

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Аракелян

### Расчет балок на сплошном грунтовом основании

1. *Интегро-дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.*  
Рассмотрим горизонтальный призматический упругий брус, опирающийся по всей длине на податливое водонасыщенное и однородное грунтовое основание.

Нагруженная балка деформирует грунтовое основание в каждой ее точке. Соответственно этому, в каждой точке балки действует реакция основания, интенсивность которой в общем случае меняется от точки к точке.

При определении интенсивности реакции грунтового основания будем отличать перемещение, вызванное мгновенным воздействием нагрузки, от перемещения, получаемого в результате продолжительного действия нагрузки.

В первом случае, как показали исследования Я. А. Мачерета [1] и В. А. Флорина [2], в самый момент приложения нагрузки, грунтовую массу (водонасыщенные глинистые грунты) можно рассматривать как линейно деформирующуюся среду с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,5$ .

Поэтому можно принять реакцию основания пропорциональной осадке основания в данной точке.

Будем рассматривать мгновенную осадку как упругую, и обозначим ее через  $\delta(x, 0)$ .

Механизм осадки основания при продолжительном действии нагрузки по разному был моделирован отдельными исследователями.

Т. Э. Проктор, принимая грунтовое основание как упругое тело, сводит решение задачи об изгибе балки к решению некоторого интегрального уравнения.

Связь балки с основанием Б. Н. Жемочкин [3] заменяет несколькими абсолютно жесткими стержнями, усилия в которых определяются методом сил; при этом усилия принимаются как реакции грунтового основания.

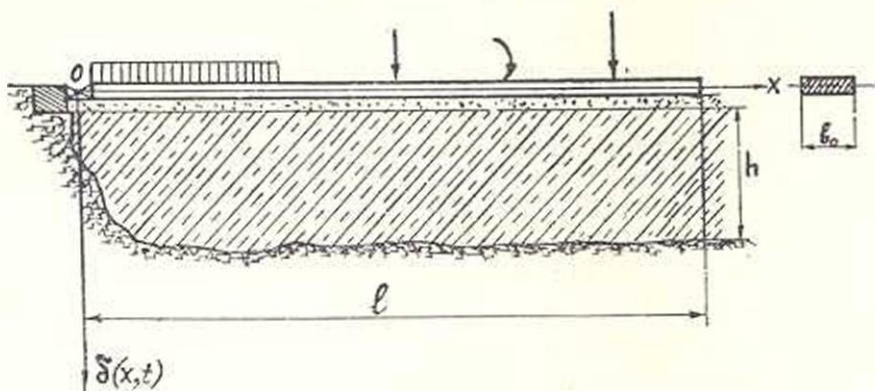
Расчетная схема грунтового основания М. М. Филоненко-Бородичем [4] представлена в виде ряда вертикальных пружин, которые поверху соединяются горизонтальной нерастяжимой нитью с постоянной натяженностью. При определении перемещения основания он исходит из дифференциального уравнения равновесия указанной нити.

В действительности же деформации водонасыщенных глинистых пород далеко не выражаются вышеприведенными расчетными схемами.

Деформации грунтового основания можно определить исходя из теории прямолинейной консолидации грунтовой массы, что и положено в основу нашей расчетной схемы для изгиба балок на грунтовом основании.

Положим, что внешние силы действуют в вертикальной плоскости симметрии сечения балки и, что реакции основания возникают также при отрицательных перемещениях балки. Силами трения или сцеплением между основанием и балкой пренебрегаем ввиду их незначительности.

Расположение координатных осей, размеры балки, внешние силы и схема основания показаны на фиг. 1.



Фиг. 1.

При  $t > 0$  интенсивность реакции основания зависит от времени  $t$  и координаты  $x$ . Обозначим ее через  $q(x, t)$ .

Тогда перемещение произвольной точки поверхности грунта основания или оси балки в любой момент времени  $t$  определяется формулой [6]:

$$\delta(x, t) = \frac{\delta k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t q(x, \xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi + \delta(x, 0), \quad (1.1)$$

где  $k_0$ —коэффициент фильтрации грунта основания,  
 $b_0$ —ширина балки,  
 $\gamma$ —удельный вес фильтруемой воды,  
 $h$ —высота уплотняемого грунта основания,  
 $c$ —коэффициент консолидации грунта основания.

Для определения интенсивности реакции основания исходим из дифференциальной зависимости между перемещениями оси балки и интенсивностью сплошной нагрузки. Интенсивность внешней сплошной нагрузки и жесткость балки обозначим через  $q_0(x)$  и  $EI$ .

Тогда будем иметь:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\bar{z}(x, t)] = q_0(x) - q(x, t). \quad (1.2)$$

Исходя из (1.1) и (1.2) и заметив при этом, что

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\bar{z}(x, 0)] = q_0(x) - q(x, 0),$$

преобразуя найдем

$$q(x, t) = q(x, 0) - \frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} [q(x, \xi)] \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (1.3)$$

Таким образом, определение интенсивности реакции основания сводится к решению интегро-дифференциального уравнения типа (1.3). Под действием мгновенной нагрузки задача сводится к изгибу балки на упругом основании.

2. *Общий интеграл интегро-дифференциального уравнения (1.3).* Будем искать решение уравнения (1.3) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая только от  $t$ :

$$q(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.1)$$

Внеся (2.1) в (1.3), получим:

$$X(x)T(t) = X(x)T(0) - \frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} X^{IV}(x) \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi.$$

Отделив переменные, будем иметь:

$$\frac{X(x)}{X^{IV}(x)} = \frac{\frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi}{T(0) - T(\xi)}. \quad (2.2)$$

Здесь левая часть зависит только от  $x$ , а правая — только от  $t$ . Очевидно, это возможно, когда левая и правая части уравнения (2.2) в отдельности равны одной и той же постоянной величине, которую обозначим через  $\frac{l^4}{\alpha^4}$ .

Тогда из (2.2) имеем:

$$X^{IV}(x) - \frac{\alpha^4}{l^4} X(x) = 0, \quad (2.3)$$

$$T(t) = T(0) - \frac{8EI k_0 \alpha^4}{\gamma h b_0 l^4} \int_0^t T(\xi) e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (2.4)$$

Соответственно бесконечным значениям параметра  $\alpha_i$  неизвестные функции  $X(x)$  и  $T(t)$  получают свои соответственные  $X_i(x)$  и  $T_i(t)$  значения, каждое из которых представляет собой частное решение уравнения (1.3). Взяв сумму бесконечного числа частных решений, получим общий интеграл (1.3) в виде:

$$q(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (1.5)$$

Отсюда при  $t = 0$ , т. е. для упруго-мгновенной задачи, имеем:

$$q(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(0).$$

Для упругого основания, как известно, принимается

$$q(x,0) = k\delta(x,0),$$

где  $k$  — так называемый мгновенный коэффициент постели грунтового основания.

Тогда из последних двух соотношений получим:

$$\delta(x,0) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(0). \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что условие для определения произвольных постоянных функции  $X_i(x)$  совпадает с теми граничными условиями функции  $\delta(x,0)$ , при которых значения последней или ее производных обращаются в нуль.

Таким образом, решение интегро-дифференциального уравнения (1.3) сводится к решению обыкновенного уравнения (2.3) и интегрального уравнения Вольтерра (2.4).

Общий интеграл линейного дифференциального уравнения (2.3), как известно, будет:

$$X(x) = c_1 \sin \frac{\alpha x}{l} + c_2 \cos \frac{\alpha x}{l} + c_3 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{l} + c_4 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{l}. \quad (2.6)$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — произвольные постоянные, а  $\alpha$  — некоторый параметр.

Для определения постоянных  $c_1, c_2, c_3, c_4$  и параметра  $\alpha$  следует использовать граничные условия балки в каждом случае. Эти условия зависят от способа крепления и нагрузок концов балки.

Например, в том случае, когда оба конца балки защемлены (заделаны) на жестких опорах, граничные условия выражаются отсутствием прогибов и поворотов сечений на опорах, т. е. имеем:

$$\begin{aligned} \delta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [\delta(0,t)] &= 0, \\ \delta(l,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [\delta(l,t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условием (2.7) должно удовлетворить уравнение (2.1) в любой момент времени. Поэтому

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [X(0)] = 0, \\ X(l) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [X(l)] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

На основании этих соотношений, из (2.6) находим:

$$\begin{aligned} c_2 + c_4 &= 0, \\ c_1 + c_3 &= 0, \\ c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha + c_3 \operatorname{sh} \alpha + c_4 \operatorname{ch} \alpha &= 0, \\ c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha + c_3 \operatorname{ch} \alpha + c_4 \operatorname{sh} \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решая эту систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных, получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_3 = 1, \\ c_2 &= -c_4 = \frac{\sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha}. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений (2.8), исключая произвольные постоянные  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$ , найдем

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha = 1.$$

Это трансцендентное уравнение и служит для определения значений параметра  $\alpha$ . Значения корней этого уравнения обозначим:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, \infty). \quad (2.10)$$

В соответствии с этими корнями будем иметь следующую систему фундаментальных функций

$$X_i(x) = c_{1i} \sin \frac{\alpha_i x}{l} + c_{2i} \cos \frac{\alpha_i x}{l} + c_{3i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_i x}{l} + c_{4i} \operatorname{ch} \frac{\alpha_i x}{l}. \quad (2.11)$$

При этом из (2.4) следует

$$T_i(t) = \frac{8EI k_0 \alpha_i^4}{\gamma h b_0 l^4} \int_0^1 T_i(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi + T_i(0). \quad (2.12)$$

Функции (1.11) и (2.12) являются решениями уравнения (1.3) при произвольных значениях постоянных  $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$  и  $\alpha_i$ . Сумма таких решений также будет решением уравнения (1.3). Поэтому, как уже было указано, общий интеграл уравнения (1.3) можно написать в виде:

$$q(x, t) = \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (2.13)$$

Покажем ортогональность функций (2.11) при различных комбинациях условий закрепления концов балки. Как известно, при этом должно иметь место соотношение:

$$\int_0^l X_i(x)X_j(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (2.14)$$

Функции  $X_i(x)$  и  $X_j(x)$  удовлетворяют уравнению (2.3), т. е.

$$X_k^{IV}(x) - \frac{z_k}{l^4} X_k(x) = 0. \quad (k = i, j).$$

Внося эти значения в интеграл (2.14), получим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{z_j^4}{l^4} - \frac{z_i^4}{l^4} \right) \int_0^l X_i(x)X_j(x)dx = \\ & = \int_0^l \left[ X_i(x) \cdot X_j^{IV}(x) - X_j(x)X_i^{IV}(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Интегрируя по частям первый член подынтегрального выражения, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[ X_i(x) - X_j^{IV}(x) - X_j(x)X_i^{IV}(x) \right] dx = & \left[ X_i(x)X_j'''(x) - X_i'(x)X_j''(x) + \right. \\ & \left. + X_i''(x)X_j(x) - X_i'''(x)X_j(x) \right]_0^l. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Как при вышеуказанном, так и при других возможных условиях закрепления концов балки, все члены правой части (2.16) обращаются в нуль.

Таким образом, фундаментальные функции (2.6), удовлетворяющие возможным граничным условиям, являются ортогональными.

При  $t=0$ , т. е. при мгновенном действии нагрузки, решение уравнения (1.3) должно совпасть с известным решением упруго-мгновенной задачи. Из этого следует, что значение функции

$$q(x, 0)$$

нам задано или может быть получено в результате упругого расчета. Согласно (2.6), имеем:

$$k\delta(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(0). \quad (2.17)$$

Умножая обе части этого равенства на  $X_i(x)$  и интегрируя в пределах от 0 до  $l$ , в силу соотношений (2.14), получим:

$$k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx = T_i(0) \int_0^l X_i^2(x) dx,$$

откуда

$$T_i(0) = \frac{k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx}{\int_0^l X_i^2(x) dx}. \quad (2.18)$$

Непосредственное вычисление интеграла, входящего в знаменатель (2.18), в некоторых случаях требует громоздких выкладок; в этих случаях, как известно [5], удобнее пользоваться следующей формулой:

$$\int_0^l X_i^2(x) dx = \frac{l}{4} \left\{ \left[ X_i(x) \right]^2 - 2X_i'''(x) + \left[ X_i''(x) \right]^2 \right\}_{x=0}^{x=l}. \quad (2.19)$$

Теперь соотношение (2.18) окончательно запишется в виде:

$$T_i(0) = \frac{k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx}{\frac{l}{4} \left\{ \left[ X_i(x) \right]^2 - 2X_i'''(x) + \left[ X_i''(x) \right]^2 \right\}_{x=0}^{x=l}}. \quad (2.20)$$

Таким образом, определяя величину  $T_i(0)$  и подставляя в (2.12), можно получить решение интегрального уравнения Вольтерра (2.12).

Обозначая постоянный коэффициент этого уравнения через

$$\beta_i = \frac{8EI k_0 \alpha_i^4}{\gamma h b_0 l^4}, \quad (2.21)$$

получим:

$$T_i(t) = T_i(0) + \beta_i \int_0^t T_i(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left( \frac{\pi}{h} \right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (2.22)$$

Как известно [6], решение этого интегрального уравнения Вольтерра есть:

$$T_i(t) = T_i(0) \left[ \frac{1}{1 + b_i} + 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left( 1 - \frac{b_i}{b_i + \cos^2 \lambda_{ni}} \right) e^{-\lambda_{ni}^2 \frac{4ct}{h^2}} \right], \quad (2.23)$$

$$\text{где} \quad b_i = \frac{\beta_i h^2}{8c}, \quad c = \frac{k_0(1 + \varepsilon)}{\gamma a}, \quad (2.24)$$

$\lambda_{ni}$  — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{\lambda}{b_1}.$$

Общий интеграл интегро-дифференциального уравнения (1.3) запишется в виде:

$$q(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \left[ c_{1j} \sin \frac{\alpha_j x}{l} + c_{2j} \cos \frac{\alpha_j x}{l} + c_{3j} \operatorname{sh} \frac{\alpha_j x}{l} + c_{4j} \operatorname{ch} \frac{\alpha_j x}{l} \right] \left[ \frac{1}{1+b_j} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{b_j}{b_j + \cos^2 \lambda_{nj}} \right) e^{-\lambda_{nj}^2 \frac{4ct}{h^2}} \right]. \quad (2.25)$$

Здесь произвольные постоянные определяются в соответствии с граничными условиями изгибаемой балки. При этом, как не трудно заметить, влияние внешней нагрузки выражается через функцию  $\bar{z}(x, 0)$ , входящую в соотношение (2.20).

3. *Определение произвольных постоянных.* Рассмотрим практически возможные граничные условия закрепления концов балки. Начало координат совместим с каким-либо концом балки так, чтобы абсциссы начала и конца балки были  $x=0$  и  $x=l$ , где  $l$  — длина балки.

I случай — балка на сплошном грунтовом основании с шарнирно закрепленными концами на жестких опорах. При этом перемещения в опорных сечениях и изгибающие моменты на опорах равны нулю, что накладывает на фундаментальную функцию следующие условия:

$$\begin{aligned} X_i(0) &= 0, & X_i''(0) &= 0, \\ X_i(l) &= 0, & X_i''(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Внеся эти условия в (2.5), найдем:

$$\begin{aligned} c_1 &\neq 0 \quad \text{примем} \quad c_1 = 1 \\ c_2 &= c_3 = c_4 = 0, \\ \sin \alpha_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Корни последнего уравнения будут

$$\alpha_i = i\pi, \quad (i = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.3)$$

В соответствии с (3.2) и (3.3) в этом случае фундаментальные функции будут:

$$\begin{aligned} X_i(l) &= \sin \frac{i\pi x}{l} \\ (i &= 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (3.4)$$

II случай — балка на сплошном грунтовом основании с защемленными концами на жестких опорах. Перемещения и поворот концевых сечений равняются нулю, что приводит к условиям

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0, & X_1'(0) &= 0, \\ X_1(l) &= 0, & X_1'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На основании этого находим:

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_2 = 1, \\ c_2 &= -c_1 = \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2i+1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1} \left( \cos \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \quad (3.7)$$

III случай—балка со сводными концами лежит на сплошном грунтовом основании; это означает отсутствие перерезывающей силы и изгибающего момента на концах балки. Фундаментальные функции должны удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} X_1'''(0) &= 0, & X_1''(0) &= 0, \\ X_1'''(l) &= 0, & X_1''(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу этого будем иметь:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 1, \\ c_2 &= c_1 = -\frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2i+1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1} \left( \cos \frac{\alpha_1 x}{l} + \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \quad (3.10)$$

IV случай—балка лежит на сплошном грунтовом основании; один конец шарнирно закреплен на жесткой опоре, а другой—защемлен также на жесткой опоре. Отсутствуют: перемещения и изгибающий момент на одной опоре, перемещения и поворот сечения—на другой. Эти граничные условия приводят к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0, & X_1''(0) &= 0, \\ X_1(l) &= 0, & X_1'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом для произвольных постоянных и параметра  $\alpha_1$  получаются следующие значения

$$c_1 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= c_1 = 0, \\
 c_3 &= -\frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1}, \\
 \alpha_1 &= \frac{4i-1}{4} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Фундаментальные функции будут:

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1} \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l}. \tag{3.13}$$

V случай—балка лежит на сплошном грунтовом основании с одним свободным и другим заземленным концами на жесткой опоре. Поместим начало координат на заземленном конце. Граничные условия для фундаментальной функции дают

$$\begin{aligned}
 X_1(0) &= 0, \quad X_1'(0) = 0, \\
 X_1''(l) &= 0, \quad X_1'''(l) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Для произвольных постоянных и параметра  $\alpha_1$ , получим:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -c_3 = 1, \\
 c_2 &= -c_4 = \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 - \sin \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \alpha_1}, \\
 \alpha_1 &= \frac{2i-1}{2} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Фундаментальные функции в этом случае будут:

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 - \sin \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \alpha_1} \left( \cos \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \tag{3.16}$$

VI случай—балка с одним свободным и другим шарнирно-закрепленным концом на жесткой опоре.

Поместим начало координат на шарнирном конце. Граничные условия приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}
 X_1(0) &= 0, \quad X_1''(0) = 0, \\
 X_1(l) &= 0, \quad X_1'(l) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Произвольные постоянные и параметр  $\alpha_1$  получаются

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 1, \quad c_3 = \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1}, \\
 c_2 &= c_4 = 0, \\
 \alpha_1 &= \frac{2i-1}{2} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

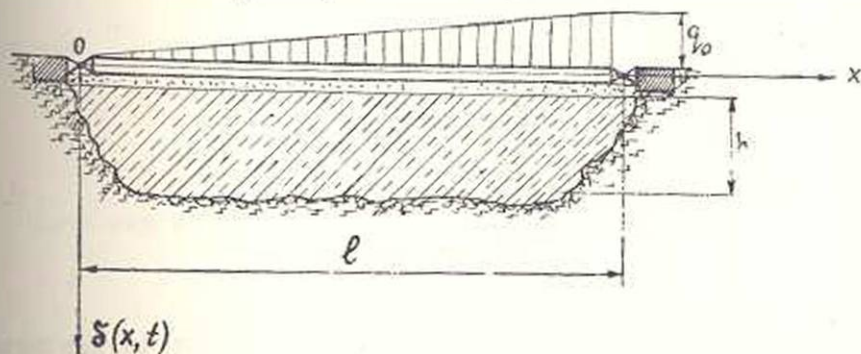
Фундаментальные функции будут

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} + \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1} \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l}. \quad (3.19)$$

Таким образом, в любом случае граничных условий для определения независимых произвольных постоянных получаем систему однородных уравнений. Приравнявая нулю детерминант этой системы получаем трансцендентное характеристическое уравнение для определения параметра  $\alpha_1$ , корнями которого в каждом случае определяются фундаментальные функции.

Примененные здесь фундаментальные функции поперечных колебаний балок впервые были использованы для расчета призматических оболочек произвольного очертания В. З. Власовым [7].

4. Шарнирно-опертая балка под действием треугольной нагрузки. Балка на сплошном грунтовом основании с шарнирно-закрепленными концами на жестких опорах нагружена сплошной треугольной нагрузкой (фиг. 2).



Фиг. 2.

Интенсивность нагрузки меняется линейно:

$$q = q_0 \frac{x}{l}. \quad (4.1)$$

В этом случае решение упруго-мгновенной задачи будет [8]

$$\delta(x, 0) = \frac{q_0}{k} \left[ \frac{x}{l} - \frac{V_1(\alpha_0 l) V_3(\alpha_0 x) - V_3(\alpha_0 l) V_1(\alpha_0 x)}{V_1^2(\alpha_0 l) - V_3^2(\alpha_0 l)} \right], \quad (4.2)$$

где  $k$  — коэффициент постели упругого основания при мгновенном действии нагрузки,  $V$  — функции Пузыревского, имеющие следующие значения

$$V_1(\alpha_0 l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right), \quad (4.3)$$

$$V_3(\alpha_0 l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l - \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right),$$

$$V_1(\alpha_0 x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \right), \quad (4.3)$$

$$V_2(\alpha_0 x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x - \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \right).$$

Здесь  $\alpha_0 = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ .

Внеся (4.3) в (4.2), после преобразований получим:

$$\delta(x, 0) = \frac{q_0}{k} \left[ \frac{x}{l} - \frac{2(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l \cdot \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \cdot \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x)}{\operatorname{sh} 2 \alpha_0 l \cdot \sin 2 \alpha_0 l} \right]. \quad (4.4)$$

Фундаментальные функции в этом случае будут (3.4):

$$X_1(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Согласно (2.17), для  $T_1(0)$  имеем:

$$T_1(0) = \frac{\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx}. \quad (4.5)$$

Вычислив входящие сюда интегралы, для знаменателя будем иметь:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{l}{i\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{i\pi x}{l} - \frac{1}{4} \sin 2 \frac{i\pi x}{l} \right]. \quad (4.6)$$

Для числителя получим:

$$\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{q_0}{k} \left[ \frac{x}{l} - \frac{2(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l \cdot \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \cdot \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x)}{\operatorname{sh} 2 \alpha_0 l \cdot \sin 2 \alpha_0 l} \right] \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Введем обозначения

$$I_0 = \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{l} dx,$$

$$I_1 = \int_0^l \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} (I_1 + I_2), \quad (4.7)$$

$$I_2 = \int_0^l \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx - \\ - \frac{1}{2} \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} (I_3 - I_4).$$

Находим:

$$\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{q_0}{k} \left\{ \frac{I_0}{l} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha_0 l \cdot \sin 2\alpha_0 l} \left[ (I_1 + I_2) \operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + (I_3 - I_4) \sin \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.8)$$

Далее имеем:

$$I_0 = \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \left[ -\frac{l}{i\pi} x \cos \frac{i\pi x}{l} + \right. \\ \left. + \frac{l}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{l} \right]_0^l = (-1)^i \frac{l^2}{i\pi}. \quad (4.9)$$

Заметив, что

$$\sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x - \cos \left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x \right], \quad (4.10)$$

получим:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x dx - \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x dx, \\ I_1 = \frac{1}{2} e^{\alpha_0 l} \left[ \frac{\left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) \sin \left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x + \alpha_0 \cos \left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right)}{\alpha_0^2 + \left( \alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right)^2} - \right.$$

$$I_1 = \frac{\left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) \sin \left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x + \alpha_0 \cos \left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right)}{\alpha_0^2 + \left( \alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right)^2} \Bigg|_0^l,$$

$$I_1 = \frac{i\pi}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 - i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]} \left\{ 2\alpha_0^2 + \right.$$

$$\left. + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left[ \left( 4\alpha_0^2 + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} - 4\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right) \sin \alpha_0 l - 4\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом получим:

$$I_2 = \frac{i\pi}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]} \left\{ -2\alpha_0^2 + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left[ \left( 4\alpha_0^2 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} - 4\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right) \sin \alpha_0 l + 4\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) находим:

$$I_1 + I_2 = \frac{2(-1)^l i\pi \left[ \left( 2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} - i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \sin \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \operatorname{ch} \alpha_0 l}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.13)$$

Зная, что

$$\sin \alpha_0 x \sin \frac{i\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \alpha_0 + i \frac{\pi}{l} \right) x - \sin \left( \alpha_0 - i \frac{\pi}{l} \right) x \right], \quad (4.14)$$

для двух остальных интегралов получим:

$$I_3 = \frac{i\pi \left[ i^2 \frac{\pi^3}{l^3} - (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left( 4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right) \right]}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}, \quad (4.15)$$

$$I_4 = \frac{i\pi \left[ i^2 \frac{\pi^3}{l^3} + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left( 4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right) \right]}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.16)$$

Откуда

$$I_2 - I_4 = \frac{(-1)^l i\pi \left[ 4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right] \operatorname{ch} \alpha_0 l}{l \left[ \left( 2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left( 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.17)$$

Внося (4.6), (4.9), (4.13) и (4.16) в (4.8) после некоторых преобразований окончательно получим:

$$T_1(0) = (-1)^i \pi q_0 \left\{ \frac{l^3}{8\alpha_0^4 l^4 + 2\pi^4 i^4} \left[ \left( \frac{2\alpha_0 i \pi}{l} + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} - 2\alpha_0^2 \right) \operatorname{cth} \alpha_0 l \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{ctg} \alpha_0 l - 2\alpha_0^2 \operatorname{cth} \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \right] - \frac{l}{\pi^2 i^2} \right\}. \quad (4.18)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае окончательное выражение интенсивности реакции основания, согласно (2.24), будет:

$$q(x,t) = \pi q_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left\{ \frac{l^3}{8\alpha_0^4 l^4 + 2\pi^4 i^4} \left[ \left( \frac{2\alpha_0 i \pi}{l} + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} - 2\alpha_0^2 \right) \operatorname{cth} \alpha_0 l \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{ctg} \alpha_0 l - 2\alpha_0^2 \operatorname{cth} \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \right] - \frac{l}{\pi^2 i^2} \right\} \left[ \frac{1}{1+b_i} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{b_i}{b_i + \cos^2 \lambda_{ni}} \right) e^{-\frac{4\lambda_{ni}^2 c t}{h^2}} \right] \sin \frac{\pi i x}{l}, \quad (4.19)$$

где 
$$b_i = \frac{E l k_0 h \alpha_i^4}{\pi^4 \gamma c b_0 l^4}, \quad c = \frac{k_0 (1+\varepsilon)}{\gamma a},$$

$\lambda_{ni}$  — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{\lambda}{b_i}.$$

Исходя из полученного значения  $q(x,t)$  легко определить остальные элементы изгиба балки.

Опорные реакции левой и правой опоры

$$A(t) = \frac{q_0 l}{6} + l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} (\sin \pi i - \pi i) T_1(t), \quad (4.20)$$

$$B(t) = \frac{q_0 l}{3} - l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} (\sin \pi i - \pi i \cos \pi i) T_1(t), \quad (4.21)$$

поперечная сила

$$Q(x,t) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} - l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} \left( \sin \pi i - \pi i \sin \frac{\pi i x}{l} \right) T_1(t), \quad (4.22)$$

изгибающий момент

$$M(x,t) = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3 + l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} \left( x \sin \pi i - l \sin \frac{\pi i x}{l} \right) T_1(t). \quad (4.23)$$

Используя граничные условия

$\delta(0,t) = 0$  и  $\delta(l,t) = 0$  получаем угол наклона

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{7}{360} q_0 l^2 - \frac{1}{12} q_0 l x^2 + \frac{1}{24} q_0 \frac{x^4}{l} - \frac{l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left[ \left( \frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{6} \right) \sin \pi i - \frac{l^2}{\pi i} \cos \frac{i \pi x}{l} \right] T_i(t) \right\}. \quad (4.24)$$

Перемещения балки

$$\delta(x,t) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{7}{360} q_0 l^2 x - \frac{1}{36} q_0 l x^3 + \frac{1}{120} q_0 \frac{x^5}{l} - \frac{6l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left[ \left( x^3 - \frac{l^3}{3} \right) \sin \pi i - \frac{l^3}{\pi^2 i^2} \sin \frac{i \pi x}{l} \right] T_i(t) \right\}. \quad (4.25)$$

Примеры, подобно приведенному, можно разнообразить, при условии, чтобы для них существовали решения упруго-мгновенной задачи.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступило 18 VI 1952

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мачерет Я. А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенных нагрузкой. ВООС, 1934.
2. Флорин В. А. К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. ГОНТИ, 1938.
3. Жемочкин Б. Н. Плоская задача расчета балок на полупространстве и полуплоскости. ВИА, 1937.
4. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. Учен. зап. Московского государственного университета. Механика, вып. 45, 1940.
5. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Изд. пятое, 1950.
6. Арутюнян Н. Х. К исследованию статически неопределимых систем с опорами, смещающимися во времени. ПММ, том XIII, в. 6, 1949.
7. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, 1939.
8. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Часть I, том II. Изд. „Морской транспорт“, 1947.

Թ. Տ. Արաքելյան

### ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱՏԱՐԱԾ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուծ տրված է գրունտային համատարած հիմնատակի վրա դրված հեծանների հաշվարկը:

Դիտարկելով ջրով հագեցած և նստվածքի ենթակա հիմնատակի գրունտի վրա ամբողջ երկարությամբ հենված պրիզմատիկ առաձգական

հեծանի ծոռումը, հեղինակը տարրերում է հեծանի և գրունտի տեղափոխումները բնութագրելով ռ. տեղական ազդեցության դեպքում:

Փորձերը ցույց են տվել [1], [2], որ առաջին դեպքում գրունտային մասան կարելի է դիտել որպես դժայնորեն դեֆորմացվող միջավայր:

Ընդունվում է, որ երկֆազ հիմնատակի գրունտի դեֆորմացիա առկա հատկությունը իրականությունն առավել մոտ կարելի է բնութագրել բևեռայնորված առաձգական հեծանի ազդեցության տակ նրա ուղղագծային կոնսոլիդացիայով:

Ընդունելով վերոհիշյալ ենթադրությունները, հիմնատակի հակազդման ինտենսիվությունը որոշելու համար ստացվում է (1.3) ինտերգր-դիֆերենցիալ հավասարումը:

Անջատելով փոփոխականները, այս հավասարման լուծումը վերածվում է մի չորրորդ կարգի համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման (2.3) և մի ինտեգրալ հավասարման (2.4) լուծումներին:

Անհնարով (2.3) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը, հեծանի սահմանային պայմաններից որոշվում են լուծման կամայական հաստատունները: Իսկ  $\alpha$  պարամետրը գտնվում է (2.3) հավասարման լուծումը ներկայացնող (2.5) ֆունկցիաների ֆունկցիաներից ստացվող խառակերիստիկ հավասարումից: Այնուհետև որոշվում է նաև (2.4) ինտեգրալ հավասարման  $T_1(0)$  անդամը և տրվում է նրա (2.20) ընդհանուր ինտեգրալը:

Այսպիսով, հետազոտվող (1.3) ինտեգր-դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ներկայացվում է (2.25) տեսքով:

Հոդվածում բերված են նաև հեծանի զանազան սահմանային պայմանների դեպքում կամայական հաստատունների և  $\alpha$  պարամետրի արժեքները: Վերջում տրված է եռանկյունի բևեռով բևեռավորված, կոշտ հենարանների վրա հողակապելով ամրացված, գրունտային համատարած հիմնատակ ունեցող հեծանի հաշվարկը:

Այդ օրինակից պարզվում է, որ արտաքին բնի ներգործությունն արտահայտվում է նույն խնդրի առաձգական ակնթարթային լուծման միջոցով: Ընդ որում հեծանի ծոման հաշվարկային մեծությունները ստացվում են՝ կախված ժամանակից և հեծանի հիմնատակի գրունտի ֆիզիկոմեխանիկական հատկություններից: