ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VI, № 2, 1953, Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

А. П. Тамадян

Об одной теореме М. В. Келдыша

Пусть $h(z) > 0$ — ограниченная функция в произвольной конечной односвязной области D, расположенной в плоскости z.

Отнесем к классу $H_2(h, D)$ все аналитические в D функции $f(z)$, для которых существует интеграл

$$\iint_D h(z)\,|f(z)|^2\,dxdy.$$

Если для произвольной функции $f(z) \subset H_2(h, D)$

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\{P_n(z)\}} \iint_D h(z)|f(z) - P_n(z)|^2\,dxdy = 0,$$

где $\{P_n(z)\}$ — всевозможные полиномы, степени которых не выше n, то говорим, что система полиномов полна в области D при весе $h(z)$.

Мы будем говорить, что функция $h(z)$ удовлетворяет условию A, если при весе $h[z(w)]$ (где $z = z(w)$ конформно отображает круг $|w| < 1$ на D) система полиномов полна в единичном круге.

М. В. Келдыш доказал [1], что:

Если весовая функция $h(z)$ *удовлетворяет условию и неравенству*

$$\lim_{d \to 0} \inf \frac{\lg \lg \lg \frac{1}{h(z)}}{\lg \frac{1}{d(z)}} > 2,$$

где $d(z)$ — *расстояние точки* z *до границы* D, *то система полиномов полна в области* D *при весе* $h(z)$.

В настоящей работе сформулированная теорема уточняется и доказывается иным методом.

Известно, что вопрос о полноте в классе функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модуля при весе $h(z)$, который удовлетворяет условию A, сводится к полноте специальной счетной системы функций.

Это следует из леммы:

Лемма 1 [1]. *Если вес* $h(z)$ *удовлетворяет условию* A *и при любом* $m \geqslant 0$ *для функции* $[w(z)]^m w'(z)$, *где* $w=w(z)$*—функция, отображающая* D *на круг* $|w|<1$, *выполняются условия*

$$\inf_{\{P(z)\}} \iint_D h(z)\,|[w(z)]^m w'(z)-P(z)|^2\, dxdy=0,$$

то система полиномов полна в области D *при весе* $h(z)$.

Методом вывода полюсов, впервые примененным М. В. Келдышем к вопросам полноты, можно установить следующее:

Лемма 2. *Пусть* D*—произвольная область, расположенная в круге* $|z|<R$, *точка* ζ *находится вне* D, *причем эту точку можно соединить с окружностью* $|z|=2R+1$, *спрямляемой кривой длины* l *так, что* δ*—окрестность этой кривой расположена вне* D. *Пусть* $P_{n_0}\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)$*—полином от* $\frac{1}{z-\zeta}$ *степени* n_0, *максимум которого в области* $|z-\zeta|\geqslant\delta$ *равен* M_0.

Для любого целого n *существует полином* $P_{n,\zeta}(z)$ *степени* n, *такой, что*

$$1)\qquad \max_{\substack{z\in\overline{D}\\ |z-\zeta|\geqslant\delta}}\left|P_{n_0}\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)-P_{n,\zeta}(z)\right|<\left[\exp\left(-e^{-c_1\frac{l}{\delta}}\right)\right]^n, \tag{1}$$

$$2)\qquad \max_{|z|<R}\left|P_{n,\zeta}(z)\right|<\exp\left(e^{c_2\frac{l}{\delta}}\right), \tag{2}$$

где постоянные c_1 и c_2 *не зависят от* l и δ.

Обозначим через D_δ множество тех точек D, расстояние которых до границы Г области D больше 2δ.

Для каждого положительного числа δ ($\delta>0$) множество D_δ принадлежит D и состоит из конечного числа замкнутых жордановых областей, ограниченных спрямляемыми кривыми. Границу D_δ обозначим через Γ_δ.

Пусть $\zeta\in\Gamma_{\delta/2}$ и $L_{\zeta,\delta}$ та компонента $\Gamma_{\delta/2}$, которой принадлежит точка ζ.

Покажем, что существует жорданова спрямляемая кривая $S_{\zeta,\delta}\overline{\in}\overline{D}_\delta$, соединяющая ζ с окружностью $|z|=2R+1$, такая, что длина

$$S_{\zeta,\delta}\leqslant\frac{\eta(\delta)}{\delta}, \tag{3}$$

где $\eta(\delta)>0$ стремится к нулю, когда $\delta\to 0$, причем δ—окрестность этой линии расположена вне D_δ.

Действительно, обозначим через ζ_1 ту точку $L_{\zeta,\delta}$ или одну из тех ее точек t, для которых Reel t достигает своего максимума. Из точки ζ_1 проведем луч, параллельный оси ох и направленный в сторону возрастания x. Пусть ζ'_1 — ближайшая к ζ_1 точка пересечения этого луча с $\Gamma_{\delta/2}$, $L_{\zeta_1\delta}$ —та компонента $\Gamma_{\delta/2}$, которой принадлежит ζ'_1, ζ_2 —та точка $L_{\zeta_1,\delta}$ или одна из тех ее точек, для которых Reel t достигает своего максимума на компоненте $L_{\zeta_1,\delta}$. Повторяя конечное число раз эти рассуждения, мы можем соединить любую точку $\zeta \in \Gamma_{\delta/2}$ с помощью конечного числа дуг, принадлежащих $\Gamma_{\delta/2}$, и отрезков $\Delta_{\kappa,\delta} = [\zeta_\kappa, \zeta'_\kappa]$. ($\kappa = 1,2,\ldots,p$) параллельных оси ox, с окружностью $|z| = 2R + 1$.

Обозначим через $S_{\zeta,\delta}$, жорданову спрямляемую кривую, составленную таким образом из той части $L^*_{\zeta_\kappa,\delta}$ кривой $L_{\zeta_\kappa,\delta}$, которая расположена между точками $\zeta'_{\kappa-1}$, ζ_κ, и из отрезков $\Delta_{\kappa,\delta}$, параллельных оси ox ($\kappa = 1,2,\ldots,p$):

$$S_{\zeta,\delta} = \sum_{\kappa=1}^{p} L^*_{\zeta_\kappa,\delta} + \sum_{p=1}^{p} \Delta_{\kappa,\delta}.$$

Очевидно, что δ—окрестность кривой $S_{\zeta,\delta}$ —расположена вне $\overline{D}_\delta$. Для оценки длины $S_{\zeta,\delta}$ заметим, что

$$\text{длина}\quad S_{\zeta,\delta} = \sum_{\kappa=1}^{p} \text{дл.}\ L^*_{\zeta,\delta} + \sum_{\kappa=1}^{p} \text{дл.}\ \Delta_{\kappa,\delta},$$

где

$$\sum_{\kappa=1}^{p} \text{дл.}\ L^*_{\zeta,\delta} < \text{дл.}\Gamma_{\delta/2},$$

а

$$\sum_{\kappa=1}^{p} \text{дл.}\ \Delta_{\kappa,\delta} < 2(2R+1).$$

Пусть ζ—любая точка Γ_δ. Из определения Γ_δ следует, что существует окружность $|z - z_\zeta| = \delta$ ($z_\zeta \in D$), проходящая через ζ и соприкасающаяся с Γ в точке ζ^*, такая, что круг $|z - z_\zeta| < \delta$ не содержит точек Γ_δ и Γ. Легко видеть, что для разных точек ζ_1, $\zeta_2 \in \Gamma_\delta$ интервалы (ζ_1, ζ_1^*) и $(\zeta_2\ \zeta_2^*)$ не пересекаются, поэтому, так как все круги $|z - z_\zeta| < \delta$ расположены в области $D - D_\delta$, то

$$\delta.\ \text{дл.}\ \Gamma_\delta \leqslant \text{площ.}\ (D - D_\delta), \quad \text{т. е.}\quad \text{длина}\ \Gamma_\delta \leqslant \frac{\eta(\delta)}{\delta},$$

где

$$\eta(\delta) = \text{площ.}\ (D - D_\delta) \to 0 \ \text{при}\ \delta \to 0.$$

Теорема. Если весовая функция h(z) *определена в произвольной конечной и односвязной области* D, *удовлетворяет условию* A *и неравенству*

$$\liminf_{d \to 0} \, [d(z)]^2 \, \lg\lg \frac{1}{h(z)} > 0,$$

где $d(z)$—*расстояние точки* z *до границы* D, *то система полиномов полна в области* D *при весе* $h(z)$.

Доказательство. Пусть область D расположена в круге $|z| < R$. Если $w = w(z)$ отображает D на круг $|w| < 1$, то в силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно доказать весовую полноту системы полиномов относительно функции вида $f(z) = [w(z)]^m \, w'(z)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Оценим модуль функции $f(z)$. Представляя $[f(z)]^2$ в виде интеграла Коши по окружности радиуса δ с центром $\zeta \in \Gamma_{\delta/2}$:

$$[f(\zeta)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} [f(\zeta + \delta e^{i\varphi})]^2 \, d\varphi,$$

или

$$|f(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\zeta + \delta e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi;$$

умножая на rdr и интегрируя от 0 до δ, имеем

$$|f(\zeta)|^2 \frac{\delta^2}{2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\delta} \int\limits_0^{2\pi} |f(\zeta + \delta e^{i\varphi})|^2 \, r dr d\varphi.$$

Отсюда

$$|f(\zeta)| < \frac{1}{\delta} \text{ при } \zeta \in \Gamma_{\delta/2} \tag{4}$$

Покажем теперь, что можно найти полиномы $P_n(z)$ так, чтобы интеграл

$$\iint\limits_{D} h(z)|f(z) - P_n(z)|^2 \, dxdy = \iint\limits_{D_\delta} h(z)|f(z) - P_n(z)|^2 \, dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{D - D_\delta} h(z)|f(z) - P_n(z)|^2 \, dxdy$$

стремился к нулю при $n \to \infty$.

Действительно, часть интеграла, распространенную на D_δ, оценим, используя интеграл Коши.

Применим лемму 2 к области $D^*_{\zeta,\delta}$, получаемой удалением из круга $|z| < R$ δ—окрестности кривой $S_{\zeta,\delta}$. Очевидно $D_\delta \subset D^*_{\zeta,\delta}$.

Согласно лемме 2 существует полином $P_{n,\zeta}(z)$, удовлетворяющий, в силу (1), (2) и (3), неравенствам:

$$\max_{z \in \overline{D}^*_{\zeta,\delta}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{n,\zeta}(z) \right| < \left[\exp\left(-e^{-\frac{\eta_1}{\delta}} \right) \right]^n, \quad (1^*)$$

$$\zeta \in S_{\zeta,\delta} \quad \max_{|z| < R} |P_{n,\zeta}(z)| < \exp\left(\frac{1}{2} e^{\frac{\eta_1}{\delta^2}} \right). \quad (2^*)$$

Очевидно, что интеграл

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\delta/2}} f(\zeta) P_{n,\zeta}(z)\, d\zeta$$

представляет полином относительно z степени n. Составим разность $f(z) - P_n(z)$ при любом $z \in \overline{D}_\delta$:

$$|f(z) - P_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\delta/2}} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\delta/2}} f(\zeta) P_{n,\zeta}(z)\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} |f(\zeta)| \max_{\substack{z \in \overline{D}_\delta \\ \zeta \in \Gamma_{\delta/2}}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{n,\zeta}(z) \right| . \text{ дл. } \Gamma_{\delta/2}$$

Из неравенств (1), (3) и (4) имеем:

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\delta} \left[\exp\left(-e^{-\frac{\eta_1}{\delta^2}} \right) \right]^n \cdot \frac{\eta_1}{\delta},$$

или

$$\max_{z \in D_\delta} |f(z) - P_n(z)| < \left[\exp\left(-e^{-\frac{\eta_1'}{\delta^2}} \right) \right]^n,$$

где η' — произвольное положительное число.

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2\, dxdy < \left[\exp\left(-e^{-\frac{\eta_1'}{\delta^2}} \right) \right]^n \cdot \iint\limits_{D} h(z) dxdy$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Часть интеграла, распространенную на $D - D_\delta$, можно оценить используя неравенство Минковского:

$$\left\{ \iint\limits_{D - D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2\, dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{ \iint\limits_{D - D_\delta} h(z) |f(z)|^2\, dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{ \iint\limits_{D - D_\delta} h(z) |P_n(z)|^2\, dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу интегрируемости $h(z)|f(z)|^2$ по площади D первый член в правой части этого неравенства стремится к нулю при $\delta \to 0$.

С другой стороны, так как расстояние любой точки $D - D_\delta$ до границы D не превосходит 2δ, из условий доказываемой теоремы следует, что существуют $A > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ так, что

$$h(z) < A \cdot \exp\left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{\delta^2}}\right).$$

Второй же член оцениваем с помощью неравенства (3)

$$\iint\limits_{D - D_\delta} h(z)|P_n(z)|^2\, dxdy < A \exp\left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{\delta^2}}\right) \cdot \exp\left(e^{\frac{\eta}{\delta^2}}\right) \text{ площадь } D.$$

Так как $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то

$$\exp\left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{\delta^2}}\right) \cdot \exp\left(e^{\frac{\eta}{\delta^2}}\right) \to 0 \text{ при } \delta \to 0. \text{ Отсюда}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{D - D_\delta} h(z)|P_n(z)|^2\, dxdy = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{D} h(z)\, |f(z) - P_n(z)|^2\, dxdy = 0.$$

Таким образом теорема доказана полностью.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* Математический сборник, т. 16 (58), 1945.

Ա. Պ. Թամադյան

Մ. Վ. ԿԵԼԴԻՇԻ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում ճշտվում է և այլ եղանակով ապացուցվում Կելդիշի հետևյալ թեորեման՝

Եթե $h(z)$ *կշռային ֆունկցիան բավարարում է* A *պայմանին, այն է՝* $h[z(w)]$ (*որտեղ* $z = z(w)$ *միավոր շրջանակը կոնֆորմ կերպով արտապատկերում է* D *տիրույթի վրա*) *կշռի դեպքում բազմանդամների սիստեմը*

լրիվ է միավոր շրջանում, և $\liminf\limits_{d\to 0} \dfrac{\lg\lg\lg\frac{1}{h(z)}}{\lg\frac{1}{d(z)}} > 2$, *որտեղ* $d(z)$*-ը* z *կետի հեռավորությունն է* D *տիրույթի եզրից, ապա բազմանդամների սիստեմը* $h(z)$ *կշռով լրիվ է* D *տիրույթում։*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ թեորեման մնում է ուժի մեջ $h(z)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ ավելի թույլ սահմանափակումների դեպքում, այն է՝* $\liminf\limits_{d\to 0}\, [d(z)]^2 \lg\lg \dfrac{1}{h(z)} > 0.$