

А. К. Аняня

Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока в водоводах круглого и прямоугольного сечений

Структура турбулентного потока столь сложна, все величины, входящие в уравнения движения (уравнение Навье-Стокса), испытывают столь значительные изменения во времени и в пространстве, что если эти уравнения для мгновенных истинных скоростей и применимы к отдельной частице, то нахождение их интегралов является весьма трудным.

Трудность эта, главным образом, заключается в невозможности пока установления начальных и граничных условий интегрирования. Приборы, которыми измеряются скорости и давления, дают осредненные их значения. Этим и объясняется стремление многих исследователей составить такие дифференциальные уравнения турбулентного потока, которые были бы основаны на осредненных величинах скоростей и давлений.

Рейнольдс, исходя из уравнения Навье-Стокса, и отказавшись от точного воспроизведения картины турбулентного потока в любой точке пространства, в любой момент времени, получил осредненные уравнения турбулентного потока [1]:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \overline{u'u'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{xy} - \rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{xz} - \rho \overline{u'w'}), \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xy} - \rho \overline{u'v'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yy} - \rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{yz} - \rho \overline{v'w'}), \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xz} - \rho \overline{u'w'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yz} - \rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zz} - \rho \overline{w'w'})^*. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из системы (1) видно, что уравнения турбулентного потока, написанные для средних величин скоростей и давлений, имеют такой же вид, как уравнения Навье-Стокса, с той лишь разницей, что компоненты тензора напряжений увеличены всюду на величину $\tau_{xx} = -\rho \bar{u}'^2$, $\tau_{xy} = -\rho \bar{u}'v'$, $\tau_{xz} = -\rho \bar{u}'w'$, $\tau_{yy} = -\rho \bar{v}'^2$, $\tau_{yz} = -\rho \bar{v}'w'$, $\tau_{zz} = -\rho \bar{w}'^2$, которые носят название добавочного напряжения.

Многие исследователи [14] принимали, что эти дополнительные напряжения можно выразить через производные по координатам от средних скоростей, т. е.

$$\begin{aligned} -\rho \bar{u}'u' &= 2A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, & -\rho \bar{v}'v' &= 2A \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, & -\rho \bar{w}'w' &= 2A \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \\ -\rho \bar{u}'v' &= A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), & -\rho \bar{u}'w' &= A \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \\ -\rho \bar{v}'w' &= A \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где A зависит не только от координат и времени (x, y, z и t), но и от самих функций $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Такая замена вызвана сходством некоторых внутренних свойств ламинарного и турбулентного движения [1].

После подстановки значения дополнительных турбулентных напряжений из (2) в (1) получаем окончательное выражение для осредненного турбулентного потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \left. \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \left. \right], \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Присоединяя к этой системе уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

получаем не замкнутую систему, так как число неизвестных w , u , $\bar{v}$, Λ и $\bar{p}$ превышает число уравнений.

При решении практических задач об изгибе потока, мы принимаем заданным поле продольных скоростей, тогда из системы (3) можно получить отдельные составляющие скорости, давления и величину Λ , которая носит название коэффициента турбулентной вязкости. Необходимо указать, что этот коэффициент для изогнутого потока приближается к скалярной величине, так как в циркуляционном потоке градиентные характеристики скоростного поля меняются слабо [2]. Принимая движение жидкости на повороте осесимметричным, из уравнения неразрывности следует существование такой функции $F(x, y)$, при которой*

$$\bar{u} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (5)$$

Подставляя значения $\bar{u}$ и $\bar{v}$ из уравнения (5) в систему (3), после преобразования ее в полярных координатах, дифференцирования первого уравнения по y , а второго уравнения по x , исключения $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$ и отбрасывания величины $O\left(\frac{1}{R^2}\right)^{**}$, получим окончательное дифференциальное уравнение изогнутого в плане турбулентного потока [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \\ + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\Lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = f_1 \end{aligned} \quad (6)$$

В. М. Маккавеев при анализе турбулентного движения на поворотах водовода, на основании данных экспериментов А. В. Караушева [3], пренебрегает производными от коэффициента турбулентной вязкости по координатам ввиду их малости (во вторых слагаемых в квадратных скобках правых частей системы уравнений (3)).

Надо отметить, что такое допущение содержит некоторый произвол, так как можно было бы с таким же успехом отбросить

* После приведения системы (3) и уравнения (4) к цилиндрическим координатам (R, θ, y) и замены $x = R - R_0$ (R_0 — радиус оси закругления водовода), отбросив $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ [13].

** Рассматриваем повороты с большим радиусом закругления.

производные от A по координатам и в остальных членах правой части системы (3).

В. М. Маккавеев предполагает, что сохранение производных от A в некоторых членах правой части системы (3) все же больше приближает задачу к анализу турбулентного движения, чем тогда, когда пренебрегать всеми производными от A . Необходимо отметить, что в динамической метеорологии в основном пользуются усеченными уравнениями турбулентного движения [4] в том виде, в каком принимает В. М. Маккавеев. Многие задачи гидравлики и динамической метеорологии решены на основе усеченных уравнений турбулентного потока и получены положительные результаты [5, 6, 7, 8].

Учитывая вышеуказанные упрощающие предположения, основное дифференциальное уравнение циркуляционного потока (6) можно представить в следующем виде [13]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f_1. \quad (7)$$

Наша задача заключается в том, чтобы теоретически и экспериментально показать, что хотя уравнение (7) является приближенным (так как при этом несколько нарушается условие симметричности тензора турбулентных касательных напряжений в потоке), но результаты, получаемые при решении полного уравнения (6), с переменными и осредненными значениями A и усеченного уравнения (7), с переменным A , практически очень близки.

Для интегрирования уравнений (6) и (7) необходимо установить граничные условия. Предположим, что весь поток состоит из турбулентного ядра и весьма тонкой ламинарной пленки. Наличие ламинарной пленки вводит существенные изменения в теоретический анализ вообще, и для циркуляционного потока, в частности. При этом необходимо составить две самостоятельные системы дифференциальных уравнений. Одно уравнение будет относиться к турбулентной зоне (уравнение (6) или (7)), второе к ламинарной зоне. Это второе уравнение очевидно будет иметь следующий вид:

$$\mu \left[\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right] = f_2. \quad (8)$$

Граничные условия (напр., для круглого водовода) будут следующие:

1) условие прилипания частиц жидкости к твердой поверхности водовода

$$F_x \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

2) условие равенства скоростей на контакте двух слоев (турбулентное ядро и ламинарная пленка)

$$\left. \frac{\partial F_m}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial F_a}{\partial r} \right|_{r=r_0},$$

3) условие неразрывности циркуляционного потока

$$\int_0^{r_0} \frac{\partial F_m}{\partial r} dr + \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial F_a}{\partial r} dr = 0,$$

4) условие равенства касательных напряжений на контактной поверхности

$$\Lambda \left(\frac{\partial^2 F_m}{\partial r^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_m}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} = \mu \left. \frac{\partial^2 F_a}{\partial r^2} \right|_{r=r_0}.$$

Вышеуказанные граничные условия (равенства касательных составляющих скоростей и напряжений на контактной поверхности) можно представить и в следующем виде [9], [13]:

$$F \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \delta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial F}{\partial r} \left(1 - \frac{\Lambda \delta}{\mu r_0} \right) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (9)$$

При решении задачи о поперечной циркуляции в напорных водоводах круглого сечения, Л. А. Оганесян [9], основываясь на полных уравнениях осредненного турбулентного потока (6), получает следующее уравнение:

$$4\Lambda y - r \frac{d}{dr} \Lambda r \frac{d}{dr} y = \frac{1}{R_0} \int_0^r \tau \left[\bar{u} - \frac{d(u^2 r)}{dr} \right] dr + c,$$

где $y = \chi r$, $\chi = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right)$, $F(r, \theta) = \bar{f}(r) \cos \theta$. (10)

Принимая эллиптический закон распределения продольных скоростей ($\bar{u}$) по Караушеву [3] и взяв коэффициент турбулентной вязкости из опытов Никурадзе [10], путем численного интегрирования уравнения (10) получаем компоненты скоростей поперечной циркуляции. Результаты подсчетов представлены силовыми линиями на фиг. 1.

Перейдем к решению той же задачи, пользуясь усеченным уравнением осредненного турбулентного потока (7).

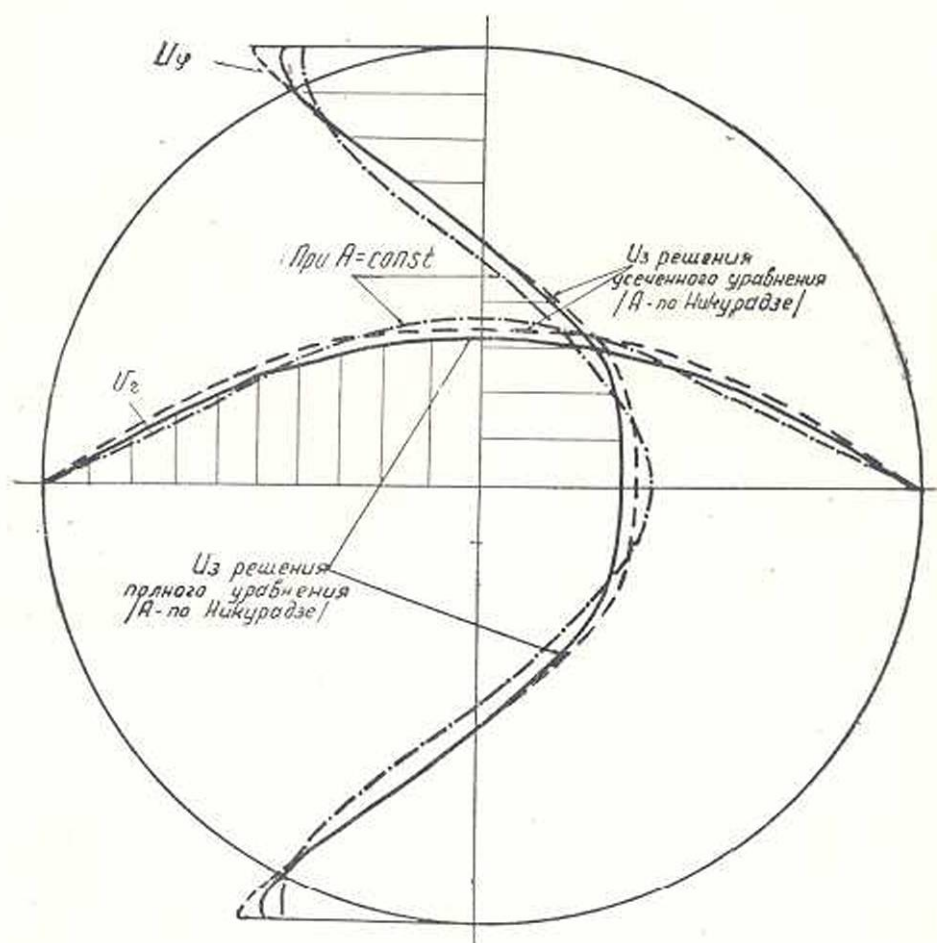
Вариационный интеграл уравнения (7) можно представить в следующем виде:

$$\Lambda(F, F) = \iint_S \Lambda \left\{ \left[\nabla \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\nabla \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dS - 2 \int_{\Gamma} f_1 F dl = \min.$$

Осуществляя переход от декартовой системы координат к полярной

* Решение задачи о поперечной циркуляции равносильно решению вариационной задачи о минимуме функционала $\Lambda(F, F)$. [13].

и принимая $F = f(r) \cos \theta$, минимизирующей функционал можно представить в следующем виде:



Фиг. 1.

Распределение поперечных скоростей в трубе.

$$\begin{aligned}
 \Lambda(F, F) = \int_0^{r_0} \Lambda \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\
 \left. + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \right]^2 \sin^4 \theta + 4 \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \right]^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\} + \\
 \left. + \left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \right]^2 \cos^2 2\theta \right\} r dr d\theta. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав (11) по θ и записав уравнение Эйлера в функционале $\Lambda(F, F)$, получим:

$$\left[3A\chi - 3Ar \frac{d\chi}{dr} - Ar^2 \frac{d^2\chi}{dr^2} - \left(r \frac{d\chi}{dr} + 2\chi \right) r \frac{dA}{dr} \right] r = \\ = \frac{1}{R_0} \int r \left[u^2 - \frac{d(u^2 r)}{dr} \right] + C = \psi, \quad (12)$$

$$\text{где} \quad \chi = \frac{d}{dr} \left(\frac{i}{r} \right). \quad (13)$$

Принимая эллиптический закон распределения продольных скоростей по Караушеву, а коэффициент турбулентного перемешивания по данным опытов Никурадзе (эти данные хорошо аппроксимируются кривой $rc(r-1)$), уравнение (12) можно представить в следующем виде:

$$r^2(r-1) \frac{d^2\chi}{dr^2} + r^2(5r-4) \frac{d\chi}{dr} - r(r-1)\chi = 0. \quad (14)$$

Делая подстановку

$$\chi = y r^{p_0}, \quad (15)$$

уравнение (14) можно представить в следующем виде:

$$r(r-1) \frac{d^2y}{dr^2} + [(2p_0+5)r - (2p_0+4)] \frac{dy}{dr} + (p_0+2)y = \psi. \quad (16)$$

Это есть гипергеометрическое дифференциальное уравнение Гаусса, решение которого известно [11].

После решения уравнения (16) получаем значение функции y , а по уравнению (15) — функции χ . Путем последовательного интегрирования определяется функция поперечной циркуляции, а из уравнения неразрывности — компоненты скоростей поперечной циркуляции*. Окончательные результаты показаны на фиг. 1 пунктиром.

Решение той же задачи, с осредненными значениями коэффициента турбулентной вязкости, приводит к решению уравнения

$$\Delta^2 F = \frac{\rho}{A_{cp}} u \frac{\partial u}{\partial y} = Br \cos \theta. \quad (17)$$

Сохраняя прежние граничные условия интегрирования и распределение продольных скоростей, окончательные выражения для компонента скоростей поперечной циркуляции можно представить в следующем виде.

Радиальная составляющая:

$$u_r = \frac{\rho \rho u_{max}^2}{12 A_{cp} R_0} r_0^2 \left\{ \frac{1}{5} \lambda^4 + \frac{\left(-\frac{4}{5} - 4\kappa_1 \right)}{2(1+3\kappa_1)} \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\left(\frac{4}{5} + 4\kappa_1 \right)}{2(1+3\kappa_1)} - \frac{1}{5} \right] \right\} \sin \theta. \quad (18)$$

* Уравнение (12) было проинтегрировано также численным методом.
Известия VI, № 1—4

Касательная составляющая:

$$u_0 = \frac{\rho \rho_0 u_{\max}^2}{12 A_{\text{ср}} R_0} r_0^2 \left\{ \lambda^4 + \frac{3 \left(-\frac{4}{5} - 4k_1 \right)}{2(1+3k_1)} \lambda^2 + \left[\frac{4}{5} + 4k_1 \right] \frac{1}{2(1+3k_1)} - \frac{1}{5} \right\} \cos \theta \quad (19)$$

где

$$\lambda = \frac{r}{r_0}; \quad k_1 = \frac{A \cdot \delta}{\mu r_0}$$

δ — толщина ламинарной пленки, которая определяется по формуле автора [13]:

$$\delta = \frac{8\mu(1,8 \lg Re - 1,5)^2}{\rho V_{\text{ср}}}$$

$$A = - \frac{\gamma}{2} \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

Результаты подсчетов, произведенных по последним формулам, представлены на фиг. 1 пунктиром с точкой.

Как видно из фиг. 1, все три варианта решения одной и той же задачи (при одинаковых граничных условиях и одинаковом распределении продольных скоростей) практически приводят к одному результату.

Из вышеприведенных расчетов можно сделать следующий вывод: для расчета поперечной циркуляции в круглых водоводах приближенно можно пользоваться усеченными уравнениями осредненного турбулентного потока или уравнениями системы (3) с осредненным значением коэффициента A . Такой вывод имеет практически очень важное значение, так как решение задачи поперечной циркуляции для других форм водовода, основанных на полных уравнениях с переменным коэффициентом A , связано с весьма громоздкими вычислительными операциями, требующими много времени.

Как было показано выше, особенно упрощается решение задачи (без чувствительного ущерба для точности результатов), если в системе уравнений (6) принять среднее значение для коэффициента турбулентной вязкости. Может возникнуть сомнение, что в этом случае уравнение циркуляционного движения ничем не будет отличаться от уравнения ламинарного движения. Такое сомнение лишено всякого основания по следующим причинам.

При решении задачи о циркуляции в турбулентном потоке мы задаемся законом изменения продольных скоростей и, в соответствии с этим, определяем среднее значение для коэффициента A . Нельзя утверждать, что (например, для трубы) в ламинарном потоке продольные скорости могут быть описаны логарифмическими или иными кривыми, отличными от параболы.

Введение в наши уравнения среднего значения коэффициента A дает возможность приближенно учесть эффект перемешивания, который имеет место только при турбулентном движении. Это положение приводит к весьма существенным изменениям (качественным, и количественным) конечных результатов, так как в скоростном поле отражаются все основные особенности турбулентного потока.

Но главная причина заключается не в этом. При решении задачи для ламинарного движения мы должны были принимать, что все компоненты скоростей у стенки водовода равны нулю. При решении же задачи для турбулентного движения принимаем, что ни одна компонента скорости на "стенке" не равна нулю.

Ясно, что различные граничные условия не только приводят к различным методам решения одних и тех же уравнений, но дают как качественно, так и количественно, принципиально различные результаты.

Результаты решения многочисленных задач, произведенного исходя из осредненного значения коэффициента A при граничных условиях (9), хорошо совпадают с результатами экспериментов, произведенных при $Re=20000-250000$.

Решение задачи о поперечной циркуляции для прямоугольных водоводов с осредненным коэффициентом турбулентной вязкости сводится к решению бигармонического уравнения Пуассона

$$\Delta^2 F = B \cdot y^*, \quad (20)$$

с граничными условиями

$$F|_{\Gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{A \cdot \delta}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Задача решается вариационными методами [13]. Функцию поперечной циркуляции будем искать в следующем виде:

$$F = A_1 \left[\lambda \cos \frac{\pi x}{2a} + (x^2 - a^2) \right] \left[\mu_1 \sin \frac{\pi y}{b} + y(y^2 - b^2) \right] + \\ + B_1 \left[\lambda_1 \cos \frac{3\pi x}{2a} + (x^2 - a^2) \right] \left[\mu_2 \sin \frac{3\pi y}{b} + y(y^2 - b^2) \right]. \quad (21)$$

где коэффициенты A_1 и B_1 определяются из минимизирующего функционала

$$\Lambda(F, F) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - B y F \right\} ds.$$

Беря производные от минимизирующего функционала один раз по A_1 , а второй раз по B_1 и приравнявая каждую в отдельности нулю, получаем два уравнения, из которых определяем A_1 и B_1 .

* При этом принят эллиптический (по Караушеву) закон распределения поперечной скорости.

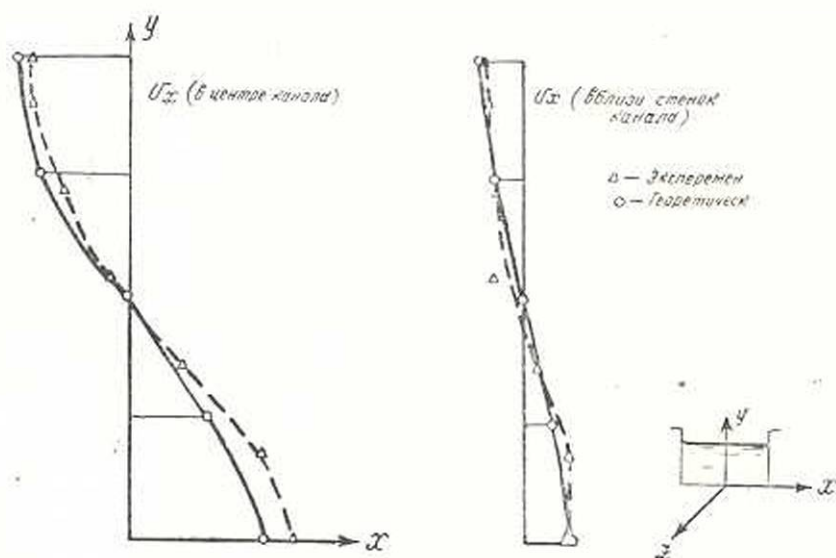
Компоненты скоростей поперечной циркуляции окончательно можно представить в следующем виде:

$$u_x = -\frac{B}{2R} \left\{ M \left[\lambda \cos \frac{\pi x}{2a} + \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right] \left[8 \cos \frac{\pi y}{b} + 3 \left(\frac{y}{b} \right)^3 - 1 \right] + \right. \\ \left. + M_1 \left[\lambda_1 \cos \frac{3\pi x}{2a} + \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right] \left[-8 \cos \frac{3\pi y}{b} + 3 \left(\frac{y}{b} \right)^3 - 1 \right] \right\} \quad (22)$$

$$u_y = \frac{B}{2R} \left\{ M \left[-\lambda \sin \frac{\pi x}{2a} + 2 \left(\frac{x}{a} \right) \right] \left[\frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{y}{b} \right)^3 - \left(\frac{y}{b} \right) \right] + \right. \\ \left. + M_1 \left[\lambda_1 \sin \frac{3\pi x}{2a} + 2 \left(\frac{x}{a} \right) \right] \left[-\frac{8}{3\pi} \sin \frac{3\pi y}{b} + \left(\frac{y}{b} \right)^3 - \left(\frac{y}{b} \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

где безразмерные коэффициенты M , M_1 , λ , λ_1 зависят только от соотношений глубин и ширины водовода и легко определяются.

Результаты теоретических подсчетов приведены на фиг. 2. На той же фигуре даны компоненты скоростей поперечной циркуляции, полученные из опытов автора, произведенных в Гидравлической лаборатории Водно-энергетического института АН Армянской ССР.



Фиг. 2.

Распределение поперечных скоростей для прямоугольного водовода.

На основании изложенного выше приходим к выводу, что поперечную циркуляцию для водоводов круглого и прямоугольного сечений можно приближенно определить из усеченного уравнения осредненного турбулентного потока или из полного дифференциального уравнения с осредненным значением коэффициента A , так как погрешности, получаемые при этом (по сравнению с данными, полу-

чаемыми из полного дифференциального уравнения), практически никакой роли не играют. Этот вывод подтверждается также данными экспериментов.

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 3 I 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Динамическая метеорология, часть II, под ред. Извекова Б. И. и Кочина Н. Е. Гидрометеиздат, М.—Л., 1937.
2. Монин А. С. Динамическая турбулентность атмосферы (представл. академиком Колмогоровым). Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая, том XIV, № 3, 1950.
3. Карпушев А. В. Распределение скоростей и коэффициентов турбулентного обмена по вертикали. Труды ГГИ, выпуск 2 (56), Гидрометеиздат, Ленинград, 1947.
4. Белинский Б. И. Динамическая метеорология. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. Маккавеев В. М. Поперечные течения в призматическом русле и их возбуждение. Труды ГГИ, выпуск 2 (56), Гидрометеиздат, Ленинград, 1947.
6. Маккавеев В. М. и Коновалов И. М. Гидравлика, М.—Л., 1940.
7. Боголюбова И. В. Опыт расчета поперечной циркуляции на закруглении русла. Труды ГГИ, вып. 8 (62), Гидрометеиздат, Ленинград, 1948.
8. Розовский И. П. Определение поперечных скоростей на повороте русла. Вестник Института гидрологии и гидротехники, том 6 (XIII), из-во АН Украинской ССР, Киев, 1950.
9. Оганесян Л. А. О поперечной циркуляции в напорной трубе на ее повороте. Доклады АН Армянской ССР, том XV, № 3, 1952.
10. Никурадзе Н. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах. Проблемы турбулентности. Сборник статей под редакцией М. А. Великанова и И. Г. Швейковского, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
11. Гурса Э. Курс математического анализа, том II, НТИ, НКТП СССР, М.—Л., 1936.
12. Потапов М. В. Винтовое движение жидкости в прямом открытом канале прямоугольного сечения. Сборник ВНИИГиМ, 1936, Гостехиздат, М.—Л.
13. Аняня А. К. Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока. Автореферат диссертации, Ереван, 1952.
14. Кочин Н. Е. Об упрощении уравнений гидромеханики общей циркуляции атмосферы. Собрание сочинений, стр. 287, 1949, М.—Л.

Ա. Կ. Աճառյան

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՑԻՐԿՈՒԼԱՑԻԱՆ՝ ԿԼՈՐ ԵՎ ՈՒՂՂԱՆԿՑՈՒՆ ՀԱՏՎԱԾՔ
ՈՒՆԵՑՈՂ ԶՐԱՏԱՐՆԵՐՈՒՄ ՏՈՒՐԲՈՒԼԵՆՏ ՀՈՍՔԻ ԾՈՒՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լայնական ցիրկուլացիան՝ աուրբուլենտ հոսքի ծոման ժամանակ
մոտավոր ճշտությամբ կարելի է որոշել, ելնելով (3) դիֆերենցիալ հավա-
նորոշների սխեմայից:

Ձևափոխելով այդ հավասարումները, առանցքային սիմետրիկ շարժման համար կարելի է բերել երկու տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների (6, 7): Դրանցից մեկը (6) ստացված է (3) հավասարումներից, լրիվ պահանջելով նրանց աջ մասերը, իսկ մյուսը (7) ստացված է այդ նույն հավասարումներից, պահանջելով նրանց աջ մասում միայն առաջին գումարելիները, Լուծելով (6) և (7) հավասարումները նույն պայմանների դեպքում (փոփոխական և հաստատուն Λ գործակցի համար), ստացվում են մոտավորապես համընկնող արդյունքներ: