

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках<sup>1</sup>

1. *Основные формулы и соотношения.* Рассмотрим тонкую многослойную оболочку, собранную из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Под симметричностью понимаем как геометрическую симметричность, так и симметричность упругих свойств.

Предполагается также, что все слои при деформировании остаются упругими и работают совместно, т. е. скольжения слоев по поверхностям контакта невозможны.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности,  $\gamma$  — расстояние по нормали от точки  $(\alpha, \beta)$  координатной поверхности до точки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  оболочки.

Как известно, ортотропные материалы обладают тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии. Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала каждого слоя будет параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ .

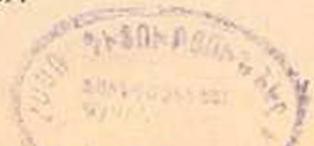
Пусть оболочка подвергается действию температуры. В этом случае обобщенный закон Гука для  $m$ -го слоя оболочки примет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} e_{\alpha}^m &= b_{11}^m \sigma_{\alpha}^m + b_{12}^m \sigma_{\beta}^m + b_{13}^m \sigma_{\gamma}^m + \alpha_1^m t, \\ e_{\beta}^m &= b_{21}^m \sigma_{\alpha}^m + b_{22}^m \sigma_{\beta}^m + b_{23}^m \sigma_{\gamma}^m + \alpha_2^m t, \\ e_{\gamma}^m &= b_{31}^m \sigma_{\alpha}^m + b_{32}^m \sigma_{\beta}^m + b_{33}^m \sigma_{\gamma}^m + \alpha_3^m t, \\ e_{\beta\gamma}^m &= b_{44}^m \tau_{\beta\gamma}^m, \quad e_{\alpha\gamma}^m = b_{55}^m \tau_{\alpha\gamma}^m, \quad e_{\alpha\beta}^m = b_{66}^m \tau_{\alpha\beta}^m. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь, как известно:

$$b_{11}^m = \frac{1}{E_{\alpha}^m}, \quad b_{22}^m = \frac{1}{E_{\beta}^m}, \quad b_{33}^m = \frac{1}{E_{\gamma}^m},$$

<sup>1</sup> Основные положения работы доложены на Всесоюзном совещании по теории упругости, теории пластичности и строительной механике в декабре 1950 года в Институте механики Академии наук СССР.



$$b_{44}^m = \frac{1}{G_{\beta 1}^m}, \quad b_{55}^m = \frac{1}{G_{\alpha 7}^m}, \quad b_{66}^m = \frac{1}{G_{\alpha 3}^m}, \quad (1.2)$$

$$\mu_{1\beta}^m = -\frac{b_{23}^m}{b_{33}^m}, \quad \mu_{\alpha 7}^m = -\frac{b_{31}^m}{b_{11}^m}, \quad \mu_{1\alpha}^m = -\frac{b_{12}^m}{b_{22}^m},$$

где  $E_1^m$ ,  $G_{ik}^m$ ,  $\mu_{ik}^m$  — „технические постоянные“ материала каждого слоя оболочки.

Остальные коэффициенты определяются исходя из симметрии матрицы коэффициентов  $b_{ik}$ .

$\alpha_1^m$  — коэффициенты температурного расширения.

Принимаем, что температура по толщине оболочки меняется по линейному закону, а именно:

$$t = t_0(\alpha, \beta) + \frac{\gamma}{2\delta} \Delta t(\alpha, \beta), \quad (1.3)$$

где  $2\delta$  — толщина оболочки,  $t_0 = \frac{1}{2}(t' + t'')$  — средняя температура элемента оболочки,  $\Delta t = t' - t''$  — нормальный перепад температуры.

Здесь  $t' = t'(\alpha, \beta)$ ,  $t'' = t''(\alpha, \beta)$  — заданные температуры соответственно на внешней ( $\gamma = \delta$ ) и внутренней ( $\gamma = -\delta$ ) поверхностях оболочки.

Как основную предпосылку, для всего пакета оболочки в целом, принимаем гипотезу недеформируемых нормалей, согласно которой нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки, после деформации, остается прямолинейным, нормальным к срединной поверхности и сохраняет свою первоначальную длину [2, 3].

Строго говоря, эта гипотеза не вполне справедлива и безоговорочно не применима к слоистым анизотропным оболочкам, в особенности у свободных краев ее. Однако, как явствует из исследований [4, 5, 6, 7], дополнительные погрешности основной гипотезы, связанные со слоистостью оболочки, локализованы вблизи свободных краев и в случае, когда оболочка достаточно тонка  $\left(\frac{h}{R} < \frac{1}{30}\right)$ ,

$h$  — толщина оболочки,  $R$  — минимальный радиус кривизны срединной поверхности оболочки) и отношения модулей упругости отдельных слоев не превышают 10—15, гипотеза недеформируемых нормалей в первом приближении применима и в случае анизотропной слоистой оболочки.

В силу основной гипотезы, в уравнениях (1.1), пренебрегая напряжениями  $\sigma_1^m$ , получим:

$$\sigma_{\alpha}^m = B_{11}^m e_{\alpha}^m + B_{12}^m e_{\beta}^m - (B_{11}^m \alpha_1^m + B_{12}^m \alpha_2^m) t,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta}^m &= B_{22}^m \varepsilon_{\beta}^m + B_{12}^m \varepsilon_{\alpha}^m - (B_{22}^m \alpha_2^m + B_{12}^m \alpha_1^m) t, \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{66}^m \varepsilon_{\alpha\beta}^m,\end{aligned}\quad (1.4)$$

где, в силу (1.2), как известно [1, 8]:

$$\begin{aligned}B_{11}^m &= \frac{E_{\alpha}^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, & B_{22}^m &= \frac{E_{\beta}^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \\ B_{12}^m &= -\frac{\mu_1^m E_{\alpha}^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} = -\frac{\mu_1^m E_{\beta}^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, & B_{66}^m &= G_{\alpha\beta}^m, \\ \mu_1^m &= \mu_{\alpha\beta}^m, & \mu_2^m &= \mu_{\beta\alpha}^m.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Остальные три составляющие тензора напряжений,  $\tau_{\alpha\gamma}^m$ ,  $\tau_{\beta\gamma}^m$  и  $\sigma_{\gamma}^m$ , как показали наши исследования [5, 6], расчетного интереса не представляют и поэтому ими не будем интересоваться вовсе.

Учитывая, что в силу основной гипотезы:

$$\varepsilon_{\alpha}^m = \varepsilon_1 + \gamma z_1, \quad \varepsilon_{\beta}^m = \varepsilon_2 + \gamma z_2, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^m = \omega + \gamma \tau, \quad (1.6)$$

где, как известно [2, 9]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right)\end{aligned}\quad (1.7)$$

являются относительными удлинениями и сдвигом срединной поверхности, а

$$\begin{aligned}z_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right), \\ z_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right), \\ \tau &= -\frac{2}{AB} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \right]\end{aligned}\quad (1.8)$$

являются параметрами, характеризующими изменения кривизны и кручения срединной поверхности. Обозначив приведенный коэффициент температурного расширения через

$$\bar{\rho}_i^m = B_{11}^m \alpha_1^m + B_{21}^m \alpha_2^m, \quad (1.9)$$

а также учитывая (1.3), для напряжений из (1.4) получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x^m &= B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2 - \beta_1^m t_0 + \gamma \left( B_{11}^m \kappa_1 + B_{12}^m \kappa_2 - \beta_1^m \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \\ \sigma_y^m &= B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{12}^m \varepsilon_1 - \beta_2^m t_0 + \gamma \left( B_{22}^m \kappa_2 + B_{12}^m \kappa_1 - \beta_2^m \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \\ \tau_{xy}^m &= B_{66}^m \omega + \gamma B_{66}^m \tau.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Эти напряжения вызывают статически им эквивалентные усилия и моменты [2, 10], которые, с точностью основной гипотезы, определяются посредством следующих формул; для тангенциальных усилий:

$$\begin{aligned}T_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 - C_{1t} t_0, \\ T_2 &= C_{22} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_1 - C_{2t} t_0, \\ S &= C_{66} \omega,\end{aligned}\quad (1.11)$$

где

$$C_{ik} = 2 \left[ B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right], \quad (1.12)$$

$$C_{it} = 2 \left[ \beta_i^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n \beta_i^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right], \quad (1.13)$$

для моментов:

$$\begin{aligned}G_1 &= - \left( D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2 - D_{1t} \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \\ G_2 &= - \left( D_{22} \kappa_2 + D_{12} \kappa_1 - D_{2t} \frac{\Delta t}{2\delta} \right),\end{aligned}\quad (1.14)$$

где

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[ B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right], \quad (1.15)$$

$$D_{it} = \frac{2}{3} \left[ \beta_i^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n \beta_i^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]. \quad (1.16)$$

Здесь введены следующие обозначения [8, 6, 11]: число слоев —  $(2n+1)$  (крайние слои имеют номера 1 и  $(2n+1)$ , средний слой имеет номер  $(n+1)$  и является  $m$  по счету),  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$  — расстояния от срединной поверхности до границ слоев.

Приведем уравнения равновесия при  $X=Y=Z=0$  [2, 9]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (BT_1) - T_2 \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} + AB \frac{N_1}{R_1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_2) - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BS) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} + AB \frac{N_2}{R_2} &= 0, \\ - \left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) \right] &= 0, \quad (1.17) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH) + H \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} (AG_2) + G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABN_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AH) + H \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BG_1) + G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - ABN_1 &= 0, \end{aligned}$$

и уравнения неразрывности деформаций [12], из которых нас будет интересовать:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{R_2} + \frac{\alpha_2}{R_1} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ B \frac{\partial \epsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\epsilon_2 - \epsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right] \right\} + \\ + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ A \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\epsilon_1 - \epsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right] \right\} = 0. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Аналогично соотношениям (1.7) и (1.8), уравнения (1.17) и (1.18) ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений «статической» задачи [13].

2. *Оболочки вращения.* Положение какой-либо точки  $M$  на срединной поверхности оболочки вращения будем определять углом  $\varphi$ , являющимся азимутом плоскости, проведенной через точку  $M$  и ось вращения  $z$  и меридиональной дугой  $s$  [14].

Для данной системы координат главные кривизны поверхности будут:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{r}, \quad (2.1)$$

где  $R_1$  — радиус кривизны меридиана,  $R_2$  — радиус кривизны нормального сечения,  $r$  — радиус кривизны параллельного круга,  $\alpha$  — угол между радиусом кривизны нормального сечения и радиусом кривизны параллельного круга.

В принятой системе координат параметры первой квадратичной формы определяются формулами [14, 10]:

$$A = 1, \quad B = r, \quad \frac{dB}{ds} = -\sin \alpha. \quad (2.2)$$

Здесь следует отметить, что принятая система координат и метод решения задач настоящего параграфа в основном аналогичны системе и методу, использованным А. И. Лурье [14] для решения задач изотропных симметрично нагруженных оболочек вращения.

Полагая, что температура  $t$  и граничные условия являются функциями лишь координаты  $s$ , получим задачу симметричного напряженного состояния оболочки вращения, для которой,

$$S = 0, \quad H = 0, \quad N_2 = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае уравнения равновесия (1.17) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (rT_1) + T_2 \sin \alpha + \frac{r}{R_1} N_1 &= 0, \\ - \left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{ds} (rN_1) &= 0, \\ \frac{d}{ds} (rG_1) + G_2 \sin \alpha + rN_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Принимая:

$$T_2 = \frac{dV}{ds}, \quad T_1 = -\frac{\sin \alpha}{r} V, \quad N = \frac{\cos \alpha}{r} V, \quad (2.5)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (2.4), при этом третье уравнение примет вид:

$$\frac{d}{ds} (rG_1) + G_2 \sin \alpha + V \cos \alpha = 0. \quad (2.6)$$

Принимая  $W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}$ , из соотношений (1.7) и (1.8), для деформаций и изменений кривизны получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{1}{R_1} w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} (w \cos \alpha - u \sin \alpha), \quad (2.7)$$

$$\kappa_1 = -\frac{dW}{ds}, \quad \kappa_2 = W \frac{\sin \alpha}{r}.$$

Подставляя значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  из (2.7) в (1.18), после некоторых преобразований получим известное уравнение неразрывности для симметрично нагруженной оболочки вращения:

$$r \frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha - W \cos \alpha = 0. \quad (2.8)$$

Решая совместно первые два соотношения (1.1!) относительно деформаций, при этом учитывая (2.7), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{C_{22}}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V - \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{dV}{ds} + \frac{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}}{\Omega} t_0, \\ \varepsilon_2 &= \frac{C_{11}}{\Omega} \frac{dV}{ds} + \frac{C_{12}}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V + \frac{C_{11}C_{21} - C_{12}C_{11}}{\Omega} t_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя, с учетом (2.7), значения изгибающих моментов (1.14) и деформаций (2.9) в уравнения (2.6) и (2.8), получим следующую систему уравнений:

$$L_d(W) - \frac{D_{12}}{D_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} W + \frac{1}{D_{11}} \frac{1}{R_2} V = -\frac{D_{11}}{D_{11}} \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) - \frac{D_{21} - D_{11}}{D_{11}} \frac{\Delta t \sin \alpha}{2\delta r},$$

$$L_c(V) + \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} V - \frac{\Omega}{C_{11}} \frac{1}{R_2} W = - \frac{C_{11} C_{21} - C_{12} C_{11}}{C_{11}} \frac{dt_0}{ds} + \\ + t_0 \left[ C_{21} + \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11}} - C_{11} \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11}} \right] \frac{\sin \alpha}{r} \quad (2.10)$$

относительно искоемых  $W = W(s)$  и  $V = V(s)$ .

В этих формулах и уравнениях введены следующие обозначения:

$$L_k(i) = \frac{d^2(i)}{ds^2} - \frac{d(i)}{ds} \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{K_{22}}{K_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r} (i), \quad (2.11)$$

$$\Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2. \quad (2.12)$$

Таким образом, «температурная» задача теории анизотропной слоистой оболочки вращения сводится к решению линейной системы (2.10). Как известно, общее решение системы линейных дифференциальных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения.

Решением соответствующей однородной системы здесь не будем заниматься [10, 15]. Укажем, что с точностью первого приближения асимптотического интегрирования [9, 14, 16], решение соответствующей однородной системы представляется посредством следующих формул [9, 10, 14]:

$$W = (E_1 \cos \beta - F_1 \sin \beta) e^{-\beta} + (E_2 \cos \beta + F_2 \sin \beta) e^{\beta}, \quad (2.13)$$

$$V = - \frac{\Omega}{A C_{11}} \left[ (E_1 \sin \beta + F_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (E_2 \sin \beta - F_2 \cos \beta) e^{\beta} \right], \quad (2.14)$$

где 
$$\beta = \sqrt{\frac{A}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{R_2}}, \quad A = \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11} D_{11}}}, \quad (2.15)$$

$E_1, F_1, E_2, F_2$  — постоянные, которые должны быть определены из краевых условий.

Частное решение системы (2.10) ищем в виде рядов по степеням  $\frac{\delta}{R}$  [14]:

$$W = W_0 + \frac{\delta}{R_2} W_1 + \dots \quad V = V_0 + \frac{\delta}{R_2} V_1 + \dots \quad (2.16)$$

Однако, учитывая точность наших исходных предпосылок [14, 9], а также точность общего решения соответствующей однородной системы, частное решение даем лишь в первом приближении, т. е. в полученных результатах уже не удерживаем членов с множителем  $\frac{\delta}{R}$  [9, 14].

С указанной точностью для частного решения получим:

$$W_0 = t_0 (K_{11} - K_{21}) \operatorname{tg} \alpha + \frac{dt_0}{ds} R_2 K_{21}, \quad (2.17)$$

$$V_0 = \frac{\Delta t}{2\delta} (D_{11} - D_{21}) \operatorname{tg} \alpha - \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) R_2 D_{11}, \quad (2.18)$$

где для краткости письма введены следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{C_{22} C_{11} - C_{12} C_{21}}{\Omega}, \quad (2.19)$$

$$K_{21} = \frac{C_{11} C_{21} - C_{12} C_{11}}{\Omega}.$$

Напряжения, соответствующие частному решению, могут быть определены с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x^m = & \frac{C_{11} B_{12}^m - C_{12} B_{11}^m}{\Omega} \frac{dV_0}{ds} - \frac{C_{22} B_{11}^m - C_{12} B_{12}^m}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V_0 - \\ & - \gamma \left( B_{11} \frac{dW_0}{ds} - B_{12}^m \frac{\sin \alpha}{r} W_0 \right) - \gamma \beta_1^m \frac{\Delta t}{2\delta} + \\ & + (B_{11}^m K_{11} + B_{12}^m K_{21} - \beta_1^m) t_0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^m = & \frac{C_{11} B_{22}^m - C_{12} B_{12}^m}{\Omega} \frac{dV_0}{ds} + \frac{C_{12} B_{22}^m - C_{22} B_{12}^m}{\Omega} \frac{\sin \alpha}{r} V_0 + \\ & + \gamma \left( B_{22} \frac{\sin \alpha}{r} W_0 - B_{12}^m \frac{dW_0}{ds} \right) - \gamma \beta_2^m \frac{\Delta t}{2\delta} + \\ & + (B_{22}^m K_{21} + B_{12}^m K_{11} - \beta_2^m) t_0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{ds} = & K_{21} R_2 \frac{d^2 t_0}{ds^2} + \left[ K_{21} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) + K_{11} \right] \operatorname{tg} \alpha \frac{dt_0}{ds} + \\ & + (K_{11} - K_{21}) \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) t_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_0}{ds} = & -D_{11} R_2 \frac{d^2 (\Delta t)}{ds^2} - \left[ D_{11} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) + D_{21} \right] \operatorname{tg} \alpha \frac{d(\Delta t)}{ds} + \\ & + (D_{11} - D_{21}) \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\Delta t}{2\delta}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

При решении конкретных задач, как известно, возникает необходимость удовлетворения краевым условиям, с этой целью приводим значения внутренних усилий, моментов и радиального (по направлению  $r$ ) перемещения, соответствующие частному решению:

$$T_1 = D_{11} \operatorname{tg} \alpha \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) - (D_{11} - D_{21}) R_2 \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (2.24)$$

$$T_2 = -D_{11}R_2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) - \left[ D_{11} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) + D_{21} \right] \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) \operatorname{tg} \alpha + \\ + (D_{11} - D_{21}) \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (2.25)$$

$$N = -D_{11} \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) + (D_{11} - D_{21}) \frac{1}{R_2} \operatorname{tg} \alpha \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (2.26)$$

$$G_1 = D_{11}K_{21}R_2 \frac{d^2 t_0}{ds^2} + \left\{ D_{11} \left[ K_{11} + K_{21} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) \right] - \right. \\ \left. - D_{12}K_{21} \right\} \operatorname{tg} \alpha \frac{dt_0}{ds} + (K_{11} - K_{21}) \left[ D_{11} \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \right. \\ \left. - D_{12}R_2 \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right] t_0 + D_{11} \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (2.27)$$

$$G_2 = D_{12}K_{21}R_2 \frac{d^2 t_0}{ds^2} + \left\{ D_{11} \left[ K_{11} + K_{21} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) \right] - \right. \\ \left. - D_{22}K_{21} \right\} \operatorname{tg} \alpha \frac{dt_0}{ds} + (K_{11} - K_{21}) \left[ D_{12} \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \right. \\ \left. - D_{22}R_2 \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right] t_0 + D_{21} \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (2.28)$$

$$e_r = -\frac{r}{Q} \left\{ \left\{ C_{11}D_{11}R_2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) + \left\{ C_{11} \left[ D_{11} \left( \frac{R_2}{R_1} - 2 \right) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + D_{21} \right] + C_{12}D_{11} \right\} \operatorname{tg} \alpha \frac{d}{ds} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right) + \left[ C_{11} \frac{1}{R_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{12} \frac{1}{R_2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right] (D_{11} - D_{21}) \frac{\Delta t}{2\delta} \right\} + rK_{21}t_0. \quad (2.29)$$

3. *Пологие оболочки.* Как показали многочисленные исследования [2, 17, 18, 19, 20], коэффициенты первой квадратичной формы  $A(\alpha, \beta)$  и  $B(\alpha, \beta)$  некоторой малой части произвольной оболочки при дифференцировании ведут себя почти как постоянные. Учитывая, что пологие оболочки по сути являются частью какой-либо оболочки, в дальнейшем, при дифференцировании, параметры  $A(\alpha, \beta)$  и  $B(\alpha, \beta)$  будем рассматривать как постоянные.

Таким образом, считая  $A = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ , мы внутреннюю геометрию срединной поверхности пологой оболочки подчиняем законам евклидовой геометрии на плоскости. С точностью первой гипотезы принимаем второе допущение о том, что кривизны  $k_1$  и  $k_2$  при дифференцировании также ведут себя как постоянные.

С учетом этих предположительных гипотез для деформаций и параметров изменения кривизны получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w, & \omega &= \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ z_1 &= -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & z_2 &= -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, & \tau &= -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исключая из уравнений (1.17)  $N_1$  и  $N_2$ , при этом учитывая точность теории пологих оболочек и формулы (1.14) и (3.1), получим:

$$B \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + A \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + B \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + L(D_{ik})w + \nabla_{dt} \left( \frac{\Delta t}{R} \right) = 0,$$

где

$$L(D_{ik}) = D_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (3.3)$$

$$\nabla_{dt} = D_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}. \quad (3.4)$$

Решая совместно уравнения (1.11) относительно деформаций, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{22} T_1 - a_{12} T_2 + a_{2t} t_0, \\ \varepsilon_2 &= a_{11} T_2 - a_{12} T_1 + a_{1t} t_0, \\ \omega &= a_{66} S, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где 
$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad (3.6)$$

$$a_{1t} = \frac{C_{11} C_{2t} - C_{12} C_{1t}}{\Omega}, \quad a_{2t} = \frac{C_{22} C_{1t} - C_{12} C_{2t}}{\Omega}. \quad (3.7)$$

Подставляя значения деформаций из (3.1) и (3.5) в уравнение неразрывности (1.18), получим:

$$\begin{aligned} -\nabla_r w + \left( a_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - a_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) T_2 + \left( a_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) T_1 - \\ - a_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} + \left( a_{1t} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{2t} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) t_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следуя В. З. Власову [2, 21] и полагая

$$T_1 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad S = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad (3.9)$$

где  $\varphi(\alpha, \beta)$  — функция напряжений, тождественно удовлетворим пер-

вым двум уравнениям (3.2). Из третьего уравнения (3.2) и уравнения (3.8) получим:

$$L(D_{ik})w + \nabla_r \varphi = -\nabla_{at} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \quad (3.10)$$

$$L(a_{ik})\varphi - \nabla_r w = -\nabla_{at} t_0,$$

где

$$L(a_{ik}) = a_{11} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{1}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (3.11)$$

$$\nabla_r = \frac{1}{R_2} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R_1} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (3.12)$$

и аналогично (3.4):

$$\nabla_{at} = a_{1t} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{2t} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}. \quad (3.13)$$

Таким образом, температурная задача теории анизотропных слоистых и пологих оболочек сводится к решению линейной системы (3.10) при заданных граничных условиях.

Здесь искомыми являются функция напряжений  $\varphi(\alpha, \beta)$  и функция перемещений  $w(\alpha, \beta)$ , посредством которых могут быть представлены все расчетные величины задачи, а именно — тангенциальные силы, которые определяются формулами (3.9), моменты

$$\begin{aligned} G_1 &= D_{11} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{1t} \frac{\Delta t}{2\delta}, \\ G_2 &= D_{22} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{2t} \frac{\Delta t}{2\delta}, \\ H &= -2D_{66} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

поперечные силы

$$\begin{aligned} N_1 &= -E(D_{ik})w - D_{1t} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \\ N_2 &= -F(D_{ik})w - D_{2t} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где [5, 22]

$$\begin{aligned} E(D_{ik}) &= D_{11} \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \\ F(D_{ik}) &= D_{22} \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{BA^2} \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

напряжения

$$\sigma_{\alpha}^m = (a_{11}B_{12}^m - a_{12}B_{11}^m) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + (a_{22}B_{11}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} -$$

$$-\gamma \left( B_{21}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \beta_1^m \frac{\Delta t}{2\delta} \right) + (B_{11}^m a_{21} + B_{12}^m a_{11} - \beta_1^m) t_0, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{\beta}^m = (a_{11}B_{22}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + (a_{22}B_{12}^m - a_{12}B_{22}^m) \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} -$$

$$-\gamma \left( B_{12}^m \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{22}^m \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \beta_2^m \frac{\Delta t}{2\delta} \right) + (B_{22}^m a_{11} + B_{12}^m a_{21} - \beta_2^m) t_0, \quad (3.18)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = -a_{66}B_{66}^m \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - 2\gamma B_{66}^m \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим два частных случая. Первый случай: пусть  $\Delta t$  постоянно или по координатам  $\alpha, \beta$  изменяется по линейному закону. Полагая:

$$w = \nabla_r V, \quad \varphi = -L(D_{ik})V \quad (3.20)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (3.10). Из второго уравнения (3.10) получим:

$$L(D_{ik})L(a_{ik})V + \nabla_r^2 V = \nabla_{at} t_0. \quad (3.21)$$

Расчетные формулы для этого случая можно получить из вышеприведенных формул общего случая (3.9)–(3.19) с учетом (3.20).

Второй случай. Пусть аналогично первому случаю  $t_0$  постоянно или по координатам  $\alpha, \beta$  изменяется по линейному закону. Полагая:

$$w = L(a_{ik})W, \quad \varphi = \nabla_r W, \quad (3.22)$$

как и в первом случае, получим:

$$L(D_{ik})L(a_{ik})W + \nabla_r^2 W = -\nabla_{at} \left( \frac{\Delta t}{2\delta} \right). \quad (3.23)$$

Подставляя значения  $\varphi$  и  $w$  из (3.22) в соответствующие формулы (3.9)–(3.19), получим все расчетные формулы этого случая. В уравнениях (3.21) и (3.23), а также в дальнейшем:

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{R_2^2} \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2}{R_1 R_2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{1}{R_1^2} \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \quad (3.24)$$

Рассматривая эти случаи заключаем, что температурная задача теории анизотропной слоистой оболочки, в общем случае, сводится к решению известного и достаточно изученного однородного уравнения [22] и к разысканию частных решений уравнений (3.21) и (3.23).

Практически важным является случай линейного распределения как  $t_0$ , так и  $\Delta t$  одновременно.

В этом случае полагая

$$w = L(a_{ik})\Phi, \quad \varphi = \nabla_r^2 \Phi, \quad (3.25)$$

из (3.10) получаем:

$$L(D_{ik}) L(a_{ik})\Phi + \nabla_r^2 \Phi = 0, \quad (3.26)$$

т. е. известное однородное уравнение теории анизотропных слоистых оболочек. Таким образом, задача сводится к решению однородного уравнения (3.26); что же касается частных решений, то они в явном виде будут фигурировать в расчетных формулах, которые, как было указано выше, получаются из (3.9) — (3.19) после подстановки значений  $w$  и  $\varphi$  из (3.25).

Для примера рассмотрим температурную задачу многослойной цилиндрической оболочки, составленной из различных изотропных слоев. Пусть оболочка подвергается действию постоянной (по  $\alpha, \beta$ ) температуры  $t_0 = \text{const}$ ,  $\Delta t = \text{const}$ .

В случае, когда оболочка состоит из изотропных слоев, имеем [5]: для  $B_{ik}$

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = \frac{E^m}{1 - (\mu_m)^2}, \quad B_{12} = \frac{E^m \mu_m}{1 - (\mu_m)^2}, \quad B_{66} = \frac{E^m}{2(1 + \mu_m)}; \quad (3.27)$$

для жесткостей  $C_{ik}$

$$C = C_{11} = C_{22} = C_{12} + 2C_{66},$$

$$\begin{aligned} C &= 2 \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1}}{1 - (\mu_{n+1})^2} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m}{1 - (\mu_m)^2} (\delta_m - \delta_{m+1}) \right], \\ C_{12} &= 2 \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1} \mu_{n+1}}{1 - (\mu_{n+1})^2} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m \mu_m}{1 - (\mu_m)^2} (\delta_m - \delta_{m+1}) \right], \\ C_{66} &= 2 \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1}}{2(1 + \mu_{n+1})} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m}{2(1 + \mu_m)} (\delta_m - \delta_{m+1}) \right]; \end{aligned} \quad (3.28)$$

для жесткостей  $D_{ik}$  [5, 8]

$$D = D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66},$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{3} \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1}^3}{1 - (\mu_{n+1})^2} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m}{1 - (\mu_m)^2} (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right], \\ D_{12} &= \frac{2}{3} \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1}^3 \mu_{n+1}}{1 - (\mu_{n+1})^2} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m \mu_m}{1 - (\mu_m)^2} (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right], \\ D_{66} &= \frac{2}{3} \left[ \frac{E^{n+1} \delta_{n+1}^3}{2(1 + \mu_{n+1})} + \sum_{m=1}^n \frac{E^m}{2(1 + \mu_m)} (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Приведенные коэффициенты Пуассона принимают вид:

$$\nu = \nu_1 = \nu_2 = \frac{C_{12}}{C}, \quad \mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{D_{12}}{D}. \quad (3.30)$$

В силу (3.27), (3.28) и (3.30), для коэффициентов  $a_{ik}$  получим:

$$a = a_{11} = a_{22} = \frac{1}{C(1-\nu^2)}, \quad a_{12} = \frac{\nu}{C(1-\nu^2)}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}},$$

$$(a_{66} - 2a_{12}) = 2a_{11}, \quad \Omega = C^2(1-\nu^2). \quad (3.31)$$

Из (1.9), (1.13), (1.15) и (3.7), учитывая, что  $\alpha_1 = \alpha_2$ , получим:

$$\beta^m = \beta_1^m = \beta_2^m = \alpha^m \frac{E^m}{1-\mu_m^m}, \quad (3.32)$$

$$C_i = C_{1i} = C_{2i} = 2 \left[ \beta^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n \beta^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right],$$

$$D_i = D_{1i} = D_{2i} = \frac{2}{3} \left[ \beta^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n \beta^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right], \quad (3.33)$$

$$a_i = a_{1i} = a_{2i} = \frac{C_i}{C(1+\nu)}. \quad (3.34)$$

Пусть для круговой цилиндрической оболочки координатами  $\alpha, \beta$  будут расстояния до рассматриваемой точки соответственно вдоль образующей и по дуге поперечного сечения срединной поверхности.

Коэффициенты первой квадратичной формы в этой системе координат равны единице. Главными кривизнами будут:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R} = k. \quad (3.35)$$

В этой системе координат, учитывая вышеприведенные значения постоянных и полагая:

$$w = \nabla^4 \Phi, \quad \zeta = \frac{1}{R} C(1-\nu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}, \quad (3.36)$$

из (3.10) получим:

$$\nabla^4 \nabla^4 \Phi + k^2 \frac{C(1-\nu^2)}{D} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0. \quad (3.37)$$

При этом для расчетных величин имеем:

$$T_1 = k C(1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2 = k C(1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} \quad (3.38)$$

$$G_1 = D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 \Phi + D_t \frac{\Delta t}{2\delta}, \quad (3.39)$$

$$G_2 = D \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^4 \Phi + D_t \frac{\Delta t}{2\delta},$$

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^6 \Phi, \quad N_2 = -D \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^6 \Phi, \quad (3.40)$$

$$\sigma_x^m = \frac{E^m}{1-\mu_m^2} \left\{ k \left[ (\mu_m - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-\mu_m \nu) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \gamma \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 \Phi \right\} - \frac{E^m}{1-\mu_m} \left\{ \gamma \alpha^m \frac{\Delta t}{2\delta} - \left[ \frac{C_1}{C(1+\nu)} - \alpha^m \right] t_0 \right\}, \quad (3.41)$$

$$\sigma_\beta^m = \frac{E^m}{1-\mu_m^2} \left\{ k \left[ (\mu_m - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (1-\mu_m \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} - \gamma \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^4 \Phi \right\} - \frac{E^m}{1-\mu_m} \left\{ \gamma \alpha^m \frac{\Delta t}{2\delta} - \left[ \frac{C_1}{C(1+\nu)} - \alpha^m \right] t_0 \right\}, \quad (3.42)$$

$$\tau_{x\beta}^m = -\frac{E^m}{2(1+\mu_m)} \left[ 2k(1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial \beta^2} + 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \nabla^4 \Phi \right], \quad (3.43)$$

$$u = k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi + \frac{C_1}{C(1+\nu)} t_0 \alpha, \quad (3.44)$$

$$v = -k \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Phi + \frac{C_1}{C(1+\nu)} t_0 \beta. \quad (3.45)$$

Сравнивая уравнение (3.37) и расчетные формулы (3.36)–(3.45) с соответствующими формулами и соотношениями однородной изотропной оболочки, замечаем, что они принципиально не отличаются друг от друга. Отличие их заключается лишь в коэффициентах, которые представляют жесткости и пуассоновы отношения. В отличие от изотропных оболочек, здесь вместо обычных жесткостей и коэффициента Пуассона фигурируют приведенные жесткости  $C$  и  $D$  и приведенные коэффициенты  $\nu$  и  $\mu$ , играющие роль коэффициента Пуассона.

Таким образом, температурная задача рассмотренной изотропной слоистой оболочки сводится к решению однородного уравнения (3.37), которое детально изучено многими авторами [2, 9, 14].

Институт строительных материалов и сооружений  
АН Армянской ССР

Поступило 24 XI 1952

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

3. Амбарцумян С. А. ДАН Армянской ССР, т. XIII, № 5, 1948.
4. Ерохин И. П. Труды Ленинградского института инженеров пром. строительства, в. 5, 1938.
5. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук) т. IV, № 6, 1951.
6. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. IV, № 5, 1951.
7. Рабинович А. Л. Труды Мин. авиационной промышленности СССР, № 675, 1948.
8. Лехницкий С. Г. Авиатронные пластинки. Гостехиздат, 1947.
9. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
10. Амбарцумян С. А. ДАН Армянской ССР, т. XI, № 2, 1949.
11. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР, т. I, № 6, 1948.
12. Гольденвейзер А. Л. Сб. Пластинки и оболочки. Госстройиздат, 1939.
13. Гольденвейзер А. Л. Труды ЦАГИ, № 618, 1947.
14. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
15. Амбарцумян С. А. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 5, 1948.
16. Штаерман И. Я. Известия Киевского политехнического и сельскохозяйственного института, 1924.
17. Работнов Ю. Н. ДАН СССР, Нов. серия, т. XLVII, № 4, 1945.
18. Гольденвейзер А. Л. ПММ, т. IX, в. 6, 1945.
19. Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. ПММ, т. XI, в. 5, 1947.
20. Амбарцумян С. А. ПММ, т. XI, в. 5, 1947.
21. Власов В. З. ПММ, т. VIII, в. 2, 1944.
22. Амбарцумян С. А. ПММ, т. XII, в. 1, 1948.

### Ս. Ա. Ամբարձումյան

## ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՆ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐՈՒՄ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննվում են անիզոտրոպ շերտավոր թաղանթներում առաջացող ջերմային լարումները որոշելու համար հիմնական հավասարումները և հաշվարկային բանաձևերը:

Ընդունված է, որ թաղանթի յուրաքանչյուր շերտի նյութը օրոտոտրոպ է և առաձգականության սիմետրիայի գլխավոր ուղղությունները համընկնում են կոորդինատային օրտոգոնալ սիստեմի առանցքների ուղղությունների հետ:

Որպես մասնավոր դեպքեր գիտված են պտտման և փոքր կորություն ունեցող թաղանթները: Ցույց է արված, որ այդ դեպքերում խնդիրը բերվում է հայտնի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: