսակներ: