

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек

1. Основные уравнения. Рассмотрим тонкую многослойную оболочку, собранную из произвольного числа однородных ортотропных слоев.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материалов каждого слоя взаимно параллельны, при этом одна из плоскостей упругой симметрии в каждой точке любого слоя параллельна внешним параллельным поверхностям оболочки, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ .

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности,  $\gamma$  — расстояния по нормали от точки  $(\alpha, \beta)$  до точки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  оболочки.

За координатную поверхность принимаем внешнюю поверхность с вогнутой стороны оболочки.

Предполагается также, что все слои при деформировании остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Считаем, что для описанной слоистой оболочки (фиг. 1) справедлива гипотеза недеформируемых нормалей, данная для всего пакета оболочки в целом [1, 2, 3, 4].

В силу этой гипотезы, из обобщенного закона Гука, для напряжений  $m$ -го слоя оболочки получим [3, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^m &= B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2 + \gamma (B_{11}^m \alpha_1 + B_{12}^m \alpha_2), \\ \sigma_{\beta}^m &= B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{12}^m \varepsilon_1 + \gamma (B_{22}^m \alpha_2 + B_{12}^m \alpha_1), \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \omega + \gamma B_{66}^m \tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}^m &= \frac{E_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \\ B_{12}^m &= \frac{E_1^m \mu_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} = \frac{E_2^m \mu_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{66}^m = G_{12}^m, \end{aligned} \quad (1.2)$$

при этом:

$E_1^m = E_{\alpha}^m$ ,  $E_2^m = E_{\beta}^m$  — модули упругости вдоль главных направлений



Отметим, что здесь и в последующем будем пользоваться общепринятыми обозначениями теории оболочек [6, 7].

Напряжения  $\sigma_x^m$ ,  $\sigma_y^m$  и  $\tau_{xy}^m$  вызывают внутренние силы и моменты, которые определяются следующими формулами:

тангенциальные силы

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + K_{11}\chi_1 + K_{12}\chi_2, \\ N_2 &= C_{22}\epsilon_2 + C_{12}\epsilon_1 + K_{22}\chi_2 + K_{12}\chi_1, \\ S &= C_{66}\omega + K_{66}\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

моменты:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_{11}\chi_1 - D_{12}\chi_2 - K_{11}\epsilon_1 - K_{12}\epsilon_2, \\ M_2 &= -D_{12}\chi_1 - D_{22}\chi_2 - K_{12}\epsilon_1 - K_{22}\epsilon_2, \\ H &= D_{66}\tau + K_{66}\omega, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где для жесткостей изгиба и растяжения соответственно имеем:

$$D_{ik} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m-1}^3), \quad (1.7)$$

$$C_{ik} = \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m-1}). \quad (1.8)$$

Кроме указанных жесткостей в (1.5) и (1.6) входят также некоторые побочные жесткости  $K_{ik}$ , которые представляются в следующем виде:

$$K_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^2 - \delta_{m-1}^2). \quad (1.9)$$

В этих формулах:  $n$ —число слоев,  $\delta_m$ —расстояния контактных поверхностей от координатной поверхности оболочки.

Полученные соотношения (1.5) и (1.6) существенным образом отличаются от аналогичных соотношений теории симметрично собранных (относительно срединной поверхности) анизотропных слоистых оболочек.

Отличие выражается, с одной стороны, наличием в (1.5) членов, учитывающих влияние изменений кривизны координатной поверхности на тангенциальные силы и, с другой стороны, наличием в (1.6) членов, характеризующих влияние деформаций удлинения и сдвига координатной поверхности на изгибающие и крутящие моменты.

Соотношения (1.5)—(1.9), с точки зрения общей теории тонких оболочек, приближены и в общем случае могут привести к некоторым противоречиям [6, 7], однако с инженерной точки зрения эти противоречия не существенны и могут быть не учтены.

Внутренние усилия должны удовлетворять условиям равновесия. Уравнения равновесия ни чем не отличаются от аналогичных уравнений теории изотропных оболочек и имеют следующий вид [6, 7]:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABk_1 Q_1 + ABX &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BS) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABk_2 Q_2 + ABY &= 0, \\
-(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2) \right] + Z &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} (BH) + H \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2) + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABQ_2 &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \beta} (AH) + H \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) + M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - ABQ_1 &= 0.
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Шестое недифференциальное уравнение равновесия не приводим и считаем, что оно удовлетворяется [7, 6].

Отметим, что в уравнениях равновесия принят закон парности сдвигающих сил и крутящих моментов [6].

В случае анизотропной слоистой оболочки без изменения остаются также уравнения неразрывности деформаций [8], из которых нас будет интересовать следующее:

$$\begin{aligned}
& z_1 k_2 + z_2 k_1 + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right] \right\} = 0. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

2. *Оболочки вращения.* Положение какой-либо точки  $M$  на координатной поверхности оболочки вращения будем определять углом  $\varphi$ , являющимся азимутом плоскости, проведенной через точку  $M$  и ось вращения  $z$  и меридиональной дугой  $s$  [9, 10, 4].

Для принятой системы координат имеем:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{dz}{ds}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{r}, \quad (2.1)$$

$$A = 1, \quad B = r, \quad \frac{dB}{ds} = -\sin \alpha, \quad (2.2)$$

где  $r$  — радиус кривизны параллельного круга,  $\alpha$  — угол между радиусом кривизны ( $R_2$ ) нормального сечения и радиусом кривизны ( $r$ ) параллельного круга [9].

Рассмотрим случай, когда оболочка нагружена симметрично относительно ее оси вращения и имеет соответствующие симметричные граничные условия.

В этом случае деформации оболочки будут функциями лишь координаты  $s$ . Тогда под действием нагрузки возникнут лишь внутренние силы  $N_1, N_2, Q$  и изгибающие моменты  $M_1, M_2$  и уравнения равновесия (1.10) примут следующий вид [9, 4]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(rN_1) + N_2 \sin \alpha + \frac{r}{R_1} Q + rX &= 0, \\ \frac{d}{ds}(rQ) - r \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + rZ &= 0, \\ \frac{d}{ds}(rM_1) + M_2 \sin \alpha + rQ &= 0.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Следуя [6, 9] введем вспомогательную функцию  $V$ . Тогда:

$$N_2 = \frac{dV}{ds}, \quad N_1 = -\frac{\sin \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_1(s), \quad (2.4)$$

$$Q = \frac{\cos \alpha}{r} V + \frac{1}{r} F_2(s), \quad (2.5)$$

где  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$  — функции от внешней нагрузки, и определяются следующими формулами [9]:

$$F_1 = \sin \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \cos \alpha \left( \frac{P_z^*}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right), \quad (2.6)$$

$$F_2 = -\cos \alpha \int_{s_0}^s r E_r ds + \sin \alpha \left( \frac{P_z^*}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right). \quad (2.7)$$

Здесь

$$E_r = Z \cos \alpha - X \sin \alpha, \quad E_z = Z \sin \alpha + X \cos \alpha, \quad (2.8)$$

$$P_z^* = (N_1^* \cos \alpha_0 + Q^* \sin \alpha_0) 2\pi r_0. \quad (2.9)$$

Подставляя значения  $N_1$ ,  $N_2$  и  $Q$  из (2.4) и (2.5) в (2.3), тождественно удовлетворим первым двум уравнениям.

Третье уравнение системы (2.3) примет следующий вид:

$$\frac{d}{ds}(rM_1) + M_2 \sin \alpha + V \cos \alpha = -F_2(s). \quad (2.10)$$

Полагая 
$$W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}, \quad (2.11)$$

из (1.3) и (1.4) для относительных деформаций и изменений кривизны найдем:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} (w \cos \alpha - u \sin \alpha), \quad (2.12)$$

$$\kappa_1 = -\frac{dW}{ds}, \quad \kappa_2 = W \frac{\sin \alpha}{r}. \quad (2.13)$$

Подставляя значения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  из (2.13) в (1.11), после некоторых преобразований получим известное уравнение неразрывности деформаций для симметрично нагруженной оболочки вращения [9]:

$$r \frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha - W \cos \alpha = 0. \quad (2.14)$$

Решая совместно первые два соотношения (1.5) относительно деформаций, и учитывая при этом (2.4) и (2.3), получим:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\Omega} \left[ C_{22} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{12} \frac{dV}{ds} + (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W - \right. \\ \left. - (K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}) \frac{dW}{ds} - C_{22} \frac{1}{r} F_1(s) \right], \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Omega} \left[ C_{12} \frac{\sin \alpha}{r} V + C_{11} \frac{dV}{ds} - (K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}) \frac{\sin \alpha}{r} W + \right. \\ \left. + (K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}) \frac{dW}{ds} - C_{12} \frac{1}{r} F_1(s) \right], \quad (2.16)$$

$$\Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2. \quad (2.17)$$

Подставляя значения  $\alpha_1, \alpha_2$  из (2.13) и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  из (2.15) и (2.16) в (1.6), для изгибающих моментов получим:

$$M_1 = (D_{11} - D_{11}^*) \frac{dW}{ds} - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{\sin \alpha}{r} W + \\ + \frac{K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}}{\Omega} \frac{dV}{ds} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V - \\ - \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s), \quad (2.18)$$

$$M_2 = (D_{12} - D_{12}^*) \frac{dW}{ds} - (D_{22} - D_{22}^*) \frac{\sin \alpha}{r} W - \\ - \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \frac{dV}{ds} - \frac{K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V + \\ + \frac{K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s), \quad (2.19)$$

где

$$D_{11}^* = \frac{(K_{11})^2 C_{22} - 2K_{11} K_{12} C_{12} + (K_{12})^2 C_{11}}{\Omega}, \\ D_{12}^* = \frac{K_{11} K_{12} C_{22} - [K_{11} K_{22} + (K_{12})^2] C_{12} + K_{22} K_{12} C_{11}}{\Omega}, \\ D_{22}^* = \frac{(K_{22})^2 C_{11} - 2K_{22} K_{12} C_{12} + (K_{12})^2 C_{22}}{\Omega}. \quad (2.20)$$

Подставляя значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  из (2.15) и (2.16) в (2.14) и  $M_1$  и  $M_2$  из (2.18) и (2.19) в (2.10), получим:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} + \left( \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right) V = \\ = \frac{P_1}{C_{11}} \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{P_2 - P_1}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} + \left[ \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{C_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} - \right. \\ \left. - \frac{P_3}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} + \frac{\Omega}{C_{11}} \frac{1}{R_2} \right] W + \Phi_1(s), \quad (2.21)$$



$$\begin{aligned} & \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \left( \frac{D_{12} - D_{12}^0}{D_{11} - D_{11}^0} \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{D_{22} - D_{22}^0}{D_{11} - D_{11}^0} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right) W = \\ & = - \frac{P_1}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{P_2 + P_1}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} - \left[ \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{1}{R_1 R_2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{P_3}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} + \frac{1}{(D_{11} - D_{11}^0) R_2} \right] V + \Phi_2(s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{11} C_{12} - K_{12} C_{11}, \quad P_2 = K_{22} C_{11} - K_{11} C_{22}, \\ P_3 &= K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{r} \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r^2} F_1(s), \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{r} \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{1}{r(D_{11} - D_{11}^0)} F_2(s) - \\ & \quad - \frac{K_{22} C_{12} - K_{12} C_{22}}{\Omega(D_{11} - D_{11}^0)} \frac{\sin \alpha}{r^2} F_1(s). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Уравнения (2.21) и (2.22) составляют полную систему относительно двух искомых вспомогательных функций  $V$  и  $W$ , через которые, формулами (2.4), (2.5), (2.18) и (2.19), определяются все расчетные усилия поставленной задачи.

Для напряжений в каждом слое оболочки из (1.1) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_s^m &= - \frac{1}{\Omega} \left( \Delta_{12}^m \frac{\sin \alpha}{r} V + \Delta_{11}^m \frac{dV}{ds} \right) + \left[ \frac{1}{\Omega} (K_{11} \Delta_{12}^m - K_{12} \Delta_{11}^m) - \right. \\ & \quad \left. - \gamma B_{11}^m \right] \frac{dW}{ds} - \left[ \frac{1}{\Omega} (K_{12} \Delta_{12}^m - K_{22} \Delta_{11}^m) - \gamma B_{12}^m \right] \frac{\sin \alpha}{r} W + \\ & \quad + \frac{\Delta_{12}^m}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^m &= \frac{1}{\Omega} \left( \Delta_{22}^m \frac{\sin \alpha}{r} V + \Delta_{21}^m \frac{dV}{ds} \right) - \left[ \frac{1}{\Omega} (K_{11} \Delta_{22}^m - K_{12} \Delta_{21}^m) + \right. \\ & \quad \left. + \gamma B_{12}^m \right] \frac{dW}{ds} + \left[ \frac{1}{\Omega} (K_{12} \Delta_{22}^m - K_{22} \Delta_{21}^m) + \gamma B_{22}^m \right] \frac{\sin \alpha}{r} W - \\ & \quad - \frac{\Delta_{22}^m}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^m &= B_{11}^m C_{12} - B_{12}^m C_{11}, \quad \Delta_{22}^m = B_{22}^m C_{12} - B_{12}^m C_{22}, \\ \Delta_{12}^m &= B_{11}^m C_{22} - B_{12}^m C_{12}, \quad \Delta_{21}^m = B_{22}^m C_{11} - B_{12}^m C_{12}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

3. *Пологие оболочки.* В случае пологих оболочек полагаем, что коэффициенты первой квадратичной формы  $A=A(\alpha, \beta)$  и  $B=B(\alpha, \beta)$  при дифференцировании ведут себя как постоянные [6, 11, 12].

Таким образом, полагая  $A = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ , внутреннюю геометрию координатной поверхности пологой оболочки подчиняем законам евклидовой геометрии на плоскости. Считаем, что кривизны  $k_1$  и  $k_2$  при дифференцировании постоянные.

В силу исходных предпосылок для изменений кривизны и для относительных деформаций из (1.3) и (1.4) получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w, \\ \omega = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad (3.1)$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (3.2)$$

Одновременно значительно упрощаются как уравнения равновесия, так и уравнения неразрывности деформаций.

Для уравнений равновесия из (1.10), получим:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial \beta} + X = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial \alpha} + Y = 0, \\ -(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{1}{A} \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + Z = 0, \quad (3.3) \\ \frac{1}{A} \frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - Q_2 = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - Q_1 = 0.$$

Здесь, как нетрудно заметить, в первых двух уравнениях мы пренебрегли величинами  $k_1 Q_1$  и  $k_2 Q_2$ , которые вызваны моментами и

пропорциональны кривизнам  $k_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $k_2 = \frac{1}{R_2}$  [6].

Из (1.11) для уравнения неразрывности деформаций получим:

$$k_2 \kappa_1 + k_1 \kappa_2 + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} = 0. \quad (3.4)$$

Пусть перемещения  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$  и  $w = w(\alpha, \beta)$  являются искомыми функциями этой задачи, тогда внутренние усилия определяются посредством следующих формул:

тангенциальные силы

$$N_1 = C_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + C_{13} k_1 w +$$



$$\begin{aligned}
& + C_{12}k_2w - K_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - K_{12}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\
N_2 = & C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{22}k_2w + \\
& + C_{12}k_1w - K_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - K_{12}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\
S = & C_{66}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + C_{66}\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - 2K_{66}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta},
\end{aligned} \quad (3.5)$$

изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned}
M_1 = & D_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - K_{11}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \\
& - K_{12}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - K_{11}k_1w - K_{12}k_2w, \\
M_2 = & D_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - K_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \\
& - K_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - K_{22}k_2w - K_{12}k_1w, \\
H = & -2D_{66}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{66}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right).
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя значения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  из (3.6) в последние два уравнения (3.3), для поперечных сил получим:

$$\begin{aligned}
Q_1 = & -F(D_{1k})w + (K_{12} + K_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(K_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right. \\
& \left. + K_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)u + (K_{11}k_1 + K_{12}k_2)\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\
Q_2 = & -F(D_{2k})w + (K_{12} + K_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(K_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \right. \\
& \left. + K_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)v + (K_{22}k_2 + K_{12}k_1)\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta},
\end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$E(D_{ik}) = D_{11}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad (3.8)$$

$$F(D_{ik}) = D_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{1}{BA^2}\frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2}.$$

Напряжения в каждом слое:

$$\sigma_a^m = B_{11}^m\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}^m\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{11}^mk_1w + B_{12}^mk_2w -$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \left( B_{11}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \\
 \sigma_{\beta}^m &= B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{22}^m k_2 w + B_{12}^m k_1 w - \\
 & -\gamma \left( B_{22}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right), \\
 \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - 2\gamma B_{66}^m \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению искоемых перемещений, через которые, формулами (3.5)–(3.9), выражены все расчетные величины.

Подставляя только что полученные значения  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  в первые три уравнения равновесия (3.3) получим симметрично построенную систему трех дифференциальных уравнений относительно трех искоемых функций  $u(\alpha, \beta)$ ,  $v(\alpha, \beta)$  и  $w(\alpha, \beta)$ .

| $u(\alpha, \beta)$                                                                                                     | $v(\alpha, \beta)$                                                                                                     | $w(\alpha, \beta)$                                                                                                                                                                                                   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ | $(C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$                                     | $(C_{11}k_1 + C_{12}k_2) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} - E(K_{ik})$                                                                                                                                   | X |
| $(C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$                                     | $C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$ | $(C_{22}k_2 + C_{12}k_1) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} - F(K_{ik})$                                                                                                                                    | Y |
| $(C_{11}k_1 + C_{12}k_2) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} - E(K_{ik})$                                     | $(C_{22}k_2 + C_{12}k_1) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} - F(K_{ik})$                                      | $(C_{11}k_1^2 + 2C_{12}k_1k_2 + C_{22}k_2^2) - 2(K_{11}k_1 + K_{12}k_2) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2(K_{22}k_2 + K_{12}k_1) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + L(D_{ik})$ | Z |

В системе (3.10)  $E(K_{ik})$  и  $F(K_{ik})$  являются линейными операторами третьего порядка (3.8) с коэффициентами  $K_{ik}$ .

$$L(D) = D_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + D_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \quad (3.11)$$

известный линейный оператор четвертого порядка.

Для пологих оболочек существенный практический интерес представляет случай, когда  $X=Y=0$ ,  $Z \neq 0$ . В этом случае задачу можно решить смешанным методом В. З. Власова [6].

С помощью формул (1.5), исключая из (1.6)  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\omega$ , для изгибающих и крутящего моментов получим:

$$M_1 = \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} N_2 - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} N_1 - \\ - (D_{11} - D_{11}^*) z_1 - (D_{12} - D_{12}^*) z_2, \quad (3.12)$$

$$M_2 = \frac{K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}}{\Omega} N_1 - \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} N_2 - \\ - (D_{22} - D_{22}^*) z_2 - (D_{12} - D_{12}^*) z_1, \quad (3.13)$$

$$H = \frac{K_{66}}{C_{66}} S + (D_{66} - D_{66}^*) \tau. \quad (3.14)$$

Подставляя значения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  в последние два уравнения (3.3), для поперечных сил находим:

$$Q_1 = \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A} \frac{\partial N_1}{\partial z} - \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A} \frac{\partial N_2}{\partial z} + \\ + \frac{K_{66}}{C_{66}} \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial \beta} - E(D_{1k} - D_{1k}^*) w, \quad (3.15)$$

$$Q_2 = \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B} \frac{\partial N_2}{\partial \beta} - \frac{K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B} \frac{\partial N_1}{\partial \beta} + \\ + \frac{K_{66}}{C_{66}} \frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial z} - F(D_{1k} - D_{1k}^*) w. \quad (3.16)$$

Здесь  $E(D_{1k} - D_{1k}^*)$  и  $F(D_{1k} - D_{1k}^*)$  линейные операторы третьего порядка (3.3) с коэффициентами  $(D_{1k} - D_{1k}^*)$ .

В (3.14) — (3.16) наряду с  $D_{1k}$  из (2.20) входит

$$D_{66}^* = \frac{(K_{66})^2}{C_{66}}. \quad (3.17)$$

Вводя функцию напряжений  $\varphi = \varphi(x, \beta)$ , через которую внутренние силы  $N_1$ ,  $N_2$  и  $S$  представляются соотношениями:

$$N_1 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad N_2 = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad S = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \beta}, \quad (3.18)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (3.3) (при  $X=Y=0$ ).

Из третьего уравнения (3.3), учитывая (3.15), (3.16) и (3.18), получим первое уравнение смешанной задачи:



$$\begin{aligned}
& - \left( k_1 \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right) + \left[ \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \right. \\
& + \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\
& \left. + \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} \right] - L(D_{ik} - D_{ik}^*) w + Z = 0, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

где  $L(D_{ik} - D_{ik}^*)$  — линейный оператор четвертого порядка (3.11) с коэффициентами  $(D_{ik} - D_{ik}^*)$ .

Второе уравнение смешанного метода строим на базе уравнения неразрывности деформаций (3.4). Посредством формул (1.5), исключая из (3.4)  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\omega$  и учитывая (3.18), получим:

$$\begin{aligned}
& - \left( k_1 \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + \left[ \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \right. \\
& + \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\
& \left. + \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} \right] + \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \left( \frac{1}{C_{66}} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} = 0. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Вводя для линейных операторов обозначения:

$$L_3(C_{ik}) = \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \left( \frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
L_3(K_{ik} C_{ik}) = & \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\nabla_i^2 = k_1 \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad (3.23)$$

из (3.19) и (3.20) получим:

$$\begin{aligned}
& L_2(C_{ik}) \varphi + L_3(K_{ik} C_{ik}) w - \nabla_i^2 w = 0, \\
& L(D_{ik} - D_{ik}^*) w - L_3(K_{ik} C_{ik}) \varphi + \nabla_i^2 \varphi = Z. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Таким образом, задача расчета прочности пологой многослойной ортотропной оболочки сводится к системе двух совместных дифференциальных уравнений (3.24) относительно двух искомых:  $\varphi(\alpha, \beta)$  — функции напряжений и  $w(\alpha, \beta)$  — функции перемещений.

Расчетные формулы внутренних усилий и напряжений в слоях оболочки в этом случае представляются посредством следующих формул:

изгибающие и крутящий моменты

$$M_1 = (D_{11} - D_{11}^*) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \\ + \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad (3.25)$$

$$M_2 = (D_{22} - D_{22}^*) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \\ + \frac{K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad (3.26)$$

$$H = -2(D_{66} - D_{66}^*) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{K_{66}}{C_{66}} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (3.27)$$

Тангенциальные силы  $N_1$ ,  $N_2$  и  $S$  определяются формулами (3.18). Напряжения в каждом слое определяем с помощью следующих формул:

$$\sigma_{\alpha}^m = \left( B_{11}^m \frac{C_{22}}{\Omega} - B_{12}^m \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \left( B_{11}^m \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^m \frac{C_{11}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \\ + \left( B_{11}^m \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^m \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^m \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \\ + \left( B_{11}^m \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^m \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{11}^m \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{\beta}^m = \left( B_{22}^m \frac{C_{11}}{\Omega} - B_{12}^m \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \left( B_{22}^m \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^m \frac{C_{22}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \\ + \left( B_{22}^m \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^m \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^m \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \\ + \left( B_{22}^m \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}K_{12}}{\Omega} + B_{12}^m \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{22}^m \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad (3.29)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = -\frac{B_{66}^m}{C_{66}} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + 2B_{66}^m \left( \frac{K_{66}}{C_{66}} - \gamma \right) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (3.30)$$

Остальные напряжения практического интереса не представляют.

Следуя В. З. Власову, систему (3.24) можно привести к эквивалентному ей одному уравнению восьмого порядка. Полагая:

$$w = L_2(C_{ik})\Phi, \quad \varphi = \nabla_r^2 \Phi - L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi, \quad (3.31)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (3.24). Из второго

уравнения для искомой функции  $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$  получим одно линейное уравнение восьмого порядка:

$$L_0(P_{ik})\Phi - 2L_1(Q_{ik})\Phi + \nabla_r^4 \Phi = Z. \quad (3.32)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$L_0(P_{ik}) = P_1 \frac{1}{A^8} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + P_3 \frac{1}{A^6 B^2} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + P_5 \frac{1}{A^4 B^4} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + \\ + P_4 \frac{1}{A^2 B^6} \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + P_2 \frac{1}{B^8} \frac{\partial^8}{\partial \beta^8}, \quad (3.33)$$

$$L_1(Q_{ik}) = L_3(K_{ik} C_{ik}) \nabla_r^2 = Q_1 \frac{1}{A^6} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + Q_3 \frac{1}{A^4 B^2} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + \\ + Q_4 \frac{1}{A^2 B^4} \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} + Q_2 \frac{1}{B^6} \frac{\partial^6}{\partial \beta^6}, \quad (3.34)$$

$$\nabla_r^4 = k_2^2 \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2k_1 k_2 \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + k_1 \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (3.35)$$

где

$$P_1 = (D_{11} - D_{11}^*) \frac{C_{11}}{\Omega} + \left( \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \right)^2, \\ P_2 = (D_{22} - D_{22}^*) \frac{C_{22}}{\Omega} + \left( \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \right)^2, \\ P_3 = 2[(D_{12} - D_{12}^*) + 2(D_{66} - D_{66}^*)] \frac{C_{11}}{\Omega} + (D_{11} - D_{11}^*) \left( \frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) + \\ + 2 \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right), \\ P_4 = 2[(D_{12} - D_{12}^*) + 2(D_{66} - D_{66}^*)] \frac{C_{22}}{\Omega} + (D_{22} - D_{22}^*) \left( \frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) + \\ + 2 \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right), \\ P_5 = (D_{11} - D_{11}^*) \frac{C_{22}}{\Omega} + 2[(D_{12} - D_{12}^*) + 2(D_{66} - D_{66}^*)] \left( \frac{1}{C_{66}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} + (D_{22} - D_{22}^*) \frac{C_{11}}{\Omega} + 2 \frac{(K_{12} C_{12} - K_{11} C_{12})(K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12})}{\Omega^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right)^2 \right), \quad (3.36) \\ Q_3 = k_1 \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} + k_2 \left( \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} \right), \\ Q_1 = k_2 \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega}, \quad Q_2 = k_1 \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega}, \quad (3.37)$$



$$Q_4 = k_2 \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} + k_1 \left( \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right).$$

В этом случае расчетные формулы будут представлены посредством искомой функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ .

Тангенциальные силы:

$$\begin{aligned} N_1 &= [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})] \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}, \\ N_2 &= [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})] \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}, \\ S &= -[\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})] \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставляя значения  $w$  и  $\varphi$  из (3.31) в (3.25), (3.26) и (3.27), для моментов получим:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[ (D_{11} - D_{11}^0) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] L_2(C_{ik})\Phi + \\ &+ \left[ \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})]\Phi, \\ M_2 &= \left[ (D_{22} - D_{22}^0) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] L_2(C_{ik})\Phi + \\ &+ \left[ \frac{K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})]\Phi, \\ H &= -2(D_{66} - D_{66}^0) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_2(C_{ik})\Phi - \frac{K_{66}}{C_{66}} \frac{1}{AB} [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Для напряжений из (3.28), (3.29) и (3.30) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^m &= \left[ \left( \frac{B_{11}^m C_{22} - B_{12}^m C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \left( \frac{B_{11}^m C_{12} - B_{12}^m C_{11}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] [\nabla_r^2 - \\ &- L_3(K_{ik}C_{ik})]\Phi + \left[ \left( B_{11}^m \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^m + \right. \right. \\ &+ B_{12}^m \frac{K_{12}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \left. \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left( B_{11}^m \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + \right. \\ &+ B_{12}^m \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{11}^m \left. \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left. \right] L_2(C_{ik})\Phi, \\ \sigma_{\beta}^m &= \left[ \left( \frac{B_{22}^m C_{11} - B_{12}^m C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left( \frac{B_{22}^m C_{12} - B_{12}^m C_{22}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] [\nabla_r^2 - \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
& -L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi + \left[ \left( B_{22}^m \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^m + \right. \right. \\
& + B_{12}^m \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \left. \right) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left( B_{22}^m \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + \right. \\
& \left. + B_{12}^m \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{22}^m \right) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left. \right] L_2(C_{ik})\Phi, \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta}^m = & -\frac{B_{66}^m}{C_{66}} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} [\nabla_r^2 - L_3(K_{ik}C_{ik})]\Phi + \\
& + 2B_{66}^m \left( \frac{K_{66}}{C_{66}} - \gamma \right) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_2(C_{ik})\Phi. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

4. *Пластины.* Рассмотрим случай, когда обе главные кривизны оболочки  $k_1$  и  $k_2$  равны нулю. В этом случае оболочка превращается в плоскую пластинку [6].

Полагая  $k_1 = k_2 = 0$ , из (3.10) получим:

$$\begin{aligned}
C_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - E(K_{ik})w = -X, \\
C_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - F(K_{ik})w = -Y, \quad (4.1) \\
-E(K_{ik})u - F(K_{ik})v + L(D_{ik})w = Z.
\end{aligned}$$

Наряду с разрешающей системой (4.1) упрощаются также расчетные формулы внутренних усилий и напряжений.

Для тангенциальных сил получим:

$$\begin{aligned}
N_1 = & C_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - K_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - K_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\
N_2 = & C_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + C_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - K_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - K_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad (4.2) \\
S = & C_{66} \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + C_{66} \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - 2K_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}.
\end{aligned}$$

Для изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned}
M_1 = & D_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - K_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - K_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \\
M_2 = & D_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - K_{22} \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - K_{12} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad (4.3) \\
H = & -2D_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{66} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned}$$

Для напряжений в слоях оболочки:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^m &= B_{11}^m \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \gamma \left( B_{11}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \\ \sigma_{\beta}^m &= B_{22}^m \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \gamma \left( B_{22}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - 2\gamma B_{66}^m \frac{1}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Если полагать, что на пластинку действует лишь нормально приложенная нагрузка  $Z$  ( $X = Y = 0$ ), то из (3.24) легко получить совместные разрешающие уравнения смешанной задачи многослойной ортотропной пластинки:

$$\begin{aligned}L_2(C_{ik})\varphi + L_3(K_{ik}C_{ik})w &= 0, \\ L(D_{ik} - D_{ik}^*)w - L_3(K_{ik}C_{ik})\varphi &= Z.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Расчетные формулы этого случая остаются без изменения, а именно: тангенциальные силы определяются формулами (3.18), моменты — формулами (3.25) — (3.27), напряжения в слоях пластинки — формулами (3.28) — (3.30).

Как и в случае пологих оболочек система (4.5) может быть приведена к эквивалентному ей одному уравнению восьмого порядка.

Полагая:

$$w = L_2(C_{ik})\Phi, \quad \varphi = -L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi, \quad (4.6)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению системы (4.5), а из второго уравнения получим искомое разрешающее уравнение восьмого порядка:

$$L_0(P_{ik})\Phi = Z, \quad (4.7)$$

где приняты предыдущие обозначения (3.33) и (3.36).

В этом случае для расчетных величин получим:  
для тангенциальных сил

$$\begin{aligned}N_1 &= -L_3(K_{ik}C_{ik}) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}, \\ N_2 &= -L_3(K_{ik}C_{ik}) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}, \\ S &= L_3(K_{ik}C_{ik}) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta},\end{aligned}\quad (4.8)$$

для моментов

$$\begin{aligned}M_1 &= \left[ (D_{11} - D_{11}^*) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] L_2(C_{ik})\Phi - \\ &- \left[ \frac{K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi, \\ M_2 &= \left[ (D_{22} - D_{22}^*) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (D_{12} - D_{12}^*) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] L_2(C_{ik})\Phi - \\ &- \left[ \frac{K_{12}C_{12} - K_{21}C_{11}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{22}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}}{\Omega} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi, \\
 H = & -2(D_{66} - D_{66}^0) \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_2(C_{ik})\Phi + \\
 & + \frac{K_{66}}{C_{66}} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_3(K_{ik}C_{ik})\Phi.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогичным образом из (3.40) — (3.42) определяются напряжения в слоях пластинки.

Рассматривая вышеприведенные уравнения и расчетные формулы замечаем, что они принципиально отличаются от соответствующих уравнений и формул теории однородных или симметрично собранных ортотропных пластин [5].

Это отличие заключается в том, что в случае многослойной пластинки, составленной из произвольного числа слоев, функция напряжений  $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$  и функция перемещений  $w = w(\alpha, \beta)$ , в общем случае определяются путем интегрирования совместных дифференциальных уравнений.

В заключение, для иллюстрации, рассмотрим один численный пример. Квадратная ( $a = b$ ) двухслойная пластинка свободно оперта по всему контуру и несет равномерно распределенную нагрузку  $q$ . Общая толщина пластинки  $\delta_2 = 6,0$  см, толщина нижнего слоя  $\delta_1 = 2,0$  см, верхнего слоя —  $(\delta_2 - \delta_1) = 4,0$  см (фиг. 2). Модуль упругости материала верхнего слоя  $E^{(1)} = E$ , нижнего слоя —  $E^{(2)} = mE$ .

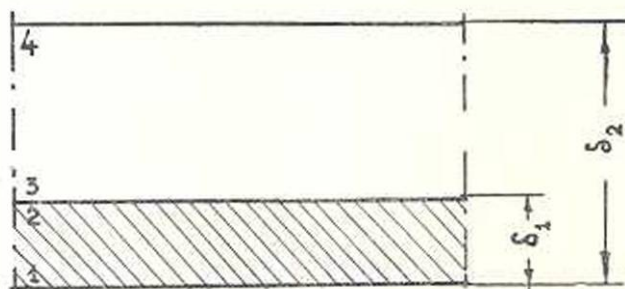


Рис. 2.

Коэффициенты Пуассона:  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 0$ .

Определим необходимые постоянные пластинки. Из (1.2) для  $B_{ik}^{(j)}$  получим:

$$\begin{aligned}
 B_{11}^{(1)} = mE, \quad B_{22}^{(1)} = mE, \quad B_{12}^{(1)} = 0, \quad B_{66}^{(1)} = 0,5mE, \\
 B_{11}^{(2)} = E, \quad B_{22}^{(2)} = E, \quad B_{12}^{(2)} = 0, \quad B_{66}^{(2)} = 0,5E.
 \end{aligned}$$

Из (1.7), (1.8) и (1.9) для жесткостей получим:

$$C_{11} = C_{22} = 2E(m + 2), \quad C_{66} = E(m + 2), \quad C_{12} = 0,$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{8}{3} E(m+26), \quad D_{66} = \frac{4}{3} (m+26), \quad D_{12} = 0,$$

$$K_{11} = K_{22} = 2E(m+8), \quad K_{66} = E(m+8), \quad K_{12} = 0.$$

На основании (1.8) и (2.20) для  $(D_{ik} - D_{ik}^0)$  получим:

$$(D_{11} - D_{11}^0) = (D_{22} - D_{22}^0) = \frac{2}{3} \frac{m^2 + 64m + 16}{m+2} E,$$

$$(D_{12} - D_{12}^0) = 0, \quad (D_{66} - D_{66}^0) = \frac{1}{3} \frac{m^2 + 64m + 16}{m+2} E.$$

Наконец, из (3.36) для  $P_i$  получим:

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{3} \frac{m^2 + 64m + 16}{(m+2)^2}, \quad P_3 = P_4 = \frac{4}{3} \frac{m^2 + 64m + 16}{(m+2)^2},$$

$$P_5 = 2 \frac{m^2 + 64m + 16}{(m+2)^2}.$$

Задачу решаем методом двойных тригонометрических рядов [3, 5, 6, 12].

В соответствии с граничными условиями свободного опирания [5, 6] функция  $\Phi$  может быть представлена в виде:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin \frac{i\pi\alpha}{a} \cdot \sin \frac{k\pi\beta}{a},$$

где  $i$  и  $k$  — целые числа,  $A_{ik}$  — постоянные.

Аналогичным образом разлагаем в тригонометрический ряд внешнюю равномерно распределенную нагрузку:

$$Z = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ik} \sin \frac{i\pi\alpha}{a} \sin \frac{k\pi\beta}{a}.$$

Подставляя значения  $\Phi(\alpha, \beta)$  и  $Z$  в разрешающее уравнение (4.7), после некоторых преобразований для прогибов получим:

$$w = - \frac{24a^4(m+2)q}{\pi^6 E(m^2 + 64m + 16)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi\alpha}{a} \cdot \sin \frac{k\pi\beta}{a}}{ik(i^2 + k^2)^2}.$$

Аналогично, для нормальных напряжений в слоях получим:

$$\sigma_{\alpha}^{(1,2)} = B_{11}^{(1,2)} \left( \frac{m+8}{m+2} - \gamma \right) \frac{24a^2(m+2)q}{\pi^4 E(m^2 + 64m + 16)} \sum_{i,k} \frac{i \sin \frac{i\pi\alpha}{a} \sin \frac{k\pi\beta}{a}}{k(i^2 + k^2)^2},$$

$$\sigma_{\beta}^{(1,2)} = B_{22}^{(1,2)} \left( \frac{m+8}{m+2} - \gamma \right) \frac{24a^2(m+2)q}{\pi^4 E(m^2 + 64m + 16)} \sum_{i,k} \frac{k \sin \frac{i\pi\alpha}{a} \sin \frac{k\pi\beta}{a}}{i(i^2 + k^2)^2}.$$

В частных случаях, когда  $m=1$ ,  $m=2$ ,  $m=10$ ,  $m=20$ , для прогиба центра пластинки получим:

$$w = -\lambda_m \frac{a^4}{\pi^2 E} q,$$

где  $\lambda_m$  в каждом частном случае имеет следующие значения:

| m           | 1,0    | 2,0    | 10,0   | 20,0   |
|-------------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_m$ | 0,2165 | 0,1580 | 0,1069 | 0,0758 |

В рассмотренных частных случаях для нормальных напряжений по линии  $\alpha = \frac{a}{2}$ ,  $\beta = \frac{a}{2}$  получим:

$$\sigma_{\alpha}^{11} = \sigma_{\beta}^{22} = \lambda_{1m} \frac{a^2}{\pi^4} q, \quad \sigma_{\alpha}^{22} = \sigma_{\beta}^{11} = \lambda_{2m} \frac{a^2}{\pi^4} q,$$

где для  $\lambda_{1m}$  и  $\lambda_{2m}$  в различных точках линии  $\alpha = \frac{a}{2}$ ,  $\beta = \frac{a}{2}$  (фиг. 2), имеем следующие численные значения:

| Коэфф.         | точки | m=1,0   | m=2,0   | m=10,0  | m=20,0  |
|----------------|-------|---------|---------|---------|---------|
| $\lambda_{1m}$ | 1     | 0,5862  | 0,7130  | 1,4475  | 1,7415  |
|                | 2     | 0,1954  | 0,1426  | -0,4825 | -0,9945 |
| $\lambda_{2m}$ | 3     | 0,1954  | 0,0713  | -0,0483 | -0,0497 |
|                | 4     | -0,5862 | -0,4991 | -0,4343 | -0,3233 |

Приведенный пример<sup>1</sup> показывает, что в этом случае система разрешающих уравнений (4.5) распадается на два независимых [5, 6]

Институт строительных материалов  
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 20 IV 1953

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович А. Л. Труды Мин. авиационной промыш. СССР, № 675, 1948.
2. Ерохин И. П. Труды Ленинградского института пром. строительства, в. 5, 1938.
3. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. IV, № 5, 1951.
4. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
6. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

<sup>1</sup> Приведенный численный пример выполнен А. В. Петросяном.



7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
8. Гольденвейзер А. Л. Сб. Пластинки и оболочки. Гостройиздат, 1939.
9. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
10. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. IV, № 6, 1951.
11. Работнов Ю. Н. ДАН СССР, Нов. серия, т. XLVII, № 4, 1945.
12. Амбарцумян С. А. ПММ, т. XI, в. 5, 1947.

# Ս. Ս. Համբարձումյան

## ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են կամայական թվով շերտերից կազմված նըր-  
բադատ օրտոտրոպ թաղանթների հաշվարկման հիմնական հավասարում-  
ները և բանաձևերը:

Որպես մասնավոր դեպքեր դիտված են պտտման և փոքր կորություն  
ունեցող թաղանթներ և բազմաշերտ հարկի սալեր:

Իլյուստրացիայի համար բերված է մեկ թվային օրինակ: