ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VI, № 5—6, 1953 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

К расчету длинных оболочек двоякой кривизны

1. Задача расчета прочности весьма пологой слоистой оболочки, составленной из ортотропных слоев, как известно [1, 2, 3], сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\beta^4}-\nabla_r^2 w=0,$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\nabla_r^2\varphi=Z, \tag{1.1}$$

где, как и в [3,4], a_{ik} — коэффициенты, характеризующие жесткости растяжения, D_{ik} — жесткости изгиба, Z — внешняя, нормально приложенная нагрузка, α и β — криволинейные, ортогональные координаты, совпадающие с линиями главной кривизны срединной поверхности, относительно которой все слои расположены симметрично,

$$\nabla_r^2=k_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \tag{1.2}$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны координатной поверхности соответственно по линиям $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$.

Искомыми в (1.1) являются $w=w(\alpha,\beta)$ — функция перемещений и $\varphi=\varphi(\alpha,\beta)$ — функция напряжений, через которые представляются все внутренние усилия и напряжения в слоях оболочки [3,4].

2. В случае длинной оболочки в (1.1) полагаем:

$$a_{11}=0,\quad D_{11}=0,\quad a_{66}=0,\quad D_{66}=0, \tag{2.1}$$

что равносильно принятию известных статических и геометрических гипотез В. З. Власова [5] о малом влиянии продольных изгибающих и крутящих моментов на общее напряженное состояние оболочки и об отсутствии деформаций поперечного удлинения и сдвига.

Далее, для большей простоты здесь и в дальнейшем принимаем коэффициенты Пуассона равными нулю, т. е. в (1.1) считаем, что

$$a_{12}=0,\quad D_{12}=0. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1) и (2.2), из (1.1) получим:

$$a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\beta^4}-\nabla_r^2 w=0,$$

$$D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\nabla_r^2\varphi=Z. \tag{2.3}$$

Полагая [3,4,5]:

$$w=a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}, \qquad \varphi=\nabla_r^2\Phi, \tag{2.4}$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (2.3), а из второго уравнения окончательно получим:

$$D_{22}\frac{1}{C_{11}}\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}+\nabla_r^2\nabla_r^2\Phi=Z. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является разрешающим для расчета прочности пологой достаточно длинной цилиндрической оболочки, искривленной и в продольном направлении.

В (2.5) искомой является функция $\Phi(\alpha,\beta)$, через которую расчетные величины задачи представляются следующим образом [3,4,6]:

изгибающие и крутящий моменты

$$G_1=\frac{D_{11}}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}, \qquad G_2=\frac{D_{22}}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6},$$

$$H=-2\frac{D_{66}}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^5}; \tag{2.6}$$

тангенциальные силы

$$T_1=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\nabla_r^2\Phi, \qquad T_2=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla_r^2\Phi,$$

$$S=-\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\nabla_r^2\Phi; \tag{2.7}$$

напряжения в слоях оболочки

$$\sigma_\alpha^m=\frac{E_\alpha^m}{C_{11}}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\nabla_r^2\Phi-\gamma\frac{E_\alpha^m}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^4},$$

$$\sigma_\beta^m=\frac{E_\beta^m}{C_{22}}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla_r^2\Phi-\gamma\frac{E_\beta^m}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6},$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m=-\frac{G_{\alpha\beta}^m}{C_{66}}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\nabla_r^2\Phi-2\gamma\frac{G_{\alpha\beta}^m}{C_{11}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^5}. \tag{2.8}$$

Остальные напряжения интереса не представляют.

В этих формулах приняты следующие обозначения [3,4]:

E^m_α, E^m_β и $G^m_{\alpha\beta}$ — модули упругости и сдвига материала каждого слоя оболочки, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки,

$$C_{ik} = 2\left[B^{n+1}_{ik}\delta_{n+1} + \sum_{m=1}^{n} B^m_{ik}(\delta_m - \delta_{m+1})\right],$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3}\left[B^{n+1}_{ik}\delta_{n+1} + \sum_{m=1}^{n} B^m_{ik}(\delta^3_m - \delta^3_{m+1})\right], \tag{2.9}$$

где
$$B^m_{11} = E^m_\alpha, \quad B^m_{22} = E^m_\beta, \quad B^m_{66} = G^m_{\alpha\beta}. \tag{2.10}$$

Кроме этих приняты следующие известные обозначения [3,4,7]: число слоев — $(2n+1)$ (крайние слои имеют номера 1 и $(2n+1)$, средний слой имеет номер $(n+1)$ и является m по счету), δ_1, δ_2,..., δ_{n+1} — расстояния от срединной поверхности до границ слоев.

3. В частном случае изотропной однородной цилиндрической оболочки, учитывая, что $D_{22} = \frac{Eh^3}{12}$, $C_{11} = Eh$, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{R}$, а также взамен функции $\Phi(\alpha,\beta)$ вводя некоторую комплексную функцию [8,9,10]

$$V = w - i\frac{\sqrt{12}}{Eh^2}\varphi \tag{3.1}$$

и безразмерную систему координат

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \qquad \theta = \frac{\beta}{R}, \tag{3.2}$$

из (2.3), для однородной задачи получим безусловно интересное разрешающее уравнение упрощенной теории длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова [10]:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4} + i2b^2\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0, \tag{3.3}$$

где $2b^2 = \frac{R}{h}\sqrt{12}$, h — толщина оболочки.

Таким образом, на основании вышеприведенного, мы можем констатировать, что упрощенная теория длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова, построенная на основании существенно геометрической гипотезы [10], содержит в себе как статические, так и геометрические гипотезы известной теории ортотропных цилиндрических оболочек средней длины В. З. Власова [5].

4. В заключение отметим, что на основании сравнительного (с точными методами) численного анализа установлено, что предло-

женным приближенным методом расчета пологих длинных цилиндрических оболочек, искривленных и в продольном направлении, с достаточной точностью (порядка 10—15%) можно пользоваться при отношении сторон оболочки больше $3{,}5 \div 4{,}0$.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 12 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* ДАН Армянской ССР, т. VIII, № 5, 1948.
2. *Амбарцумян С. А.* Известия АН Армянской ССР, № 9, 1947.
3. *Амбарцумян С. А.* Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. IV, № 5, 1951.
4. *Амбарцумян С. А.* Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
5. *Власов В. З.* Общая теория оболочек, 1949.
6. *Гольденвейзер А. Л.* ПММ, XI, 4, 1947.
7. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки, 1947.
8. *Векуа И. Н.* ПММ, XII, 1, 1948.
9. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек, 1947.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек, 1951.

Ս. Ա. Համբարձումյան

ԿՐԿՆԱԿԻ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿԱՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ առաջարկվում է կրկնակի կորություն ունեցող երկար թաղանթների հաշվարկման մի նոր մոտավոր մեթոդ։

Ցույց է տրվում, որ երկար թաղանթների ամրության խնդիրը բերվում է բավական պարզ (2,5) գծային դիֆերենցիալ հավասարմանը, որն ստացվում է անիզոտրոպ թաղանթների ընդհանուր տեսության հավասարումներից՝ (2.1) և (2.2) մոտավորությունները ընդունելու հետևանքով։