ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VI, № 2, 1953 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Л. Б. Бунятян

Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала

1. В работе рассматривается устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала исходя из теории В. З. Власова [1], а именно принимается, что:

а) контур сечения недеформируемый;

б) деформации сдвига срединной поверхности равны нулю;

в) модуль упругости материала меняется во времени, т. е.

$$E = E(t);$$

г) мера ползучести материала подчиняется закону [2]:

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right], \tag{1.1}$$

где $\varphi(\tau)$ — монотонно убывающая функция,

τ — возраст материала,

t — время,

γ — некоторая физическая постоянная материала;

д) коэффициенты Пуассона для упругой и ползучей части деформаций равны друг другу, т. е.

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t,\tau) = \nu = \text{const.};$$

е) деформации и напряжения материала стержня подчиняются уравнениям теории ползучести, предложенным Н. Х. Арутюняном [2].

Для двухосного напряженного состояния эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1(t) &= \frac{\sigma_1(t) - \nu\sigma_2(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_1(\tau) - \nu\sigma_2(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right]d\tau,\\
\varepsilon_2(t) &= \frac{\sigma_2(t) - \nu\sigma_1(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_2(\tau) - \nu\sigma_1(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right]d\tau,\\
\gamma_{1,2}(t) &= 2\left\{\frac{(1+\nu)\tau_{1,2}(t)}{E(t)} - (1+\nu)\int_{\tau_1}^{t}\tau_{1,2}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right]d\tau\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$—относительные удлинения стержня в продольном и поперечном направлениях, $\gamma_{1,2}(t)$—деформация сдвига, а $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ и $\tau_{12}(t)$—соответствующие нормальные и касательные напряжения,

$C(t,\tau)$ определяется соотношением (1.1).

В силу гипотезы о недеформируемости контура $\varepsilon_2(t)=0$, поэтому:

$$\sigma_2(t)-\nu\sigma_1(t)=0, \quad \text{или} \quad \sigma_2(t)=\nu\sigma_1(t). \tag{1.3}$$

Учитывая (1.3), уравнение (1.2) можно записать в форме

$$\varepsilon(t)=\frac{(1-\nu^2)\sigma(t)}{E(t)}-(1-\nu^2)\int\limits_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau. \tag{1.4}$$

Дифференцируя уравнение (1.4) дважды по t и пользуясь соотношением (1.1), после некоторых преобразований получим:

$$\ddot{\varepsilon}(t)+\gamma\dot{\varepsilon}(t)=\left[\frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E(t)}\right]^{\cdot}+f(t)\frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E(t)}. \tag{1.5}$$

где
$$f(t)=\gamma[1+\varphi(t)E(t)], \qquad \sigma_1(t)=(1-\nu^2)\sigma(t). \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.5) будет:

$$\sigma_1(t)=\frac{E(t)}{1-\nu^2}\,\varepsilon(t)+\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\varepsilon(\tau)}{1-\nu^2}R(t,\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

где $R(t,\tau)$ есть резольвента ядра

$$K(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E(\tau)}+\varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right]\right\}. \tag{1.8}$$

Преобразуем третье из уравнений (1.2) учитывая, что при чистом кручении имеют место соотношения

$$H=GI_d\,\theta', \quad \tau_{xz}=\frac{H\psi(x,y)}{I_d} \quad \text{и} \quad \gamma_{xz}=\psi(x,y)\theta', \tag{1.9}$$

где H—крутящий момент, I_d—момент инерции при чистом кручении, равный для тонкостенных профилей $I_d=\frac{\alpha}{3}\Sigma h\delta^3$ (h—ширина грани профиля, δ—его толщина, а α—эмпирический коэффициент), $\psi(x,y)$—некоторая функция от координат точек сечения и θ'—производная от угла закручивания по z.

Подставляя (1.9) в уравнение (1.2), получим:

$$\theta'(t)=\frac{2(1+\nu)H(z,t)}{E(t)}-\frac{2(1+\nu)}{I_d}\int\limits_{\tau_1}^{t}H(z,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau. \tag{1.10}$$

Решая это уравнение относительно $H(t)$, получим:

$$H(t) = G(t)I_d\,\theta'(t) + I_d\int_{\tau_1}^{t}\frac{\theta'(\tau)}{2(1+\nu)}\,R(t,\tau)d\tau. \qquad (1.11)$$

Выражения (1.10) и (1.11) удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\ddot{\theta}'(t) + \gamma\dot{\theta}'(t) = \left[\frac{\dot{H}(t)}{G(t)}\right]^{\cdot} + f(t)\frac{\dot{H}(t)}{G(t)}, \qquad (1.12)$$

где

$$G(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}.$$

2. *Интегро-дифференциальные уравнения устойчивости тонкостенного стержня открытого профиля с учетом ползучести материала.* Пусть по концам тонкостенного стержня с открытым профилем приложены продольные силы N и моменты M.

Следуя В. З. Власову [1], уравнения устойчивости стержня с учетом ползучести материала в этом случае могут быть написаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1(t)I_y\xi^{IV}(t) + I_y\int_{\tau_1}^{t}\frac{\xi^{IV}(\tau)}{1-\nu^2}R(t,\tau)d\tau + N\xi''(t) + (M_x + a_y N)\theta''(t) = 0,\\
&E_1(t)I_x\eta^{IV}(t) + I_x\int_{\tau_1}^{t}\frac{\eta^{IV}(\tau)}{1-\nu^2}R(t,\tau)d\tau + N\eta''(t) + (M_y - a_x N)\theta''(t) = 0,\\
&E_1(t)I_\omega\theta^{IV}(t) + I_\omega\int_{\tau_1}^{t}\frac{\theta^{IV}(\tau)}{1-\nu^2}R(t,\tau)d\tau - G(t)I_d\,\theta''(t) -\\
&- I_d\int_{\tau_1}^{t}\frac{\theta''(\tau)}{2(1+\nu)}R(t,\tau)d\tau + (M_x + a_y N)\xi''(t) + (M_y - a_x N)\eta''(t) +\\
&+ (r^2N + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x)\theta''(t) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

где

$$E_1(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2}.$$

Учитывая (1.11) и (1.12) уравнения (2.1) можно привести к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1(t)I_y\ddot{\xi}^{IV}(t)+\gamma E_1(t)I_y\dot{\xi}^{IV}(t)+N\ddot{\xi}''(t)+(M_x+a_yN)\ddot{\theta}''(t)+\\
&\qquad+F(t)[N\dot{\xi}''(t)+(M_x+a_yN)\dot{\theta}''(t)]=0,\\
&E_1(t)I_x\ddot{\eta}^{IV}(t)+\gamma E_1(t)I_x\dot{\eta}^{IV}(t)+N\ddot{\eta}''(t)+(M_x-a_xN)\ddot{\theta}''(t)+\\
&\qquad+F(t)[N\dot{\eta}''(t)+(M_y-a_xN)\dot{\theta}''(t)]=0,\\
&E_1(t)I_\omega\ddot{\theta}^{IV}(t)+\gamma E_1(t)I_\omega\dot{\theta}^{IV}(t)-G(t)I_d\ddot{\theta}''(t)-\gamma G(t)I_d\dot{\theta}''(t)+(M_x+\\
&\quad+a_yN)\ddot{\xi}''(t)+(M_y-a_xN)\ddot{\eta}''(t)+(r^2N+2\beta_xM_y-2\beta_yM_x)\ddot{\theta}''(t)+\\
&\qquad+F(t)[(M_x+a_yN)\dot{\xi}''(t)+(M_y-a_xN)\dot{\eta}''(t)+(r^2N+\\
&\qquad\quad+2\beta_xM_y-2\beta_yM_x)\dot{\theta}''(t)]=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.2)$$

Рассмотрим стержень, у которого перемещения ξ и η и поворот θ в плоскости концевых сечений отсутствуют. В этом случае граничные условия будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{при}\quad z=0\quad \xi=\eta=\theta=0,\quad \xi''=\eta''=\theta''=0,\\
&\text{при}\quad z=l\quad \xi=\eta=\theta=0,\quad \xi''=\eta''=\theta''=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

Условиям (2.3) удовлетворяют функции

$$\left.\begin{aligned}
\xi(t)&=A(t)\sin\frac{k\pi z}{l},\\
\eta(t)&=B(t)\sin\frac{k\pi z}{l},\\
\theta(t)&=C(t)\sin\frac{k\pi z}{l},
\end{aligned}\right\}\qquad(2.4)$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$—некоторые функции только от t $(k=1, 2, 3\ldots)$.

После подстановки (2.4) в уравнение (2.2) и некоторых преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&[P_y(t)-N]\ddot{A}(t)+\gamma[P_y(t)-F(t)N]\dot{A}(t)-(M_x+a_yN)\ddot{C}(t)-\\
&\qquad-\gamma F(t)(M_x+a_yN)\dot{C}(t)=0,\\
&[P_x(t)-N]\ddot{B}(t)+\gamma[P_y(t)-F(t)N]\dot{B}(t)-(M_y-a_xN)\ddot{C}(t)-\\
&\qquad-\gamma F(t)(M_y-a_xN)\dot{C}(t)=0,\\
&[r^2P_\omega(t)-r^2N-2\beta_xM_y+2\beta_yM_x]\ddot{C}(t)+\gamma[r^2P_\omega(t)-F(t)(r^2N+\\
&\quad+2\beta_xM_y-2\beta_yM_x)]\dot{C}(t)-(M_x+a_yN)\ddot{A}(t)-\gamma F(t)(M_x+\\
&\quad+a_yN)\dot{A}(t)-(M_y-a_xN)\ddot{B}(t)-\gamma F(t)(M_y-a_xN)\dot{B}(t)=0,
\end{aligned}\right|\qquad(2.5)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{где}\qquad P_y(t)&=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t)I_y\,,\\ P_x(t)&=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t)I_x\\ P_\omega(t)&=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t)I_\omega+GI_d\right].\end{aligned}\right\}\qquad(2.6)$$

Рассмотрим решение системы уравнений (2.5) для случаев, когда поперечное сечение стержня: а) имеет две оси симметрии, б) имеет одну ось симметрии, в) не имеет осей симметрии, при центральном приложении продольных сил.

3. *Стержень имеет две оси симметрии поперечного сечения и нагружен центрально-приложенными продольными силами.* Для этого случая имеет $M_x=M_y=0$, $a_x=a_y=0$, тогда система уравнений (2.5) распадается на три отдельных уравнения вида

$$\left.\begin{aligned}&[P_y(t)-N]A(t)+\gamma[P_y(t)-F(t)N]\dot{A}(t)=0,\\ &[P_x(t)-N]B(t)+\gamma[P_x(t)-F(t)N]\dot{B}(t)=0,\\ &[P_\omega(t)-N]C(t)+\gamma[P_\omega(t)-F(t)N]\dot{C}(t)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

Решение первого из уравнений (3.1) будет:

$$A(t)C_1=\int\limits_{\tau_1}^{t} e^{-\gamma\int\limits_{\tau}^{t}\frac{P_y(t)-F(t)N}{P_y(t)-N}dt}\,dt,\qquad(3.2)$$

где C_1—постоянная интегрирования.

Два другие уравнения (3.1) будут иметь аналогичное решение.

Примем для устойчивости следующий критерий: *какова бы ни была продолжительность воздействия нагрузки, бесконечно малая деформация, приданная стержню в момент загружения, должна оставаться ограниченной, т. е. не возрастать во времени.*

Чтобы удовлетворить этому условию показатель степени подинтегрального выражения (3.2) должен быть отрицательным, т. е. должно иметь место неравенство:

$$P_y(t)-F(t)N>0.\qquad(3.3)$$

Действительно, если будет иметь место неравенство (3.3), то знаменатель показателя будет больше нуля, т. е.

$$P_y(t)-N>0,\qquad(3.4)$$

и так как $F(t)>1$, то и показатель степени e будет отрицательным.

Таким образом, при значении N, удовлетворяющем неравенству (3.3), стержень не потеряет устойчивости.

Если неравенство (3.3) превратится в равенство, т. е.

$$P_y(t)-F(t)N=0, \tag{3.5}$$

то

$$N_y=\frac{P_y(t)}{F(t)}, \tag{3.6}$$

и тогда

$$A(t)=C_1(t-\tau_1). \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) показывает, что если значение приложенной продольной силы N будет изменяться по закону (3.6), то деформация стержня с возрастанием продолжительности действия нагрузки будет расти, т. е. стержень с течением времени будет терять устойчивость. Значение этой силы будем называть *критической силой длительной устойчивости*.

При равенстве нулю знаменателя показателя степени подинтегрального выражения (3.2), т. е.

$$P_y(t)-N=0, \quad \text{или} \quad N=P_y(t), \tag{3.8}$$

деформация стержня A(t) мгновенно становится бесконечно большой, т. е. стержень мгновенно теряет устойчивость. Действительно, при (3.8) числитель показателя степени будет:

$$P_y(t)-F(t)N=P_y(t)[1-F(t)]<0, \tag{3.9}$$

так как всегда $F(t)>1$, и при условии (3.8) будет бесконечно большим.

Значение продольной силы, определенное из условия (3.8), будем называть *критической силой мгновенной устойчивости*.

Таким образом, критические силы длительной устойчивости для стержня будут:

$$\left.\begin{aligned}
N_x&=\frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2E_1(t)I_x}{1+\varphi(t)E(t)-\frac{E'(t)}{\gamma E(t)}},\\
N_y&=\frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2E_1(t)I_y}{1+\varphi(t)E(t)-\frac{E'(t)}{\gamma E(t)}},\\
N_\omega&=\frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2E_1(t)I_\omega+G(t)I_d}{\left[1+\varphi(t)E(t)-\frac{E'(t)}{\gamma E(t)}\right]r^2},
\end{aligned}\right| \tag{3.10}$$

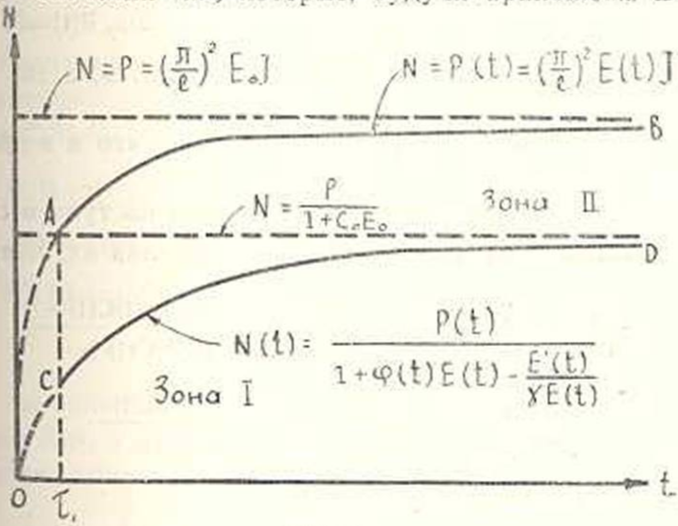
причем расчетной будет наименьшая из них.

Критические силы мгновенной устойчивости в зависимости от возраста материла будут:

$$\left.\begin{aligned} P_x(t) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_x, \\ P_y(t) &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_y, \\ P_\omega(t) &= \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_\omega + G(t) I_d\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Из анализа выражений (3.10) и (3.11) следует, что *возраст материала существенно влияет на значение критической силы.*

На фиг. 1 приведен график изменения критической силы длительной устойчивости в зависимости от возраста материала по формуле (3.10) и кривая изменения мгновенной критической силы по формуле (3.11). Кривая N(t) разбивает область мгновенной устойчивости $t\tau_1AB$ на две зоны. Зона $I - t\tau_1CD$ представляет собою всё многообразие тех значений сил, которые, будучи приложены к стержню,



Фиг. 1.

не вызывают потери его устойчивости при любой продолжительности воздействия. Эту зону назовем *зоной длительной устойчивости.* В этой зоне силы могут меняться во времени по любому закону, лишь бы их значения не переходили границы зоны CD и тогда длительная устойчивость будет обеспечена. Все те значения сил, которые находятся во второй зоне, могут действовать только кратковременно, ибо при их длительном воздействии стержень неминуемо теряет устойчивость. поэтому эту зону будем *называть зоной мгновенной устойчивости* или *зоной неустойчивости,* если речь идет о длительной устойчивости.

Из фигуры 1 видно, что по мере старения материал упрочняется и его несущая способность возрастает и в пределе при $t \to \infty$, т. е. для старых материалов достигает величин $N_x(\infty) = \dfrac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1 I_x}{1 + C_0 E_0}$

и $\quad P_x(\infty) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1 I_x \quad$ [3].

Особенно сильно влияние возраста материала на значение критической силы длительной устойчивости сказывается в молодом возрасте.

4. *Устойчивость центрально-сжатого стержня, имеющего одну ось симметрии поперечного сечения.* В этом случае в уравнениях (2.5) нужно положить $a_y = 0$ и $M_x = M_y = 0$, тогда уравнения устойчивости примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &[P_y(t) - N]\ddot{A}(t) + \gamma[P_y(t) - F(t)N]\dot{A}(t) = 0, \\ &[P_x(t) - N]\ddot{B}(t) + \gamma[P_x(t) - F(t)N]\dot{B}(t) + a_x N\ddot{C}(t) + F(t)a_x\dot{C}(t) = 0, \\ &r^2[P_\omega(t) - N]\ddot{C}(t) + \gamma[P_\omega(t) - F(t)N]\dot{C}(t) + a_x N\ddot{B}(t) + F(t)a_x\dot{B}(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Таким образом, первое уравнение отделится, а два остальные уравнения (4.1) составят систему.

Первое уравнение имеет то же решение, что и в предыдущем случае.

Для решения двух остальных уравнений поступаем следующим образом: исключая $\ddot{B}(t)$ и $\dot{B}(t)$ из (4.1) и разделив их, получаем:

$$\frac{\ddot{B}(t)}{\dot{B}(t)} = \frac{\gamma[r^2(P_\omega - N)(N_x - N) - a_x^2N^2]F(t)\ddot{C}(t) + \gamma^2F^2(t)[r^2(N_\omega - N)(N_x - N) - a_x^2N^2]\dot{C}(t)}{[r^2(P_\omega - N)(P_x - N) - a_x^2N^2]\ddot{C}(t) + \gamma F(t)[r^2(N_\omega - N)(P_x - N) - a_x^2N^2]\dot{C}(t)}. \tag{4.2}$$

Интегрируя это уровнение, находим:

$$B(t) = C_1\int_{\tau_1}^{t}\left\{\exp\int_{\tau}^{t} - \frac{\gamma[r^2(P_\omega - N)(N_x - N) - a_x N^2]F(t)\ddot{C}(t) + \gamma^2F^2(t)[r^2(N_\omega - N)(N_x - N) - a_x^2N^2]\dot{C}(t)}{[r^2(P_\omega - N)(P_x - N) - a_x^2N^2]\ddot{C}(t) + \gamma F(t)[r^2(N_\omega - N)(P_x - N) - a_x^2N_2]\dot{C}(t)}\,dt\right\}dt. \tag{4.3}$$

Из определения критической силы длительной устойчивости следует, что числитель подинтегрального выражения (4.3) должен равняться нулю, т. е.

$$[r^2(P_\omega - N)(N_x - N) - a_x^2N^2]\ddot{C}(t) + \gamma F(t)[r^2(N_\omega - N)(N_x - N) - a_x^2N^2]\dot{C}(t) = 0. \tag{4.4}$$

Отделяя переменные в (4.4), после интегрирования, получим:

$$C(t)=C_2\int_{\tau_1}^{t}\left\{\exp\int_{\tau}^{t}-\frac{F(t)\gamma[r^2(N_{\omega}-N)(N_x-N)-a_x^2N^2]}{r^2(P_{\omega}-N)(N_x-N)-a_x^2N^2}\,dt\right\}dt. \tag{4.5}$$

В силу условия длительной устойчивости имеем:

$$r^2(N_{\omega}-N)(N_x-N)-a_x^2N^2=0, \tag{4.6}$$

откуда

$$N_{1,2}=\frac{(N_x+N_{\omega})r^2\pm\sqrt{(N_x-N_{\omega})^2r^4-4N_xN_{\omega}r^2(r^2-a_x^2)}}{2(r^2-a_x^2)}, \tag{4.7}$$

где N_x и N_{ω} определяются по формулам (3.10).

В этом случае также можно написать связь между критическими силами длительной и мгновенной устойчивости в форме:

$$N_{1,2}=\frac{P_{1,2}}{1+\varphi(t)E(t)-\dfrac{E'(t)}{\gamma E(t)}}. \tag{4.8}$$

5. *Устойчивость центрально-сжатого стержня, не имеющего осей симметрии поперечного сечения.* В этом случае, полагая в уравнении (2.5) $M_x = M_y = 0$, получим уравнения устойчивости в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&(P_y-N)\ddot{A}(t)+\gamma[P_y-F(t)N]\dot{A}(t)-a_yN\ddot{C}(t)-\gamma F(t)a_yN\dot{C}(t)=0,\\
&(P_x-N)\ddot{B}(t)+\gamma[P_x-F(t)N]\dot{B}(t)+a_xN\ddot{C}(t)+\gamma F(t)a_xN\dot{C}(t)=0,\\
&r^2(P_{\omega}-N)\ddot{C}(t)+\gamma r^2[P_{\omega}-F(t)N]\dot{C}(t)-a_yN\ddot{A}(t)-\gamma F(t)a_y\dot{A}(t)+\\
&\qquad+a_xN\ddot{B}(t)+\gamma F(t)a_x\dot{B}(t)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Для решения системы (5.1) из первого и третьего уравнений определяем $\ddot{A}(t)$, а затем $\dot{A}(t)$.

Разделив полученные результаты и интегрируя, получим:

$$A(t)=C_1\int_{\tau_1}^{t}\left\{\exp\int_{\tau}^{t}-\frac{F(t)M_1(P_{\omega},N_y,N)\ddot{C}(t)+F^2(t)M_2(N_{\omega},N_y,N)\dot{C}(t)-}{M_3(P_{\omega},P_y,N)\ddot{C}(t)+F(t)M_4(N_{\omega},P_y,N)\dot{C}(t)-}\right.$$

$$\left.\frac{-Q_1(N_y,N)F(t)[\ddot{B}(t)-F(t)\dot{B}(t)]}{-Q_2(P_y,N)[\ddot{B}(t)-F(t)\dot{B}(t)]}\,dt\right\}dt, \tag{5.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
M_1(P_{\omega},N_y,N)&=r^2(N-P_{\omega})(N-N_y)-a_y^2N^2,\\
M_2(N_{\omega},N_y,N)&=r^2(N-N_{\omega})(N-N_y)-a_y^2N^2,\\
Q_1(N_y,N)&=a_xN(N-N_y),\\
M_3(P_{\omega},P_y,N)&=r^2(N-P_{\omega})(N-P_y)-a_y^2N^2,\\
M_4(N_{\omega},P_y,N)&=r^2(N-N_{\omega})(N-P_y)-a_y^2N^2,\\
Q_2(P_y,N)&=a_xN(N-P_y).
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Применяя критерий длительной устойчивости из выражения (5.2), получим:

$$M_1(P_\infty, N_y, N)\ddot{C}(t)+F(t)M_2(N_\infty, N_y, N)\dot{C}(t)-$$
$$-Q_1(N_y, N)[\ddot{B}(t)-F(t)\dot{B}(t)]=0. \tag{5.4}$$

Исключая из (5.4) и второго из уравнений системы (5.1) $\ddot{B}(t)$ и $\dot{B}(t)$, после интегрирования находим:

$$B(t)=C_2\int\limits_{\tau_1}^{t}\left\{\exp\int\limits_{\tau}^{t}-\frac{F(t)M^{I}(P_\infty, N_x, N_y, N)\ddot{C}(t)+}{M^{III}(P_\infty, P_x, N_y, N)\ddot{C}(t)+}\right.$$
$$\left.\frac{+F^2(t)M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)\dot{C}(t)}{+F(t)M^{IV}(N_\infty, N_y, P_x, N)\dot{C}(t)}\,dt\right\}dt, \tag{5.5}$$

где
$$\left.\begin{aligned}
M^{I}(P_\infty, N_x, N_y, N)&=r^2(N-P_\infty)(N-N_x)(N-N_y)-\\
&-a_y^2N^2(N-N_x)-a_x^2N^2(N-N_y),\\
M^{II}(N_\infty, N_x, N_x, N)&=r^2(N-N_\infty)(N-N_x)(N-N_y)-\\
&-a_y^2N^2(N-N_x)-a_x^2N(N-N_y),\\
M^{III}(P_\infty, P_x, N_y, N)&=r^2(N-P_\infty)(N-P_x)(N-N_y)-\\
&-a_y^2N(N-P_x)-a_x^2N(N-N_y),\\
M^{IV}(N_\infty, N_y, P_x, N)&=r^2(N-N_\infty)(N-N_y)(N-P_x)-\\
&-a_y^2N(N-P_x)-a_x^2N(N-N_y).
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Пользуясь условием длительной устойчивости из (5.5), получим уравнение, содержащее только функцию $C(t)$:

$$M^{I}(P_\infty, N_x, N_y, N)\ddot{C}(t)+F(t)M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)\dot{C}(t)=0, \tag{5.7}$$

интеграл которого есть

$$C(t)=C_3\int\limits_{\tau_1}^{t}\left\{\exp\int\limits_{\tau}^{t}-\frac{M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)}{M^{I}(P_\infty, N_x, N_y, N)}F(t)dt\right\}dt, \tag{5.8}$$

откуда имеем следующее уравнение для определения критической силы длительной устойчивости:

$$M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)=r^2(N-N_\infty)(N-N_x)(N-N_y)-$$
$$-a_y^2N^2(N-N_x)-a_x^2N^2(N-N_y)=0. \tag{5.9}$$

В этом уравнении N_∞, N_x, N_y определяются по формулам (3.10).

Таким образом, зная значение критической силы мгновенной устойчивости, критическую силу длительной устойчивости можно определить по формуле:

$$N = \frac{P}{F(t)} = \frac{P}{1 + \varphi(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}}, \tag{5.10}$$

где N—критическая сила длительной устойчивости,

P—критическая сила мгновенной устойчивости, определяемая методом строительной механики [1],

F(t)—коэффициент, определяющий влияние на критическую силу длительной устойчивости возраста и свойств ползучести материала.

Армянский научно-исследовательский
институт гидротехники
и мелиорации

Поступило 26 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат, 1940.
2. *Арутюнян Н. Х.* Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести. ПММ, т. XIII, 1942.
3. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени. Изд. техн.-теор. литер., 1949.

Լ. Ռ. Ռունիարյան

ՆՐԲԱՊԱՏ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ՝ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ քննարկվում է նրբապատ ձողերի կայունության խնդիրը՝ նյութի սողքի հաշվառումով։

Որպես հիմնական ելակետային տվյալներ ընդունված են Վ. Զ. Վլասովի տեսության մեջ զարգացված նախադրյալները, այն է՝ ձողի եզրագծի անփոփոխելիությունը, սեկտորիալ մակերեսների օրենքը և այլն։

Հուկի օրենքի փոխարեն օգտագործված է նյութի ծերացման ժառանգական տեսության օրենքը, վերջինս արտահայտվում է նրանում, որ լարման և դեֆորմացիաների միջև եղած կապը տրվում է ինտեգրալ կախման ձևով, մի կախում, որը հաշվի է առնում ինչպես նյութի սողքը, այնպես էլ նրա առաձգականության մոդուլի փոփոխականությունը։

Կրիտիկական ուժի համար (որի դեպքում կորչում է կայունությունը) գտնված է արտահայտություն՝ նյութի հասակից կախված։