

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. А. Александриян, Н. О. Гулкян

Кручение стержней с сечениями в виде швеллера
и тавра

В работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с сечениями в виде швеллера и тавра.

При решении задачи применяется метод введения вспомогательных функций [1]. Данная работа является одной из серии задач по кручению стержней полигонального поперечного сечения [2], [3], [4], [5], [6] и [7]. Решение уравнений задачи приводится к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Определение же постоянных интегрирования приводится к решению бесконечных, вполне регулярных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют жесткость при кручении в зависимости от геометрических параметров сечения.

§ 1. Кручение стержней с сечениями в виде швеллера

1. *Постановка задачи.* Известно, что задача о кручении призматического стержня приводится к нахождению функции напряжений $U(x, y)$, удовлетворяющей внутри области уравнению $\nabla^2 U = -2$ и принимающей на границе области значения, равные нулю.

Пусть поперечное сечение стержня—швеллер с осью симметрии $x = a$ (фиг. 1).

Известно, что в таком случае достаточно найти функцию напряжений в областях I, II, и III, потребовав при этом, чтобы на оси симметрии профиля $x = a$ нормальная производная от функции $U(x, y)$ равнялась нулю.

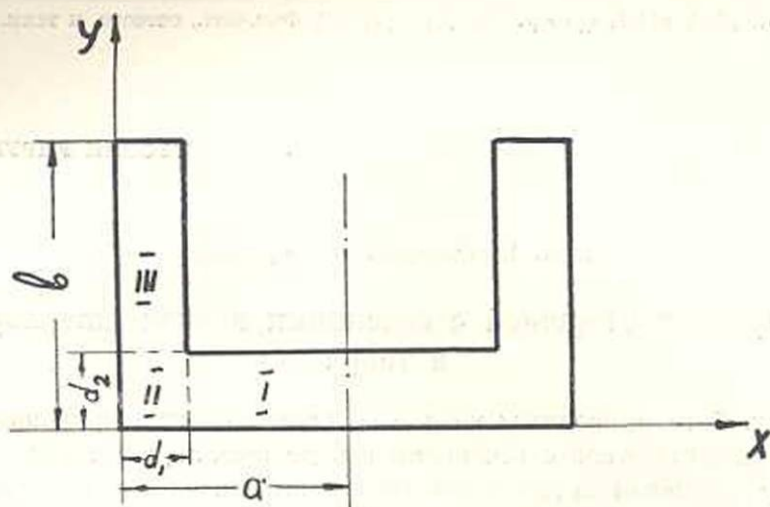
Функцию напряжений $U(x, y)$ будем искать в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области I + II,} \\ U_2(x, y) & \text{в области II + III,} \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$U_1(x, y) = \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{при } x > d_1, \\ \Phi_1(x, y) & \text{при } x \leq d_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$U_2(x, y) = \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{при } y > d_2, \\ \Phi_2(x, y) & \text{при } y \leq d_2. \end{cases}$$



Фиг. 1.

Тогда для функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) получим следующие условия:

$$\nabla^2 \Psi_1 = \nabla^2 \Psi_2 = -2, \quad \nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0, \quad (1.3)$$

$$\Psi_1(x, y) \big|_{y=d_2} = \Psi_1(x, y) \big|_{y=0} = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=a} = 0, \quad (1.4)$$

$$\Psi_2(x, y) \big|_{x=0} = \Psi_2(x, y) \big|_{x=d_1} = \Psi_2(x, y) \big|_{y=b} = 0, \quad (1.5)$$

$$[\Psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y)]_{x=0} = 0, \quad [\Psi_2(x, y) + \Phi_2(x, y)]_{y=0} = 0, \quad (1.6)$$

$$\Phi_1(x, y) \big|_{y=0} = \Phi_1(x, y) \big|_{x=d_1} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=d_1} = 0, \quad (1.7)$$

$$\Phi_2(x, y) \big|_{x=0} = \Phi_2(x, y) \big|_{y=d_2} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_2} = 0, \quad (1.8)$$

$$[\Phi_1(x, y) - \Psi_2(x, y)]_{y=d_2} = 0, \quad [\Phi_2(x, y) - \Psi_1(x, y)]_{x=d_1} = 0. \quad (1.9)$$

2. Дифференциальные уравнения и их решения. Функции $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) ищем в виде:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (1.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (1.11)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

где

$$f_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy,$$

$$V_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx,$$

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy,$$

$$W_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx.$$

Из (1.3), в силу условий (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) и (1.9), для $f_k(x)$, $V_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $W_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 f_k(x) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}],$$

$$V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 V_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}],$$

$$\varphi_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 \varphi_k(x) = -(-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_2) \sin \frac{p\pi x}{d_1},$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 W_k(y) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_1) \sin \frac{p\pi y}{d_2}.$$

Решая эти уравнения и пользуясь условиями (1.4) и (1.5), получим:

$$f_k(x) = B_k \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d_2}} + \frac{4d_2^2}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}], \quad (1.12)$$

$$V_k(y) = N_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_1}} + \frac{4d_1^3}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d_1}} \right], \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & \frac{2}{\pi} \left(\frac{d_1}{d_2} \right) (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (x - d_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \cdot V_p(d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2} - \\ & - \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p(d_2)}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2} \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_1}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} W_k(y) = & \frac{2}{\pi} \left(\frac{d_2}{d_1} \right) (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p i_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1} \right)^2} - \\ & - \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i_p(d_1) \sin \frac{p\pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1} \right)^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

3. *Исследование и решение бесконечной системы.* Из условий (1.6) для определения B_k и N_k получим совокупность двух бесконечных систем. Введем обозначения:

$$B_k = S_k d_1 d_2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2},$$

$$N_k = R_k d_1 d_2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \alpha,$$

где α пока неизвестный коэффициент. Тогда получим:

$$\begin{aligned} S_k = & \frac{2k\alpha}{\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{d_2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2} - \\ & - \frac{16k}{\pi^4} \frac{d_1^3}{d_2^3} \sum_{p=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{p^3 \left[p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2 \right]} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} \right) + \\ & + \frac{4}{k^2\pi^3} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \cdot \frac{[1 + (-1)^{k+1}]}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}}, \end{aligned}$$

$$R_k = \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right) \sum_{p=1}^{\infty} S_p \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_2}{d_1}\right)^2} -$$

$$- \frac{2}{\kappa\pi^3\alpha} \left(1 - \frac{2}{\kappa\pi} \frac{d_1}{d_2} \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{2d_1}\right) + \frac{4}{\kappa^2\pi^3\alpha} \frac{d_1}{d_2} \frac{[1+(-1)^{k+1}]}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}}.$$

Эти две системы можно написать в виде одной

$$Z_v = \sum_{p=1}^{\infty} A_{v,p} Z_p + B_v, \quad (1.17)$$

$$v = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$Z_{2k-1} = R_k, \quad Z_{2k} = S_k,$$

$$B_{2k-1} = -\frac{2}{\kappa\pi^3\alpha} \left[1 - \frac{2}{\kappa\pi} \left(\frac{d_1}{d_2}\right) \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{2d_1}\right] + \frac{4}{\kappa^2\pi^3\alpha} \left(\frac{d_1}{d_2}\right) \frac{[1+(-1)^{k+1}]}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}},$$

$$B_{2k} = -\frac{16\kappa}{\pi^4} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2\right]} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}}\right) +$$

$$+ \frac{4}{\kappa^2\pi^3} \left(\frac{d_2}{d_1}\right) \frac{[1+(-1)^{k+1}]}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2}},$$

$$A_{2k, 2p} = 0, \quad A_{2k-1, 2p-1} = 0,$$

$$A_{2k-1, 2p} = \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \left(\frac{d_2}{d_1}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_2}{d_1}\right)^2},$$

$$A_{2k, 2p-1} = \frac{2\kappa}{\pi} \alpha \left(\frac{d_1}{d_2}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2}.$$

Покажем, что система (1.17) вполне регулярна. Для этого, как известно, достаточно показать, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{v,p}| \leq 1 - \theta \text{ для всех } v \geq 1 \text{ и } \theta > 0. \quad (1.18)$$

Для нечетных ν имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k-1, p}| \leq \frac{2k}{\pi \alpha} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_2}{d_1}\right)^2} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Для четных ν :

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k, p}| \leq \frac{2k}{\pi} \alpha \left(\frac{d_1}{d_2}\right) \cdot \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Принимая $\alpha = \sqrt{2}$, для всех $\nu \geq 1$ получим:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{\nu, p}| \leq 0,70711.$$

4. *Определение жесткости при кручении.* Как известно, жесткость профиля C выражается через функцию напряжений следующим образом:

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) \, dx dy.$$

В силу условий (1.1) и (1.2):

$$\begin{aligned} C &= 4G \left\{ \iint_{I+II} U_1(x, y) \, dx dy + \iint_{III} U_2(x, y) \, dx dy \right\} = \\ &= 4G \left\{ \int_{d_1}^a dx \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) dy + \int_0^{d_1} dx \int_0^{d_1} [\Psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y)] dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{d_1} dx \int_{d_2}^b \Psi_2(x, y) dy \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$ и $\Phi_1(x, y)$ из уравнений (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.14); и принимая $d_1 = d_2 = d$, $b = a$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} C &= 8Gad^3 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \left(\frac{d}{a}\right) - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{d}{a}\right) \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{\kappa^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{d}{a}\right) \sum_k^{1,3,5} \frac{Z_{2k}}{\kappa^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d} (a-d)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{d}{a} \sum_k^{1,3,5} \frac{Z_{2k-1}}{\kappa^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{2d} (a-2d)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{2d}} \right] \right], \end{aligned}$$

где Z_k — решения бесконечной вполне регулярной системы (1.17).

Жесткости стержня с недостатком и с избытком обозначим соответственно через $\bar{C}$ и $\bar{C}$. За расчетную формулу C принимаем среднее арифметическое жесткостей $\bar{C}$ и $\bar{C}$; ошибка при этом получается меньше 1,34%.

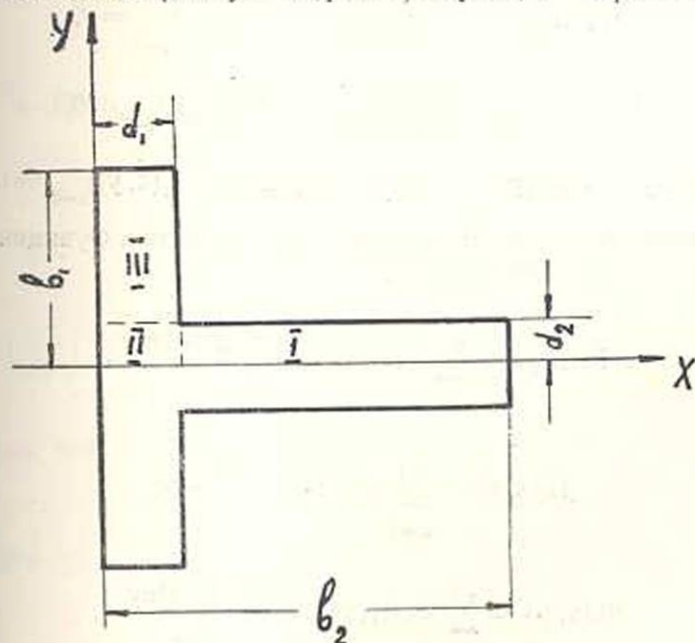
В таблице 1 приведены значения жесткости стержня с сечением в виде швеллера для различных отношений $\frac{a}{d}$. Для сравнения там же приведены значения жесткости C_0 , вычисленной как сумма жесткостей отдельных прямоугольников, составляющих данный профиль.

Таблица 1

a/d	1	2	3	4	5	10
$\bar{C}/Gad^3$	0,458	0,9545	1,0827	1,1452	1,1828	1,2581
$\bar{C}/Gad^3$	0,458	0,9805	1,1007	1,1590	1,1938	1,2636
C/Gad^3	0,458	0,9675	1,0917	1,1521	1,1883	1,2608
C_0/Gad^3	0,458	0,6870	0,9007	1,0090	1,0732	1,2036

II. Кручение стержней с тавровым поперечным сечением

1. *Постановка задачи.* Пусть поперечное сечение стержня—тавр с осью симметрии $y=0$ (фиг. 2). Функция напряжений $U(x, y)$



Фиг. 2.

удовлетворяет внутри области сечения уравнению Пуассона $\nabla^2 U = -2$ и принимает на границе области значения, равные нулю. Вследствие симметрии достаточно найти функцию $U(x, y)$ только в областях I, II

и III, потребовав при этом, чтобы на оси симметрии $y=0$ нормальная производная от функции $U(x, y)$ равнялась нулю.

Функцию напряжений будем искать в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области I + II,} \\ U_2(x, y) & \text{в области II + III,} \end{cases} \quad (2.1)$$

где
$$U_1(x, y) = H_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{при } x > d_1, \\ \Phi_1(x, y) & \text{при } x \leq d_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$U_2(x, y) = H_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{при } y > d_2, \\ \Phi_2(x, y) & \text{при } y \leq d_2. \end{cases}$$

Тогда для функций $H_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) получим следующие условия:

$$\nabla^2 H_1 = \nabla^2 H_2 = -2, \quad \nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0, \quad (2.3)$$

$$H_1(x, y) \big|_{y=d_1} = H_1(x, y) \big|_{x=d_2} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (2.4)$$

$$H_2(x, y) \big|_{x=d_1} = H_2(x, y) \big|_{x=0} = H_2(x, y) \big|_{y=d_1} = 0, \quad (2.5)$$

$$[H_1(x, y) + \Phi_1(x, y)]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad (2.6)$$

$$\Phi_1(x, y) \big|_{x=d_1} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=d_1} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (2.7)$$

$$\Phi_2(x, y) \big|_{y=d_2} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_2} = \Phi_2(x, y) \big|_{x=0} = 0, \quad (2.8)$$

$$[\Phi_1(x, y) - H_2(x, y)]_{y=d_2} = 0, \quad [\Phi_2(x, y) - H_1(x, y)]_{x=d_1} = 0. \quad (2.9)$$

2. Дифференциальные уравнения и их решения. Функции $H_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) ищем в виде:

$$H_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \quad (2.10)$$

$$H_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \quad (2.11)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

где
$$i_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} H_1(x, y) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} dy,$$

$$\varphi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} H_2(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx,$$

$$V_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} dy,$$

$$W_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_2(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx.$$

Из (2.3), в силу условий (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9), для $i_{2k-1}(x)$, $\varphi_k(y)$, $V_{2k-1}(x)$ и $W_k(y)$ получим следующие дифференциальные уравнения;

$$i_{2k-1}''(x) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 i_{2k-1}(x) = - \frac{8(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi},$$

$$\varphi_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 \varphi_k(y) = - \frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}],$$

$$V_{2k-1}''(x) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 V_{2k-1}(x) = - \frac{2}{d_2} \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right] \times$$

$$\times (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_2) \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_1},$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 W_k(y) = \frac{2}{d_1} \left(\frac{k\pi}{d_1} \right) (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} i_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}.$$

Решая эти уравнения и пользуясь условиями (2.4) и (2.5), получим:

$$\begin{aligned} i_{2k-1}(x) = A_{2k-1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right] + \\ + \frac{32d_2^3}{(2k-1)^3\pi^3} (-1)^{k+1} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2}} \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\varphi_k(y) = C_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \right] + \\ + \frac{4d_1^3}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{d_1}} \right], \quad (2.13)$$

$$V_{2k-1}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d_1}{d_2} (-1)^{k+1} \left\{ \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \times \right. \\ \times \left. \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right\} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \varphi_p(d_2)}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2} + \\ + \frac{4(2k-1)}{\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2 (-1)^{k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_2) \frac{\sin \frac{p\pi x}{d_1}}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2}, \quad (2.14)$$

$$W_k(y) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) (-1)^k \left\{ \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \right\} \times \\ \times \sum_{p=1}^{\infty} i_{2p-1}(d_1) \cdot \frac{(2p-1) \cdot (-1)^{p+1}}{(2p-1)^2 + k^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2} - \\ + \frac{2k}{\pi} (-1)^k \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + k^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2}. \quad (2.15)$$

3. *Исследование и решение бесконечной системы.* Из условий (2.6) для определения A_k и C_k получим совокупность двух бесконечных систем. Введем обозначения

$$C_p^* = 2p(-1)^p \cdot C_p \left[\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{p\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \right], \quad (2.16)$$

$$A_{2p-1}^* = (2p-1)(-1)^{p+1} A_{2p-1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \times \right. \\ \times \left. \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \right].$$

Тогда для неизвестных коэффициентов получим:

$$A_{2k-1}^* = (2k-1) \cdot (-1)^{k+1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \left[-\frac{32d_1^3(-1)^{\kappa+1}}{(2\kappa-1)^3\pi^3} + \frac{32d_1^3}{\pi^4} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot (-1)^{\kappa+1} \times \right. \\
& \times \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 \left[(2p-1)^2 + (2\kappa-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2 \right]} \times \\
& \times \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_2}{2d_2}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b_1}{d_1}} \right] \cdot \left. - \frac{2(2\kappa-1)}{\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \times \right. \\
& \times \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \left[\operatorname{ch} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \right] \times \\
& \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p^*}{p^2 + (2\kappa-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2}, \\
C_k^* = & 2\kappa(-1)^{\kappa} \left[\operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \right] \left[-\frac{4d_1^3}{\kappa^3\pi^3} \frac{[1+(-1)^{\kappa+1}]}{\operatorname{ch} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1}} + \right. \\
& + \frac{64d_1^3}{\pi^4} (-1)^{\kappa} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \times \\
& \times \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 \left[(2p-1)^2 + \kappa^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2 \right]} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2}} \right] \left. - \right. \\
& - \frac{4\kappa}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \left[\operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \right] \times \\
& \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_{2p-1}^*}{(2p-1)^2 + \kappa^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2}.
\end{aligned}$$

Эти две системы можно написать в виде одной:

$$Z_v = \sum_{p=1}^{\infty} C_{v,p} Z_p + \gamma_v, \quad (2.17)$$

$$v = 1, 2, \dots$$

где

$$Z_{2\kappa-1} = A_{2\kappa-1}^*, \quad Z_{2\kappa} = C_{2\kappa}^*,$$

$$C_{2\kappa-1, 2p-1} = 0, \quad C_{2\kappa, 2p} = 0,$$

$$C_{2k-1,2p} = -\frac{2(2k-1)}{\pi} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \right. \\ \left. - \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] \cdot \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2},$$

$$C_{2k,2p-1} = -\frac{4k}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \right] \times \\ \times \frac{1}{(2p-1)^2 + k^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2},$$

$$\gamma_{2k-1} = (2k-1)(-1)^{k+1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] \cdot \left\{ -\frac{32d_2^2}{(2k-1)^3 \pi^3} (-1)^{k+1} \cdot + \right.$$

$$+ \frac{32d_1^2}{\pi^4} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) (-1)^{k+1} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b_1}{d_1}} \right] \times \\ \left. \times \frac{1}{(2p-1)^2 \left[(2p-1)^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2 \right]} \right\},$$

$$\gamma_{2k} = 2k(-1)^k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \right] \left\{ -\frac{4d_1^2}{k^3 \pi^3} \frac{[1 + (-1)^{k+1}]}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1}} + \right. \\ \left. + \frac{64d_2^2}{\pi^4} (-1)^k \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{1,3,5} \frac{1}{p^2 \left[p^2 + k^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2 \right]} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{2d_2}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b_2}{2d_2}} \right] \right\}.$$

Покажем, что система (2.17) вполне регулярна, т. е. что

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| \leq 1 - \theta \quad (2.18)$$

для всех

$$\nu \geq 1 \text{ и } \theta > 0.$$

Для нечетных ν имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{2k-1,p}| \leq \frac{2(2k-1)}{\pi} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot e^{-\frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2}} \times \\ \times \frac{\pi}{2(2k-1)} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Для четных ν :

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{2k,p}| \leq \frac{4k}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} e^{-\frac{k\pi d_2}{d_1}} \times \\ \times \frac{\pi}{4k} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для всех $\nu \geq 1$ имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu,p}| \leq \frac{1}{2}.$$

4. *Определение жесткости при кручении.* Для жесткости C имеем:

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy.$$

В силу условий (2.1) и (2.2):

$$C = 4G \left\{ \iint_{I+II} U_1(x, y) dx dy + \iint_{III} U_2(x, y) dx dy \right\} = \\ = 4G \left\{ \int_{d_1}^{b_1} dx \int_0^{d_1} H_1(x, y) dy + \int_0^{d_1} dx \int_0^{d_1} [H_1(x, y) + \Phi_1(x, y)] dy + \right. \\ \left. + \int_0^{d_1} dx \int_{d_2}^{b_1} H_2(x, y) dy \right\}.$$

или, подставляя значения $H_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ из уравнений (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) и принимая $b_1 = b_2 = b$, $d_2 = \frac{d_1}{2} = d$, окончательно получим:

$$C = 16bd^3G \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{d}{b} \right) - \frac{32}{\pi^5} \left(\frac{d}{b} \right) \sum_k^{1,3,5,\dots} \frac{1}{k^5} \left[3 \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 + \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}} \right] + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{d}{b} \right) \sum_k^{1,3,5,\dots} \frac{Z_k^*}{k^3} - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{4d}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{4d} (b-2d)} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} \right\}$$

$$\times \left[-\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{d}{b} \right)^{1,3,5} \sum_k \frac{Z_{2k}^*}{k^3} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{4d} (b-d) \right] \right],$$

где $Z_k^* d^2 = Z_k$ — решения бесконечной вполне регулярной системы (2.17). Жесткость профиля с недостатком и с избытком обозначим соответственно через $\tilde{C}$ и $\bar{C}$.

Принимаем за расчетную формулу C среднее арифметическое жесткостей $\tilde{C}$ и $\bar{C}$, ошибка при этом получается меньше 1,10%.

В таблице 2 приведены значения жесткостей стержня с тавровым поперечным сечением при различных отношениях $b/2d$. Там же приведены значения жесткости C_0 , вычисленной как сумма жесткостей отдельных прямоугольников, составляющих данный профиль.

Таблица 2

$b/2d$	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
$\tilde{C}/Gbd^3$	5,3401	6,2268	6,6656	6,9325	7,4682
$\bar{C}/Gbd^3$	5,4586	6,3010	6,7258	6,9807	7,4903
C_0/Gbd^3	5,3993	6,2609	6,6957	6,9566	7,4795
C/Gbd^3	5,0584	5,9357	6,4913	6,7904	7,4000

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 19 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948, ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Абрамян Б. Л. Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением. ПММ, т. XIII, вып. 5, 1949.
3. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
4. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде трапеции. ПММ, т. XV, вып. 1, 1950.
5. Александрян Е. А. О кручении некоторых призматических стержней. Известия АН Армянской ССР, (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.
6. Александрян Е. А. Кручение двутавровой балки. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук) т. V, № 6, 1952.
7. Гулканян Н. О. О кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии продольных трещин. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.

Ե. Ս. ՆԱԽԱՆԳՐԱՆ ԵՎ Ն. Օ. ԳՈՒՐԱՆԻԱՆ

ՇՎԵԼԼԵՐԻ ԵՎ ՏԱՎՐԻ ՁԵՎԻ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգւածում բերւում է շվելլերի և տավրի ձևի հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

Լուծման ժամանակ կիրառվել է օժանդակ ֆունկցիաների մուծման մեթոդը: Խնդրի՝ մասնակի ածանցյալներով հավասարումների լուծումը բերված է հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերված է անվերջ, լիովին սեղույթար գծային հավասարումների սխեմների լուծման:

Ոլորման կոշտությունը հաշվելու համար ստացված են հատվածքի երկրաչափական պարամետրները պարունակող բանաձևեր: