

Л. А. Оганесян

### Уравнение распределения поперечных скоростей и коэффициент турбулентного перемешивания при движении жидкости на повороте

А. К. Ананяном [4] изложена теория циркуляции турбулентного потока на повороте, в которой проводится мысль о необходимости учета вертикальных составляющих поперечных скоростей и формы водовода.

Исходя из системы уравнений диффузионной теории турбулентности и откидывая в ней величины порядка квадрата кривизны оси водовода, А. К. Ананян получил для поворота, очерченного по дуге окружности, уравнение, служащее для определения поперечных скоростей. Для замыкания системы им вводится допущение о слабой изменяемости коэффициента турбулентного перемешивания.

Автором в предыдущей работе [3] в основу исследования были положены уравнения, отличающиеся от уравнений А. К. Ананяна тем, что входящий в них тензор напряжений симметричен. При этом было получено уравнение, подобное уравнению А. К. Ананяна. Замыкание системы там достигалось благодаря использованию опытных данных по распределению продольных скоростей. Поставленные граничные условия отличались от таковых, принятых А. К. Ананяном. Было показано, что в пределах принятой точности, уравнение справедливо для поворота, очерченного по любой плоской кривой.

Настоящая статья является развитием указанной работы автора.

Применением метода малого параметра учитываются величины порядка высших степеней кривизны. На каждом  $m$ -ом шагу определение поперечных скоростей сведено к решению сравнительно простого линейного дифференциального уравнения 4-го порядка, а определение давлений и коэффициента турбулентного перемешивания сведено к квадратурам.

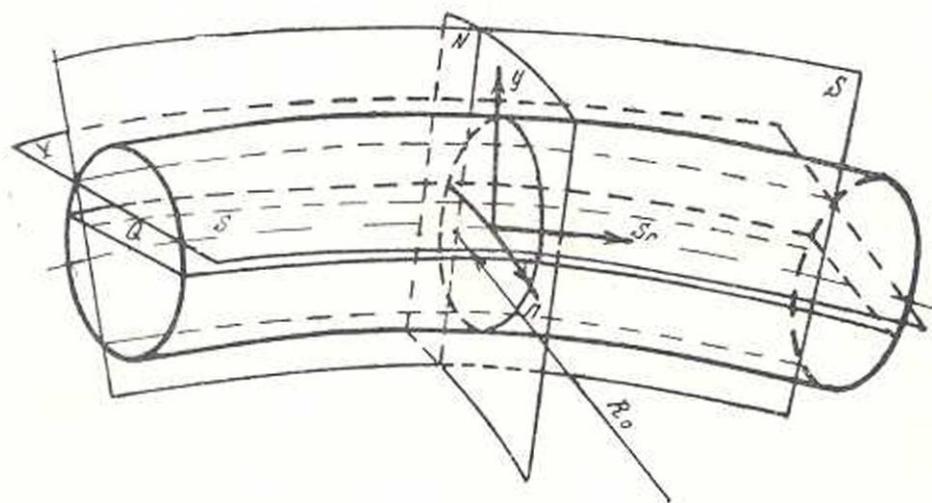
В основу исследований положены уравнения диффузионной теории турбулентности, записанные в криволинейных координатах [1, стр. 438, 439].

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} V_{x^i} \right) = 0 \\ & \rho \left\{ \frac{\partial V_{x^i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{V_{x^k}}{H_k} \frac{\partial V_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^3 \frac{V_{x^k}}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 \frac{V_{x^k} V_{x^i}}{H_k H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} - \rho F_{x^i} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{H_i}{H_k} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x^k} + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{ik}}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \right) - \tau_{kk} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln H_k) \right\}, \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где: } \tau_{ik} = \Lambda \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial V_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left[ V_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + V_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right] + \right. \\ \left. + 2\mathcal{E}_k^i \sum_{\lambda=1}^3 \frac{V_{x^\lambda}}{H_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\ln H_i) \right\} \end{aligned} \right\} (2)$$

За координатные поверхности приняты:

- 1) цилиндрические поверхности  $S$ , равноотстоящие от поверхности, проходящей через ось водовода  $s_0$  и перпендикулярные к плоскости  $Q$ , содержащей эту ось;
- 2) семейство плоскостей  $Y$ , параллельных плоскости  $Q$ ;
- 3) цилиндрические поверхности  $N$ , перпендикулярные к плоскости  $Q$  и проходящие через кривые  $n$ , ортогональные к семейству кривых  $s$  (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

В качестве малого параметра взята величина  $\lambda = \frac{1}{R_0}$ ,

где  $R_0$  — радиус кривизны оси  $s_0$ .

Если ширина водовода есть  $O(1)$  (где  $O(x)$  означает величину порядка  $x$ ), то при больших  $R_0$  можно утверждать: всякая производная вдоль линии  $s$  от функции, исчезающей при  $s \rightarrow -\infty$  и  $s \rightarrow \infty$ , имеет более высокий порядок малости по параметру  $\lambda$ , чем сама функция.

В [3] доказано, что с точностью до  $O\left(\frac{1}{R_0^2}\right)$  принятые криволинейные координатные поверхности могут быть заменены следующими:

- 1) коосвыми цилиндрами,
- 2) плоскостями, нормальными к оси цилиндров,
- 3) плоскостями, проходящими через ось цилиндров.

За единицу длины по оси  $s_0$  примем дугу, длиной в единицу. Тем самым установим параметр для поверхностей  $N$ .

Параметр для поверхностей  $S$  получим, взяв на кривой  $n$ , проходящей через  $(0, 0, 0)$ , в качестве параметра длину дуги, отсчитанную от точки  $(0, 0, 0)$ .

Для поверхностей  $Y$  за параметр примем координату точки пересечения  $Y$  с осью  $y$ .

Так как кривые  $n$  с точностью до  $O\left(\frac{1}{R_0^2}\right)$  могут быть заменены прямыми, а кривые  $s$  — дугами окружностей, то:

$$1) H_n = \frac{1}{|\text{grad} dq_n|} = 1 + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right),$$

$$2) H_y = 1,$$

$$3) H_s = \frac{1}{h_s},$$

$$\text{где } h_s = |\text{grad} q_s| = \frac{R_0 \cdot \theta}{R \cdot \theta} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right) = 1 - \frac{h}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

$$\text{Следовательно: } H_s = 1 + \frac{h}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right), \quad \frac{\partial H_s}{\partial n} = \frac{1}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Пусть известны  $\bar{V}$ ,  $r$ ,  $A$  с точностью до  $O\left(\frac{1}{R_0^{m-1}}\right)$  и  $V_s$  с точностью до  $O\left(\frac{1}{R_0^m}\right)$  (задаемся распределением  $V_s$  для замыкания системы (1)).

Пусть  $\bar{V}$ ,  $r$  и  $A$  имеют достаточное число производных. Напишем уравнения, связывающие величины  $O\left(\frac{1}{R_0^m}\right)$ , выделяя послед-

ние из основной системы уравнений (1) и приравнявая их нулю. Перенесем известные величины в правую часть равенства.

Для осуществления указанного выделения удобно  $\vec{V}$ ,  $p$ ,  $A$ ,  $H_i$  представить в виде рядов:

$$V_i = \sum_{m=1}^{\infty} V_i^{(m)}, \quad p = \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}, \quad A = \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)}, \quad H_i = \sum_{m=1}^{\infty} H_{im}.$$

При этом можно принимать  $V_n^{(0)} = V_s$ ,  $H_{i0} = H_i$ ,  $V_s^{(l)} = H_{il} = 0$  для  $l > 1$ .

В уравнении (1) введем новые обозначения:

$$x_1 = s, \quad x_2 = n, \quad x_3 = y.$$

Уравнение  $m$ -го приближения, полученное из уравнения проекции количества движения на „ $s$ “ обозначим (I), на „ $n$ “ — (II), на „ $y$ “ — (III), уравнение неразрывности обозначим (IV).

Нетрудно показать, что слагаемые, входящие в выражение ускорения, имеющие порядок  $\frac{1}{R_0^m}$ , являются величинами известными, и, как указывалось выше, переносятся в правую часть.

Так как в (2) знаменатель каждого слагаемого  $O(1)$ , то неизвестные  $O\left(\frac{1}{R_0^m}\right)$  входят лишь в  $\tau_{ik}^{(m)}$ .

$$\text{Отсюда следует, что слагаемые } \frac{\tau_{ik}}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \right)$$

и  $\tau_{ik} \frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}$  не входят в левую часть.

Из выражения для  $\tau_{ik}^{(m)}$  в левую часть уравнения войдет лишь член

$$A^{(0)} \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial V_{xi}^{(m)}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_{xk}^{(m)}}{\partial x^i} \right\} + A^{(m)} \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial V_{xi}^{(0)}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_{xk}^{(0)}}{\partial x^i} \right\},$$

т. е. из выражения для  $\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x^k}$  в левую часть войдет лишь член

$$\frac{\partial}{\partial x^k} A^{(0)} \left( \frac{\partial V_{xi}^{(m)}}{\partial x^k} + \frac{\partial V_{xk}^{(m)}}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} A^{(m)} \left( \frac{\partial V_{xi}^{(0)}}{\partial x^k} + \frac{\partial V_{xk}^{(0)}}{\partial x^i} \right).$$

Итак, запишем систему уравнений:

$$2 \frac{\partial}{\partial n} A^{(0)} \cdot \left( \frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} A^{(0)} \cdot \left( \frac{\partial V_y^{(m)}}{\partial n} + \frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial p^{(m)}}{\partial n} = \dot{f}_z, \quad (II)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} A^{(0)} \left( \frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y^{(m)}}{\partial n} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} A^{(0)} \left( \frac{\partial V_y^{(m)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial p^{(m)}}{\partial y} = f_3, \quad (III)$$

$$\frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial n} + \frac{\partial V_y^{(m)}}{\partial y} = f_4, \quad (IV)$$

Здесь в  $f_1, f_2, f_3$  входят лишь  $V_s^{(k)}, V_n^{(k)}, V_y^{(k)}, p^{(k)}, A^{(k)}$ ,

где  $k = 1, 2 \dots m-1$ .

$$\frac{\partial}{\partial n} A^{(0)} \left( \frac{\partial V_s^{(m)}}{\partial n} + \frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} A^{(0)} \left( \frac{\partial V_s^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y^{(m)}}{\partial s} \right) - V_n^{(m)} \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial n} -$$

$$- V_y^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n} A^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial y} A^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial p^{(m-1)}}{\partial s} = f_1,$$

$$\text{или } \frac{\partial}{\partial n} A^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial y} A^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial p^{(m-1)}}{\partial s} + V_n^{(m)} \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial n} + V_y^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} A^{(0)} \frac{\partial V_s^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n} A^{(0)} \frac{\partial V_n^{(m)}}{\partial n} = f_1,$$

Итак, на каждом  $m$ -ом шагу получаем систему (I, II, III, IV).

Поставим граничные условия для этой системы таким образом, чтобы решение ее определялось единственным способом.

Пусть поверхность  $\Gamma$  означает переходной слой между турбулентным ядром и ламинарным подслоем, который считаем достаточно тонким, чтобы пренебречь его толщиной по сравнению с диаметром водовода.

Согласно сказанному в [3] принимаем, что по обе стороны от

$\Gamma \left. \frac{\vec{V}}{r} \right|_r = \left. \frac{\vec{V}}{r} \right|_r$ , тогда для  $m$ -ого приближения имеем  $\left. \frac{\vec{V}}{r} \right|_{\Gamma}^{(m)} = \left. \frac{\vec{V}}{r} \right|_{\Gamma}^{(m)}$  (скорость со значком „л“ означает скорость в ламинарном подслое, со значком „т“ — в турбулентном ядре).

Принимаем на  $\Gamma$  равными касательные напряжения, лежащие на поверхности  $S = \text{const}$ .

Разложим  $\vec{V}_l^{(m)}$  в строку Тейлора на  $\Gamma$  (здесь  $V_l$  — компонент скорости по направлению криволинейной координатной линии  $L$ , „параллельной“ стенке водовода и лежащей на поверхности  $S = \text{const}$ .)

$$0 = \vec{V}_l^{(m)}(L_0) = \vec{V}_l^{(m)}(\Gamma) + \Delta N \cdot \frac{\partial}{\partial N} \vec{V}_l^{(m)}(\Gamma) = \vec{V}_l^{(m)} + \left( \frac{\partial \vec{V}_l}{\partial N} + \frac{\partial \vec{V}_N}{\partial l} \right) \Delta N + 0 (\Delta N)$$

(здесь  $N \perp L$ ).

При этом можно ограничиться членом при  $\Delta N$  в первой степени, так как  $\frac{\partial^2 \vec{V}_l^{(m)}}{\partial N^2}$  — величина  $O \left( \frac{1}{\Delta N} \right)$ .

Для ламинарного слоя действительны уравнения I, II, III и IV с  $A = \text{const} = \mu$ .

Учитывая, что с точностью до  $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$  выполняются равенства:

$$V_n^{(m)} = V_N^{(m)} \cos(N, n) + V_l^{(m)} \cos(l, n),$$

$$V_y^{(m)} = V_N^{(m)} \cos(N, y) + V_l^{(m)} \cos(l, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(n, N) \frac{\partial}{\partial N} + \cos(n, l) \frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos(N, y) \frac{\partial}{\partial N} + \cos(l, y) \frac{\partial}{\partial l},$$

получим, что  $\frac{\partial^2 V_l^{(m)}}{\partial N^2}$  является величиной  $O\left(\frac{1}{\Delta N}\right)$ , если  $V_l^{(m-1)} \sim O(1)$ ,

$$а \quad \frac{\partial V_k^{(m-1)}}{\partial x^i} \text{ и } \frac{\partial^2 V_k^{(m)}}{\partial x^i \partial x^j} \sim O\left(\frac{1}{\Delta N}\right).$$

Таким образом, индукцией по  $m$  получим, что

$$\frac{\partial^2 V_l^{(m)}}{\partial N^2} \sim O\left(\frac{1}{\Delta N}\right).$$

Из предыдущих формул следует также, что с точностью до  $O\left(\frac{1}{R_0^2}\right)$

$$\Delta N \cdot \left( \frac{\partial V_l^{(m)}}{\partial N} + \frac{\partial V_N^{(m)}}{\partial l} \right) = \frac{\Delta N}{\mu} \tau_{Nl}^{(m)} + \phi,$$

где  $\phi$  функция  $V_l^{(k)}$ ,  $\frac{\partial V_j^{(k)}}{\partial x^i}$ ,  $\frac{\partial^2 V_j^{(k-1)}}{\partial x^i \partial x^k}$   $k = 1, 2 \dots m$ .

Но так как  $V_l^{(m)} \sim O(1)$ , то  $\Delta N \cdot V_l^{(m)}$  может быть откинута. Из условия  $\tau_{Nl}^{(m)} = \tau_{Nl}^{(m)}$  получаем граничное условие:

$$V_l^{(m)} + \frac{\Delta N}{\mu} \tau_{Nl}^{(m)} \Big|_r = \phi(\Gamma).$$

Этим граничным условием учитывается динамический эффект влияния ламинарного подслоя.

Итак, имеем систему (I, II, III, IV) с граничными условиями:

$$V_N^{(m)}(\Gamma) = 0,$$

$$V_l^{(m)} + \frac{\delta}{\mu} \tau_{Nl}^{(m)} \Big|_r = \phi(\Gamma),$$

где  $\delta$  — толщина ламинарного подслоя.

Уравнения (II) (III) и (IV) могут быть приведены к сравнительно простому уравнению 4-го порядка вида

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \Lambda^{(0)} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial n^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \Lambda^{(0)} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \Lambda^{(0)} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial n^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \Lambda^{(0)} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial y \partial n} \left( \Lambda^{(0)} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial y \partial n} \right) = f \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$F^{(m)}(\Gamma) = \varphi_1$$

$$\frac{\Lambda^{(0)} \delta}{\mu} \frac{\partial^2 F^{(m)}}{\partial N^2} + \left( 1 - \frac{\Lambda^{(0)} \delta}{\mu r_0} \right) \frac{\partial F^{(m)}}{\partial N} \Big|_1 = \varphi_2.$$

Решение этого уравнения служит для определения компонентов поперечных скоростей. В [3] дано решение уравнения первого приближения в случае, когда поперечное сечение водовода есть круг. Автором показано, что для водовода прямоугольного сечения оператор уравнения (3) для первого приближения положительно определен, тем самым это уравнение можно решать методом Рунца.

Нетрудно доказать единственность решения этого уравнения, вытекающую из однородности граничных условий [2, § 10], когда

$$\varphi_2 = 0 \text{ и } \varphi_1 = 0.$$

Из уравнений (II) и (III) можно определить также  $p^{(m)}$  с точностью до произвольной функции  $\pi(s)$ .

Подставляя в уравнение (1)  $p^{(m)} = p + \pi(s)$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \Lambda^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Lambda^{(m)} \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} \right) = \pi'(s) + \tilde{f}_1.$$

Определим из этого уравнения  $\Lambda^{(m)}$ .

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \Lambda^{(m)} + \frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda^{(m)} + \Lambda^{(m)} \Delta V_s^{(0)} = \pi'(s) + \tilde{f}_1$$

Пусть в точке  $(n=0, y=0)$   $V_s^{(0)}$  достигает максимума (очевидно, что этим мы не ограничиваем общности наших рассуждений).

В окрестности  $(n=0, y=0)$   $V_s^{(0)}$  может быть разложена так:

$$V_s^{(0)} = c + kn^2 + 2mny + ly^2 + b,$$

где в  $b$  входят величины более высокого порядка. Приведем ортогональным преобразованием квадратичную форму к главным осям  $\eta$  и  $\xi$ .

Учитывая, что в уравнении (1) левая часть является инвариантом ортогонального преобразования, получим:

$$\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial A^{(m)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial A^{(m)}}{\partial \eta} + A^{(m)} \cdot \Delta V_S^{(0)} = \pi'(s) + \bar{f}_1$$

$$V_S^{(0)} = c + p\zeta^2 + q\eta^2 + R.$$

Напишем уравнение характеристик для уравнения (1), умножив обе части его на  $e^z$ .

Получим:

$$\frac{d\zeta}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}} = \frac{d\eta}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \eta}} = \frac{dz}{\Delta V_S^{(0)}} = \frac{dz}{\bar{f}_1}. \quad (4)$$

Здесь  $x = A^{(m)} \cdot e^z$ ,  $\bar{f}_1 = e^z (\pi'(s) + \bar{f}_1)$ .

Уравнение  $\frac{d\zeta}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}} = \frac{d\eta}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \eta}}$  легко интегрируется.

Действительно:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \eta}}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}}. \quad (5)$$

Напишем уравнение семейства кривых  $\vartheta(\zeta)$ , ортогональных к  $\eta(\zeta)$ :

$$\frac{d\vartheta(\zeta)}{d\zeta} = - \frac{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \vartheta}}.$$

Интегралом этого уравнения является  $V_S^{(0)}(\zeta, \vartheta) = \text{const}$ .

Итак,  $\eta(\zeta)$  — это кривые, ортогональные к изотам  $V_S^{(0)}$ .

Подставив  $\eta(\zeta)$  в систему (4) и решив уравнение

$$\frac{d\zeta}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}} = \frac{dz}{\Delta V_S^{(0)}},$$

получим:

$$z = \int \frac{\Delta V_S^{(0)}(\zeta, \eta(\zeta))}{\frac{\partial V_S^{(0)}(\zeta, \eta(\zeta))}{\partial \zeta}} d\zeta + C.$$

Наконец, решив уравнение  $\frac{dz}{\Delta V_S^{(0)}} = \frac{dz}{\bar{f}_1}$  (6), получим:

$$x = \int \frac{\bar{f}_1}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta}} d\zeta + C. \text{ Отсюда определим } A^{(m)}:$$

$$A^{(m)} = \left[ \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\exp \left( \int_s^{\zeta} \frac{\Delta V_s^{(0)}}{\partial V_s^{(0)}} dt \right)}{\frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial s}} \bar{f} ds + C \right] \times \\ \times \exp \left( - \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\Delta V_s^{(0)}}{\partial V_s^{(0)}} dt \right).$$

Нужно выбрать  $C$  так, чтобы

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \zeta \rightarrow 0}} |A^{(m)}(\zeta, \eta)| < +\infty.$$

Выражение для  $A^{(m)}$  говорит о том, что  $A^{(m)}$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, решение которого можно записать и так:

$$A^{(m)} = \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\exp \left( - \int_s^{\zeta} \frac{\Delta V_s^{(0)}}{\partial V_s^{(0)}} dt \right)}{\frac{\partial V_s^{(0)}}{\partial s}} \bar{f} ds + \\ + A^{(m)}(\varepsilon) \exp \left( - \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\Delta V_s^{(0)}}{\partial V_s^{(0)}} dt \right).$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$   $A^{(m)}$  должно оставаться ограниченным.

В силу (5) имеем:

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{p \cdot \zeta + Q_1}{q \cdot \eta + Q_2}, \text{ где в } Q_1 \text{ и } Q_2 \text{ входят величины второго порядка от } \eta \text{ и } \zeta.$$

Поэтому в окрестности  $(0,0)$  при  $p$  и  $q \neq 0$  можно вместо последнего уравнения рассмотреть уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{p}{q} \frac{\zeta}{\eta}.$$

Особая точка этого уравнения — узел, так как  $p$  и  $q$  одного знака.

Не ограничивая общности будем считать, что в случае, когда особая точка является неособым узлом, интегральные кривые касаются оси  $\zeta$ .

Тогда  $\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial \zeta} = p\zeta + Q$  для всех кривых, за исключением одной.

Имея в виду это, преобразуем  $e^{-\int_{\zeta}^{\xi} \frac{\Delta V_S^{(0)}}{\partial V_S^{(0)}} dt}$ , входящее в выражение  $A^{(m)}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int_{\zeta}^{\xi} \frac{\Delta V_S^{(0)}}{\partial V_S^{(0)}} dt\right) &= \exp\left(-\int_{\zeta}^{\xi} \left(\frac{\Delta V_S^{(0)}}{\partial V_S^{(0)}} - \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\Delta V_S^{(0)}(0)}{p \cdot t}\right) dt\right) \cdot \exp\int_{\zeta}^{\xi} \frac{-\Delta V_S^{(0)}(0)}{p \cdot t} dt = \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^{-\frac{\Delta V_S^{(0)}(0)}{p}} \times \\ &\times \exp\left(-\int_{\zeta}^{\xi} \psi(t, \eta(t)) dt\right). \end{aligned}$$

При  $\xi \rightarrow 0$  этот член стремится к 0.

Преобразуем первый член в выражении для  $A^{(m)}$ .

$$\begin{aligned} &\int_{\zeta}^{\xi} \frac{\exp\left(-\int_{s}^{\zeta} \frac{\Delta V_S^{(0)}}{\partial V_S^{(0)}} dt\right) \cdot i \cdot ds}{\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial s}} = \\ &= \int_{\zeta}^{\xi} \frac{\exp\left(-\int_{s}^{\zeta} \psi dt\right)}{p(s+Q_3)} \left(\frac{s}{\zeta}\right)^{-\frac{\Delta V_S^{(0)}(0)}{p}} i \cdot ds = \\ &= \frac{1}{\zeta^{\lambda}} \int_{s}^{\zeta} \exp\left(-\int_{s}^{\zeta} \psi dt\right) s^{\lambda-1} \cdot P(s, \eta(s)) ds, \end{aligned}$$

При  $\xi \rightarrow 0$  последнее выражение ограничено (здесь  $\lambda = \frac{\Delta V_S^{(0)}(0)}{p}$ ).

Итак, искомое выражение для  $A^{(m)}$  имеет вид:

$$A^{(m)} = \frac{1}{\zeta^{\lambda}} \int_{0}^{\zeta} e^{-\int_{s}^{\zeta} \psi dt} s^{\lambda-1} P(s, \eta(s)) ds. \quad (7)$$

В случае, особого узла рассуждения ведутся совершенно аналогично.

Исследование особой точки уравнения характеристик (6) привело бы нас к заключению, что особая точка этого уравнения типа „седло“. Это дало возможность определить  $A^{(m)}$  из единственного условия ограниченности.  $A^{(m)}$  определяется или при помощи величин, доступных измерению (продольные скорости), или вычисленных в предыдущих приближениях.

Определим, наконец,  $\pi(s)$ .

У нас имеется еще неиспользованное граничное условие

$$0 = V_S^{(m)} + \delta \frac{\partial V_S^{(m)}}{\partial N}.$$

Член  $\frac{\partial^2 V_S^{(m)}}{\partial N^2}$  откидывается так же, как и раньше.

Получаем:

$$0 = V_S^{(m)} + \frac{\delta}{\mu} \left. \frac{\partial V_S^{(m)}}{\partial N} \right|_{\Gamma},$$

или:

$$0 = V_S^{(m)} + \frac{\delta}{\mu} A^{(m)} \frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial N} + \psi_2 \Big|_{\Gamma}.$$

Это равенство даст изменение  $A^{(m)}$  по  $s$ ; (в  $\psi_2$  входят лишь известные величины).

Так как мы имеем граничное условие

$$0 = V_S^{(0)} + \frac{\delta}{\mu} A^{(0)} \frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial N},$$

то  $\frac{\partial V_S^{(0)}}{\partial N} \neq 0$  (т. к.  $V_S^{(0)}|_{\Gamma} \neq 0$ ).

Поэтому  $A^{(m)} = G(\Gamma)$ , где  $G(\Gamma)$  известная функция.

Из этого равенства определяем  $\frac{\pi(s) \cdot A^{(0)}}{\gamma - 1}$ , входящее в  $A^{(m)}$

как слагаемое.

Но это граничное условие дает несколько больше, чем только изменение  $A^{(m)}$  по  $s$ .

Ведь  $A^{(m)}$  в сечении известно с точностью до постоянной. А это граничное условие должно выполняться и в фиксированном сечении.

Последнее граничное условие может явиться контрольным при выборе эмпирической зависимости для распределения продольных скоростей. Мы будем откидывать все выражения для  $V_s$ , не удовлетворяющие этому граничному условию.

Итак, единственность решения обеспечена. Нетрудно видеть, что выполняется условие интегрируемости уравнений.

Из изложенного выше следует, что беря достаточно большое число приближений можно вычислять скорости и давления с большой точностью.

Последовательность вычисления такова: зная величины  $\bar{V}$ ,  $\rho$  и  $A$  в  $(m-1)$ -ом приближении, из (3) находим поперечные скорости в  $m$ -ом приближении, из (II) и (III)—давления  $p^{(m)}$  и из (7)—значение коэффициента турбулентного перемешивания.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 3 I 1953

#### Լ Ի Թ Ե Դ Ա Տ Ր Ա

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. ГОНТИ, 1938.
2. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. Изд. техн.-теор. литер., Л., 1950.
3. Օգանյան Լ. Ա. Օ поперечной циркуляции на повороте водовода. ДАН Армянской ССР, т. XV, № 3, 1952.
4. Ասանյան Ա. Կ. Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока (Автореферат диссертации). Ереван, 1952.

#### Է. Ն. Հովհաննիսյան

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ  
ԵՎ ՏՈՒՐԲՈՒԼԵՆՏ ՄԱԾՈՒՑԻԿՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑԸ ՀԵՂՈՒԿԸ  
ՈԼՈՐԱՆՈՎ ՀԱՐԺՎԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տուրբուլենտության գիֆուզիոն տեսության համասարումները լուծելու համար հոգալիմում կիրառվում է փոքր պարամետրի մեթոդը:

Եթե երկայնական արագությունների բաշխումը տրված է, ապա վերահիշյալ համասարումների սխեմներ յուրաքանչյուր  $0 \leq r < R$  քայլում բերվում է մասնակի ածանցյալներով համեմատաբար պարզ գծային 4-րդ կարգի մեկ համասարման (3) (արագությունները որոշելու համար) և մեկ կվադրատուրայի (տուրբուլենտ մածուցիկության գործակիցը որոշելու համար):