

А. Л. Шагинян

Некоторые задачи теории наилучших приближений в пространстве

Вопросы теории наилучших приближений гармоническими полиномами исследованы весьма подробно в случае функций одного аргумента [1].

Имеются результаты и в случае приближений в плоских областях [2].

Вопросы наилучших приближений гармоническими полиномами в пространстве, насколько нам известно, не исследовались.

В настоящей статье рассматриваются некоторые задачи такого рода*.

В пункте 1 дается оценка смешанных производных гармонического полинома по заданному модуль-максимуму в области, граница которой есть поверхность с ограниченной кривизной.

В пункте 2 приводятся теоремы, аналогичные теоремам С. Н. Бернштейна и Валле-Пуссена, о свойствах приближаемой функции по заданной скорости убывания наилучшего приближения $E_n(f)$.

В пункте 3 доказывается прямая теорема теории приближений, — аналог известной теоремы Джексона.

Наконец, указывается одно следствие, связанное с дифференциальными свойствами пространственных гармонических функций.

Отмечается, что все полученные результаты остаются в силе и в случае плоских областей.

1. Пусть $H_n(P)$ — произвольный гармонический полином степени n . $M = \max |H_n(P)|$ на $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

На окружности любого большого круга полином $H_n(P)$ обращается в обычный тригонометрический полином степени n относительно центрального угла этой окружности.

Поэтому [3]

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial s} \right| \leq M n,$$

где ds — элемент дуги нормального сечения. В частности

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial \varphi} \right| \leq M n \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial H_n}{\partial \theta} \right| \leq M n,$$

* Здесь подробно излагается содержание заметки в ДАН СССР (т. XC, стр. 141—144, 1952).

где θ и φ — полярные углы, и вообще

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial \varphi^p} \right| \leq M n^p, \quad \left| \frac{\partial^p H_n}{\partial \theta^p} \right| \leq M n^p. \quad (1)$$

Оценим теперь производные полинома $H_n(P)$ по нормали. Представим $H_n(P)$ в виде:

$$H_n(P) = Y_0 + Y_1 r + \dots + Y_n r^n, \quad (2)$$

где $\{Y_n\}$ — сферические функции Лапласа.

$$\frac{\partial H_n(P)}{\partial r} = Y_1 + 2rY_2 + \dots + nr^{n-1}Y_n,$$

а на единичной сфере

$$\left. \frac{\partial H_n(P)}{\partial r} \right|_{r=1} = Y_1 + 2Y_2 + \dots + nY_n, \quad H_n(P)|_{r=1} = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n.$$

Обозначим отрезки последней суммы через $\{s_k\}$.

$$s_k = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_n}{\partial r} \right|_{r=1} &= s_1 - s_0 + 2(s_2 - s_1) + \dots + n(s_n - s_{n-1}) = ns_n - \\ &- (s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}) = n \left(s_n - \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Но доказано [4], что если $f(P)$ произвольная суммируемая функция, заданная на единичной сфере и $|f(P)| \leq M$, то средние первого порядка отрезков ряда Лапласа этой функции ограничены неравенством

$$\left| \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \right| \leq cM, \quad (3')$$

где c — постоянная, независимая от n (Гронвальд).

В случае гармонических полиномов на плоскости неравенство (3') заменяется неравенством

$$\left| \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \right| \leq M.$$

(см. [5]).

Применяя неравенство (3') к $H_n(P)$, получим из (3):

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial r} \right| \leq cMn, \quad (4)$$

где c — постоянное число, не зависящее от n и полинома H_n .

$\frac{\partial H_n}{\partial r}$ не является гармонической функцией, поэтому, возможно, неравенство (4) имеет место лишь на поверхности сферы. Но так как $r \frac{\partial H_n}{\partial r}$ гармоническая функция*, то внутри сферы будем иметь:

$$\left| r \frac{\partial H_n}{\partial r} \right| \leq c M n. \quad (4)$$

Для оценки второй производной $\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2}$ можно пользоваться уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial \varphi^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_n}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial H_n}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5)$$

Все производные, фигурирующие в этом равенстве, уже оценены, кроме $\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2}$, которую можно оценить направив предварительно координатную систему так, чтобы в точке, где производится оценка, было $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Получаем

$$\left| \frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} \right| \leq c M n^2,$$

где c — новая постоянная, не зависящая от H_n и n . Из этого неравенства и из гармоничности $r^2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2}$ следует

$$\left| r^2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} \right| \leq c M n^2$$

в замкнутой сфере.

Таким образом, находим, что если $H_n(P)$ — гармонический полином степени n , удовлетворяющий на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ условию

$$|H_n(P)| \leq M,$$

то на этой же сфере

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial s^p} \right| \leq M n^p, \quad (6)$$

где ∂s — элемент дуги нормального сечения, и

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial r^p} \right|_{r=1} \leq c M n^p, \quad (7)$$

* Если $Q(r, \theta, \varphi)$ гармоническая, то и $r^p \frac{\partial^p Q}{\partial r^p}$ будет гармонической функцией.

где c — постоянная, зависящая, возможно, лишь от p . Внутри сферы, вместо (7), будем иметь неравенство

$$\left| r^p \frac{\partial^p H_n}{\partial r^p} \right| \leq c M_n p. \quad (8)$$

Неравенства (6) и (7) дают возможность оценить производные полинома и по любым направлениям.

Оценим сначала $\frac{\partial H_n}{\partial x}$, $\frac{\partial H_n}{\partial y}$ и $\frac{\partial H_n}{\partial z}$.

Допустим, нужно оценить $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ в произвольной точке A сферы. Проведем через A и ось ox плоскость. Тогда

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = \frac{\partial H_n}{\partial r} \cos(r, ox) + \frac{\partial H_n}{\partial s} \cos(\bar{s}, ox),$$

где ds — элемент дуги окружности этого сечения, а $\bar{s}$ — направление касательной к ней в точке A . Из этого равенства следует:

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial x} \right| \leq c M_n.$$

Точно так же получаем

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial y} \right| \leq c M_n, \quad \left| \frac{\partial H_n}{\partial z} \right| \leq c M_n.$$

Из принципа максимума гармонических функций следует выполнение этих неравенств и внутри сферы.

Таким же путем оцениваем смешанные производные любого

порядка $\frac{\partial^p H_n}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2} \partial z^{p_3}}$ ($p = p_1 + p_2 + p_3$), $p = 1, 2, \dots$

Получим

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2} \partial z^{p_3}} \right| \leq c M_n p$$

А так как произвольная смешанная производная $\frac{\partial^p H_n}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_p}$ по направлениям $l_1, l_2, \dots, l_p$ внутри сферы, выражается линейным образом через производные $\frac{\partial^k H_n}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 \leq p$

посредством ограниченных коэффициентов, зависящих от углов между направлениями $l_1, l_2, \dots, l_p$ и координатными осями, то приходим к теореме:

Если H_n — гармонический полином степени n и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$|H_n(x, y, z)| \leq M,$$

то в любой точке $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_p} \right| \leq c M n^p, \quad (9)$$

где $l_1, l_2, \dots, l_p$ — произвольные направления в данной точке, а c — постоянная, зависящая лишь от p .

Неравенство (9) может быть установлено и для произвольных поверхностей, при условии их достаточной гладкости.

Пусть R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных сечений данной поверхности в произвольной ее точке. Тогда из предыдущих неравенств вытекает, что

Если поверхность имеет непрерывно вращающуюся касательную плоскость и

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \leq \text{const.},$$

то из условия $|H_n(P)| \leq M$ на S , вытекает

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial l} \right| \leq c M n,$$

где l — произвольное направление в рассматриваемой точке поверхности, c — постоянная, зависящая от $\min(R_1, R_2)$.

Для доказательства достаточно провести через каждую точку поверхности касательную к ней сферу, лежащую внутри поверхности, и применить внутри этой сферы полученные ранее оценки. А для точек внутри какой-либо сферы, целиком лежащей в области, ограниченной данной поверхностью, полученные ранее неравенства также остаются в силе.

Таким образом, для указанного типа областей остается в силе неравенство (9). Постоянная c будет зависеть лишь от p и от конфигурации.

Формулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. Если в области, ограниченной гладкой поверхностью с ограниченной кривизной, гармонический полином $|H_n(P)|$ степени n удовлетворяет условию $|H_n(P)| \leq M$, то в любой точке замкнутой области

$$\left| \frac{\partial^p H_n}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_p} \right| \leq c M n^p. \quad (10)$$

Замечание. Все вышесказанное остается в силе и для плоских областей. В этом случае, при доказательстве предыдущих оценок, вместо неравенства (3') Гронвалля надо применить известное неравенство Л. Фейера о средних арифметических отрезков тригонометрических полиномов. По Фейеру (3') заменится неравенством

$$\left| \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \right| < M.$$

2. Применим полученные неравенства к задачам о наилучших приближениях в пространственных областях, ограниченных гладкими поверхностями ограниченной кривизны.

Докажем следующую теорему:

Теорема 2. Если $f(P)$ — произвольная непрерывная функция на гладкой замкнутой поверхности S , имеющей ограниченную кривизну, и наилучшее приближение $f(P)$ гармоническими полиномами степени n удовлетворяет условию

$$E_n(f) < \frac{\Omega(n)}{n^p}, \quad (11)$$

где p — целое число, а $\Omega(n)$ — невозрастающая, начиная с некоторого n ,

и $\Omega(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $\int \frac{\Omega(x)}{x} dx < +\infty$, то $f(P)$ является граничным значением непрерывной в замкнутой области и регулярной внутри функции $F(P)$, допускающей в замкнутой области производную $\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \dots \partial l_p}$ с модулем непрерывности

$$\omega(\delta) \leq h \left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx \right], \quad (12)$$

где a и h — постоянные, не зависящие от δ .

Доказательство основано на использовании неравенства (10), а в остальном не отличается от аналогичного доказательства Валле-Пуссена, изложенного в его лекциях [6]. Для удобства читателя приведем это доказательство.

Обозначим приближение порядка n нашей функции $f(P)$ через $Q_n(P)$. Пусть $a > 1$ — некоторое целое число. Из (11) следует, что на границе нашей области

$$f(P) = F(P) = Q_a + (Q_a - Q_{a^2}) + \dots \quad (13)$$

Для краткости обозначим:

$$\varphi_k = Q_{a^k} - Q_{a^{k+1}}.$$

Пусть R_a — остаток ряда (13):

$$R_a = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k. \quad (13)$$

Так как φ_k — полином степени a^{k+1} , то в силу (11)

$$|\varphi_k| \leq 2 \frac{\Omega(a^k)}{a^{kp}}.$$

Применяя неравенство (10), получим:

$$\left| \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} \right| \leq 2c \frac{\Omega(a^k)}{a^{kp}} a^{k(k+1)} = 2c \Omega(a^k) a^p.$$

$$\text{и } \left| \frac{\partial^{p+1} \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_{p+1}} \right| \leq 2c \frac{\Omega(a^k)}{a^{kp}} a^{(k+1)(p+1)} = 2c \Omega(a^k) a^{k+1} a^p.$$

Покажем, что из первого неравенства следует существование и непрерывность производной

$$\frac{\partial^p R_{a^2}}{\partial l_1 \dots \partial l_p} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} \quad (14)$$

в замкнутой области. Для этого представляем последнюю сумму в виде:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} = \sum_{k=2}^{\mu} \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p},$$

где μ — пока произвольное.

Вторая сумма мажорируется рядом

$$\begin{aligned} 2a^p \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Omega(a^k) &= 2a^{p+1} \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k) a^{k-1} (a-1)}{a^k (a-1)} = \\ &= \frac{2a^{p+1}}{a-1} \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} (a^k - a^{k-1}) < \frac{2a^{p+1}}{a-1} \int_{a^{\mu}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (14), а следовательно и справедливость равенства (14).

Для оценки модуля непрерывности $\omega(\delta)$ производной

$$\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \dots \partial l_p}, \text{ обозначим через}$$

$$\Delta \frac{\partial^p R_{a^2}}{\partial l_1 \dots \partial l_p} \quad \text{и} \quad \Delta \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p}$$

приращения указанных функций при произвольном смещении точки P на расстояние $< \delta$ по какому-либо направлению l_{p+1} .

Имеем:

$$\Delta \frac{\partial^p R_{a^2}}{\partial l_1 \dots \partial l_p} = \sum_{k=2}^{\mu} \Delta \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Delta \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p}.$$

Применяя теорему о конечном приращении к первой сумме, получим:

$$\omega(\delta) \leq \delta \sum_{k=2}^{\mu} \max \left| \frac{\partial^{p+1} \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} \right| + 2 \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \max \left| \frac{\partial^p \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_p} \right|.$$

Для второй суммы мы имеем мажоранту, а для первой получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\mu} \max \left| \frac{\partial^{p+1} \varphi_k}{\partial l_1 \dots \partial l_{p+1}} \right| &< 2a^{p+2} \sum_{k=2}^{\mu} \Omega(a^k) a^{k-1} < \\ &< \frac{2a^{p+2}}{a-1} \sum_{k=2}^{\mu} \Omega(a^k) (a^k - a^{k-1}) < \frac{2a^{p+2}}{a-1} \int_a^{a^{\mu}} \Omega(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\omega(\delta) \leq \delta \frac{2a^{p+2}}{a-1} \int_a^{a^{\mu}} \Omega(x) dx + \frac{2a^{p+1}}{a-1} \int_{a^{\mu}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx.$$

Подбирая μ так, чтобы $a^{\mu-1} \leq \frac{1}{\delta} < a^{\mu}$, получим:

$$\omega(\delta) \leq h \left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx \right],$$

т. е. неравенство (12).

Нетрудно видеть, что и все остальные результаты, приведенные в IV главе лекций Валле-Пуссена, имеют место и в нашем случае.

Поэтому приведем лишь формулировки этих результатов, отсылая за доказательствами к указанной монографии.

3. Если в дополнение к условиям предыдущей теоремы, существует постоянное $\alpha < 1$ такое, что $x^{\alpha} \Omega(x)$ не убывает, начиная с некоторого x , то $\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \dots \partial l_p}$ имеет модуль непрерывности

$$\omega(\delta) \leq h' \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx,$$

где h' — постоянное относительно δ .

4. Если для функции $f(P)$.

$$E_n(f) < \frac{c}{n^{p+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

то $i(P)$ является граничным значением регулярной внутри и непрерывной в замкнутой области функции $F(P)$, допускающей непрерывную в замкнутой области производную $\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_p}$, удовлетворяющую условию α -Липшица.

$$5. \text{ Если } E_n(f) < \frac{c}{n^p (\lg n)^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

то $\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \dots \partial l_p}$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, удовлетворяющий условию

$$\omega(\delta) < \frac{\text{const}}{\left(\lg \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}}.$$

$$6. \text{ Если } E_n(f) < \frac{c}{n^{p+1}}.$$

то $\omega(\delta) < h \delta |\lg \delta|$, h — постоянное.

7. Наряду с предыдущими результатами, где по порядку убывания наилучшего приближения определялись дифференциальные свойства функции, представляют интерес и обратные теоремы.

Приведем такую теорему для случая шара.

Теорема 3. Если $F(P)$ — гармоническая внутри шара функция и производная $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$ непрерывна в замкнутой области, а $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности, то в $\bar{D}$

$$E_n(f) < c \left(\frac{\lg n}{n}\right)^p \omega\left(\frac{\lg n}{n}\right). \quad (15)$$

Доказательство по существу не отличается от аналогичных доказательств известных в теории приближений.

Рассмотрим гармоническую в единичной сфере функцию

$$r^p \frac{\partial^p F}{\partial r^p} = \Phi_p(r, \theta, \varphi).$$

Составим функцию

$$\Phi_p(hr, \theta, \varphi), \quad 0 < h < 1$$

разложим ее в ряд Лапласа внутри единичной сферы и возьмем сумму S_n первых n членов этого разложения.

$$S_n = Y_0 + Y_1 h + \dots + Y_n h^n,$$

где

$$Y_k = -\frac{2k+1}{4\pi} \iint \Phi_p(1, \theta, \varphi) P_k(\cos \gamma) d\sigma,$$

а $P_k(\cos \gamma)$ k -ый полином Лежандра.

Тогда, очевидно

$$|\Phi_p(h, \theta, \varphi) - S_n| < c M \frac{h^n}{(1-h)^2}.$$

С другой стороны, по построению $\Phi_p(rh, \theta, \varphi)$

$$|\Phi_p(h, \theta, \varphi) - \Phi_p(1, \theta, \varphi)| < \omega(1-h).$$

Беря $1-h = \frac{\lg n}{n}$, и учитывая, что $\omega(\alpha\delta) \leq (1+\alpha)\omega(\delta)$, а

с другой стороны $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ ограничена снизу, иначе функция $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$ была бы постоянной, получаем:

$$\left| \frac{\partial^p F}{\partial r^p} - S_n \right|_{r=1} < c \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right).$$

Обозначим через $S_n^{(1)}$ гармонический полином

$$S_n^{(1)} = Y_1 + Y_1 \frac{r}{1} + Y_2 \frac{r^2}{2} + \dots + Y_n \frac{r^n}{n}.$$

Тогда предыдущее неравенство перепишется в виде

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^{p-1} F}{\partial r^{p-1}} - S_n^{(1)}(r, \theta, \varphi) \right) \right|_{r=1} < c \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right).$$

Отсюда следует, что функция

$$\frac{\partial^{p-1} F}{\partial r^{p-1}} - S_n^{(1)}(r, \theta, \varphi)$$

удовлетворяет у границы условию Липшица с постоянным $c \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right)$. Поэтому, рассматривая гармоническую функцию

$$r^{p-1} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial r^{p-1}} - S_n^{(1)}(r, \theta, \varphi)$$

мы находим, как и выше для $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$, некоторый гармонический полином $S_n^{(2)}(r, \theta, \varphi)$ такой, что на сфере

$$\left| \frac{\partial^{p-1} F}{\partial r^{p-1}} - (S_n^{(1)} + S_n^{(2)}) \right| < c \frac{\lg n}{n} \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right), \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем гармонические полиномы степени p

$$S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \dots, S_n^{(p)}$$

такие, что на единичной сфере

$$\left| F(P) - \sum_{k=1}^p S_n^{(k)}(1, \theta, \varphi) \right|_{n=1} < c \left(\frac{\lg n}{n} \right)^p \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right).$$

По принципу максимума получим и внутри шара

$$\left| F(P) - \sum_{k=1}^p S_n^{(k)}(r, \theta, \varphi) \right| < c \left(\frac{\lg n}{n} \right)^p \omega \left(\frac{\lg n}{n} \right).$$

Отсюда следует неравенство (15).

Последние две теоремы являются аналогами теорем С. Н. Бернштейна и Джэксона в теории наилучших приближений функций одного аргумента.

Отметим одно следствие из предыдущих результатов, представляющее и самостоятельный интерес.

Теорема 4. Если $F(x, y, z)$ — гармоническая в шаре функция, имеющая непрерывную в замкнутой области производную $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и

$$\int_0^\infty \frac{(\lg x)^p \omega \left(\frac{\lg x}{x} \right)}{x} dx < +\infty,$$

то и всевозможные смешанные производные порядка p будут непрерывны в замкнутой области. В этом случае можно оценить также модуль непрерывности $\omega^*(\delta)$ производной $\frac{\partial^p F}{\partial l_1 \dots \partial l_p}$.

В частности, если $\omega(\delta) < \delta^\alpha$, $\alpha > 0$.

$$\text{то} \quad \omega^*(\delta) < c \delta^\alpha \left(\lg \frac{1}{\delta} \right)^{p+\alpha}.$$

Если же предыдущий интеграл расходится, то можем утверждать лишь непрерывность производных до порядка $p-1$ включительно.

Для доказательства достаточно применить последовательно теоремы 3 и 2.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 III 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и прил. функций. ОНТИ—ГТТИ М.—Л., 1934.
2. Элиот Маргарет. Trans. Am. M. S. 71, 1, 1951, стр. 1—23.
3. Бернштейн С. Н. Собр. соч., т. 1, стр. 151—156. Изд. АН СССР, 1952.
4. Гронвалл. Math. Ann., т. 74, 1913, стр. 213—270.
5. Фейер Л. Math. Ann., т. 58, стр. 51—69, 1904.
6. Вальде-Пуассен. Lecons sur l'approximation etc., 53—62, Paris, Gauthier-Villars, 1919.

Ա. Լ. Շախիմյան

ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեկ անկախ փոփոխականից կախված սովորական բազմանդամների, ինչպես և եռանկյունաչափական բազմանդամների ածանցյալների համար հայտնի են Մարկով եղբայրների ստացած

$$|H'(x)| \leq M_n, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

անհավասարությունը, որտեղ $H_n(x)$ -ը տվյալ եռանկյունաչափական բազմանդամն է,

$$M = \max |H_n(x)|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

իսկ n -ը բազմանդամի կարգն է:

Նախորդ անհավասարությունը հեռանք է Մարկովի ստացած մի այլ անհավասարություն: Այդ բանը նկատել է Ս. Ն. Բերնշտեյնը:

Բնականաբար, նախորդ անհավասարությունից հետևում է նաև, որ

$$|H_n^{(p)}(x)| \leq M_n^p$$

որտեղ p -ը ընտրված համար:

Այնուհետև հայտնի է, թե ի՞նչ դեր է կատարում այդ անհավասարությունը մեկ փոփոխականից կախված ֆունկցիաների լավագույն մոտափորությունները ուսումնասիրելիս:

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է՝

1) եթե $H_n(P)$ n աստիճանի հարմոնիկ բազմանդամ է և միավոր չափով զնդի մեջ տեղի ունի

$$|H_n(P)| \leq M$$

անհավասարությունը, ապա այդ նույն փակ տիրույթում տեղի կունենա (9) անհավասարությունը, որտեղ C -ն մի որոշակի հաստատուն է, կախված թերևս p -ից, $l_1, l_2, \dots, l_p$ — կամայական ուղղություններ են:

2) (9) անհավասարությունը ճիշտ է նաև սահմանափակ կորություն ունեցող մակերևույթների համար:

Այնուհետև ապացուցվում են Բերնշտեյնի և Ջեքսոնի տիպի թեորեմներ ապրամություն մեջ:

Որպես այդ արդյունքների հետևանք ստացվում է հետևյալ թեորեմը, որը ներկայացնում է նաև ինքնուրույն հետաքրքրություն:

Թեոթեմ՝ եթե $F(x, y, z)$ հարմոնիկ է միավոր շառավղով գնդի մեջ և ըստ շառավղի վերցված p կարգի $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$ ածանցյալի հետ մեկտեղ անընդհատ է փակ տիրույթում, և $\frac{\partial^p F}{\partial r^p}$ ֆունկցիայի անընդհատության $\omega(\delta)$ մոդուլը բավարարում է

$$\int_0^\infty \frac{\lg x \cdot \omega\left(\frac{\lg x}{x}\right)}{x} dx < \infty \quad (*)$$

պայմանին, ապա կարելի է պնդել, որ կամայական $l_1, l_2, \dots, l_p$ ուղղություններով վերցված ածանցյալը ևս անընդհատ կլինի փակ տիրույթում, իսկ նրա անընդհատության մոդուլը $\omega^*(\delta)$ կարելի է արտահայտել $\omega(\delta)$ միջոցով:

Մասնավորապես, եթե $\omega(\delta) < \delta^z$, $z > 0$, ապա

$$\omega^*(\delta) < c \cdot \delta^z |\lg \delta|^{p-z}$$

Իսկ եթե $(*)$ պայմանը չի բավարարվում, ապա կարելի է պնդել միայն $d-1$ կարգի խառը ածանցյալների անընդհատությունը փակ տիրույթում: