

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. С. Минасян

О плоском установившемся распределении температуры
в неоднородных призматических телах

В работе решается плоская задача стационарного распределения температуры в неоднородных призматических телах с прямоугольным поперечным сечением.

§ 1. Плоское распространение тепла в неоднородном теле
квадратного поперечного сечения при наличии внутренних
источников тепла

Постановка задачи и построение решения. Рассмотрим плоское распределение тепла в неоднородном теле, состоящем из двух сред, имеющих в поперечном сечении форму двух вложенных друг в друга квадратов (фиг. 1), когда задано распределение температуры вдоль боковой поверхности, при наличии тепловыделения внутри тела (которое может происходить, например, при переходе электрической энергии в тепловую, экзотермии и т. п.). Для простоты ограничимся симметричным случаем.

Обозначим температуру в 1-й среде через $U_1(x, y)$, а во 2-й — через $U_2(x, y)$. Пусть коэффициенты теплопроводности 1-й и 2-й сред будут соответственно λ_1 и λ_2 . В этом случае температуры $U_i(x, y)$ в соответствующих средах, как известно [1], удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\lambda_1} Q_1(x, y) \quad (1.1)$$

и граничным условиям

$$U_1(x, \pm b) = T(x), \quad U_1(\pm b, y) = T(y). \quad (1.2)$$

Здесь $Q_i(x, y)$ — интенсивность тепловыделения в i -й среде.

Относительно граничных значений $T(x)$, $T(y)$ и интенсивности тепловыделения $Q_i(x, y)$ предполагаем, что они симметричны относительно осей ox и oy , причем $Q_i(x, y) = Q_i(y, x)$. Кроме того, предполагаем, что как $T(x)$, так и $Q_i(x, y)$ имеют ограниченную вариацию.

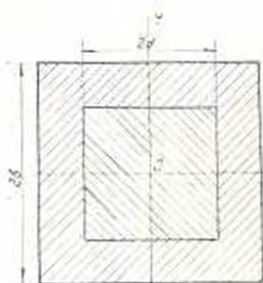
Условия на линиях контакта будут:

$$U_2(x, \pm d) = U_1(x, \pm d), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=\pm d} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=\pm d},$$

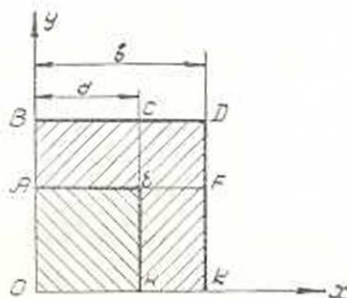
$$U_1(\pm d, x) = U_2(\pm d, x), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm d} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=\pm d}. \quad (1.3)$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть четвертую часть квадрата (фиг. 2), причем на прямых $x=0$ и $y=0$ должны удовлетворяться условия

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (1.4)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для построения функции $U_1(x, y)$ применяем способ сшивания [2], являющийся дальнейшим развитием метода наложения вспомогательных функций, предложенного Н. Х. Арутюняном [3].

Представим функцию $U_1(x, y)$ в виде:

$$U_1(x, y) = \begin{cases} V_1(x, y) & \text{при } x \geq d, y \leq d, \\ V_2(x, y) & \text{при } x \geq d, y \geq d, \\ V_3(x, y) & \text{при } x \leq d, y \geq d. \end{cases} \quad (1.5)$$

При этом $V_3(x, y) = V_4(y, x)$.

Функции $V_i(x, y)$ должны удовлетворять уравнению (1.1), соответствующим граничным условиям (1.2) и (1.4) и условиям сшивания на линиях раздела $x=d$ и $y=d$:

$$V_1(x, d) = V_2(x, d), \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} \Big|_{y=d} = \frac{\partial V_2}{\partial y} \Big|_{y=d}, \quad (1.6)$$

$$V_2(d, y) = V_3(d, y), \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} \Big|_{x=d} = \frac{\partial V_3}{\partial x} \Big|_{x=d}.$$

Следуя идее Г. А. Гринберга [4], ищем выражения для $U_2(x, y)$ и $V_i(x, y)$ так же, как при однородных граничных условиях.

Разложим функции $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в ряд по $\cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{d}$:

$$V_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \cos z_k y, \quad U_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \cos z_k y, \quad (1.7)$$

где $\alpha_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}$, причем

$$f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d V_1(x, y) \cos \alpha_k y dy, \quad g_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_2(x, y) \cos \alpha_k y dy.$$

Выражения (1.7) сходятся соответственно в областях НЕФК и ОАЕН, за исключением линии АФ, где все члены рядов (1.7) обращаются в нуль. Отсюда следует [4], что члены рядов убывают не быстрее, чем k^{-1} . Для усиления сходимости можно, пользуясь известными методами [5], выделить и просуммировать часть, обуславливающую слабую сходимость.

Функцию $V_2(x, y)$, а также $V_3(x, y)$ ищем в виде рядов

$$V_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \beta_k(y-d); \quad V_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \sin \beta_k(y-d), \quad (1.8)$$

где $\beta_k = \frac{k\pi}{b-d}$, $\varphi_k(x) = \frac{2}{b-d} \int_d^b V_2(x, y) \sin \beta_k(y-d) dy$,

$$\psi_k(x) = \frac{2}{b-d} \int_d^b V_3(x, y) \sin \beta_k(y-d) dy.$$

Для определения коэффициентов $f_k(x)$ и $g_k(x)$ умножим оператор Лапласа от функций $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ на $\cos \alpha_k y dy$. Интегрируя полученные выражения по y от 0 до d и принимая во внимание (1.1), (1.2), (1.4), а также (1.8), получим:

$$f_k''(x) - \alpha_k^2 f_k(x) + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d) \sin \beta_p(x-d) = q_k(x), \quad (1.9)$$

$$g_k''(x) - \alpha_k^2 g_k(x) + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d} \sum_{p=0}^{\infty} f_p(d) \cos \alpha_p x = r_k(x).$$

Аналогично, для $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ получим:

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) - \beta_k^2 \varphi_k(x) - \frac{2\beta_k}{b-d} \left[(-1)^k T(x) - \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(d) \sin \beta_p(x-d) \right] &= \tau_k(x), \\ \psi_k''(x) - \beta_k^2 \psi_k(x) - \frac{2\beta_k}{b-d} \left[(-1)^k T(x) - \right. & \\ \left. - \sum_{p=0}^{\infty} g_p(d) \cos \alpha_p x \right] &= \tau_k(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь

$$q_k(x) = \frac{2}{\lambda_1 d} \int_0^d Q_1(x, y) \cos \alpha_k y dy, \quad r_k(x) = \frac{2}{\lambda_2 d} \int_0^d Q_2(x, y) \cos \alpha_k y dy. \quad (1.11)$$

$$\tau_k(x) = \frac{2}{\lambda_1(b-d)} \int_d^b Q_1(x, y) \sin \beta_k(y-d) dy.$$

Принимая во внимание (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6) и разлагая $T(y)$ в ряды по $\cos \alpha_k y$ в промежутке $(0, d)$ и по $\sin \beta_k(y-d)$ в промежутке (d, b) , получим граничные условия для $f_k(x)$, $g_k(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$:

$$\begin{aligned} f_k(b) &= \mu_k, \quad f_k(d) = g_k(d), \quad \lambda_1 f'_k(d) = \lambda_2 g'_k(d), \quad g'_k(0) = 0, \\ \varphi_k(b) &= \gamma_k, \quad \varphi_k(d) = \psi_k(d), \quad \varphi'_k(d) = \psi'_k(d), \quad \psi'_k(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\mu_k = \frac{2}{d} \int_0^d T(y) \cos \alpha_k y dy, \quad \gamma_k = \frac{2}{b-d} \int_d^b T(y) \sin \beta_k(y-d) dy. \quad (1.13)$$

Решив уравнения (1.9) и (1.10) и удовлетворяя условиям (1.12), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \bar{f}_k(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} [B_k \operatorname{sh} \alpha_k(b-x) + \zeta_k \operatorname{sh} \alpha_k x] + \frac{1}{\alpha_k} \int_d^x q_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k(x-t) dt + \\ &\quad + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(d)}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \sin \beta_p(x-d), \\ g_k(x) &= \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left[B_k \frac{\operatorname{sh} \alpha_k(b-d)}{\operatorname{ch} \alpha_k d} + \zeta_k \operatorname{th} \alpha_k d \right] + \eta_k \frac{\operatorname{sh} \alpha_k(d-x)}{\operatorname{ch} \alpha_k d} + \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_k} \int_x^d r_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k(t-x) dt + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\bar{r}_p(d)}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} \cos \alpha_p x, \\ \varphi_k(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k b} [F_k \operatorname{sh} \beta_k(b-x) + \xi_k \operatorname{sh} \beta_k x] + \frac{1}{\beta_k} \int_d^x \left[\tau_k(t) + \right. \\ &\quad \left. + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k(x-t) dt + \frac{2\beta_k}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi_p(d)}{\beta_p^2 + \beta_k^2} \sin \beta_p(x-d), \\ \psi_k(x) &= \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k b} \left[F_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k(b-d)}{\operatorname{ch} \beta_k d} + \xi_k \operatorname{th} \beta_k d \right] - \rho_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k(d-x)}{\operatorname{ch} \beta_k d} + \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$+ \frac{1}{\beta_k} \int_x^d \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k(t-x) dt + \frac{2\beta_k}{b-d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{g_p(d)}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \cos \alpha_p x.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu_k &= \mu_k - \frac{1}{\alpha_k} \int_d^b q_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k(b-t) dt, \quad \eta_k = \frac{1}{\alpha_k} \int_0^d r_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k t dt, \\ \xi_k &= \gamma_k - \frac{1}{\beta_k} \int_d^b \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k(b-t) dt, \\ \rho_k &= \frac{1}{\beta_k} \int_0^d \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{ch} \beta_k t dt. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Постоянные B_k и F_k , входящие в соотношения (1.14), определяются из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{\operatorname{sh} \alpha_k b}{\lambda_1 \operatorname{ch} \alpha_k(b-d) + \lambda_2 \operatorname{sh} \alpha_k(b-d) \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ (-1)^k \frac{2}{d} \left[\lambda_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p \varphi_p(d)}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \alpha_p \psi_p(d)}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} \right] - \frac{\lambda_2 \eta_k}{\operatorname{ch} \alpha_k d} + \frac{\xi_k}{\operatorname{sh} \alpha_k b} (\lambda_1 \operatorname{ch} \alpha_k d + \lambda_2 \operatorname{sh} \alpha_k d \operatorname{th} \alpha_k d) \right\}, \\ F_k &= \operatorname{th} \beta_k b \operatorname{ch} \beta_k d \left\{ \frac{2}{b-d} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p \phi_p(d)}{\beta_p^2 + \beta_k^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \alpha_p g_p(d)}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_k d} \left(\rho_k - \frac{\xi_k}{\operatorname{sh} \beta_k b} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для нахождения неизвестных B_k и F_k из уравнений (1.16), преобразуем последние следующим образом: введем новые неизвестные m_k и n_k

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{(-1)^k m_k \operatorname{sh} \alpha_k b - \alpha_k d \xi_k \operatorname{sh} \alpha_k d}{\alpha_k d \operatorname{sh} \alpha_k(b-d)}, \\ F_k &= \frac{n_k \operatorname{sh} \beta_k b - \beta_k(b-d) \xi_k \operatorname{sh} \beta_k d}{\beta_k(b-d) \operatorname{sh} \beta_k(b-d)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставив значения B_k и F_k из (1.17) в (1.16), после некоторых преобразований приходим к уравнениям:

$$m_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{ch} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ \frac{2\lambda_2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda_1}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \frac{\lambda_1 \xi_k d}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} - \frac{\lambda_2 d \eta_k}{\operatorname{ch} \alpha_k d} \right\}, \quad (1.18)$$

$$n_k = \frac{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \operatorname{ch} \beta_k d}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \frac{2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \frac{2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{\beta_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{\xi_k (b-d)}{\operatorname{sh} \beta_k (b-d)} - \frac{\eta_k (b-d)}{\operatorname{ch} \beta_k d} \right\}.$$

Полученные соотношения (1.18) представляют совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений. При этом формулы для коэффициентов разложений $i_k(x)$, $g_k(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, выраженные через m_k и n_k , окончательно примут вид:

$$i_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-x)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} \left\{ (-1)^k \frac{m_k}{d} - \int_d^x q_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (t-d) dt \right\} + \\ + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (x-d)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} \left\{ n_k - \frac{1}{\alpha_k} \int_x^b q_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt \right\} + \\ + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d(b-d)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{\beta_p (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \sin \beta_p (x-d), \\ g_k(x) = \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d} \left\{ (-1)^k \frac{m_k}{d} - \int_x^d r_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (d-t) dt \right\} - \\ (1.19)$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (d-x)}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k d} \int_0^x r_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k t dt + (-1)^k \frac{2\alpha_k}{d^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \alpha_k^2)} \cos \alpha_p x,$$

$$\varphi_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \beta_k (b-x)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \left\{ \frac{n_k}{b-d} - \int_d^x \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k (t-d) dt \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\operatorname{sh} \beta_k (x-d)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \left\{ \gamma_k - \frac{1}{\beta_k} \int_x^b \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k (b-t) dt \right\} + \\
& + \frac{2\beta_k}{(b-d)^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{\beta_p (\beta_p^2 + \beta_k^2)} \sin \beta_p (x-d), \\
\psi_k(x) = & \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d} \left\{ \frac{n_k}{b-d} - \int_x^d \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{sh} \beta_k (d-t) dt \right\} - \\
& - \frac{\operatorname{sh} \beta_k (d-x)}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d} \int_0^x \left[\tau_k(t) + T(t) \frac{2(-1)^k \beta_k}{b-d} \right] \operatorname{ch} \beta_k t dt + \\
& + \frac{2\beta_k}{d(b-d)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p n_p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2)} \cos \alpha_p x.
\end{aligned}$$

Исследование совокупности бесконечных систем (1.18). Прежде всего оценим суммы модулей коэффициентов систем совокупности (1.18).

Имея в виду, что $\alpha_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{d}$, $\beta_k = \frac{k\pi}{b-d}$, получим, что суммы модулей коэффициентов первой и второй систем соответственно равны

$$\begin{aligned}
\sigma_{k1} = & \frac{2\lambda_1 \alpha_k}{d[\lambda_1 \operatorname{th} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d]} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} + \frac{\lambda_1 d}{\lambda_2 (b-d)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \right] = \\
= & 1 - \frac{1}{\alpha_k (b-d)} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \operatorname{th} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k2} = & \frac{2\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \operatorname{ch} \beta_k d}{d \operatorname{ch} \beta_k b} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \frac{d}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \beta_k^2} \right] = \\
= & 1 - \frac{\operatorname{sh} \beta_k (b-d) \operatorname{ch} \beta_k d}{\beta_k (b-d) \operatorname{ch} \beta_k b}.
\end{aligned}$$

Как видно из (1.20), обе суммы модулей коэффициентов меньше единицы, следовательно, совокупность систем уравнений (1.18) регулярна. Согласно теории регулярных систем [6] эта совокупность имеет ограниченное решение, если отношения свободных членов w_k уравнений (1.18) к соответствующим разностям $1 - \sigma_{k1}$ ограничены.

Вместе с тем, как легко видеть из (1.11) и (1.13), хотя свободные члены ω_{k2} второй системы (1.18) и остаются ограниченными, однако их отношение к $1 - \sigma_{k2}$ неограниченно возрастает в месте с k . Поэтому постараемся преобразовать системы (1.16) таким образом, чтобы свободные члены ω'_{k2} полученных систем стремились к нулю вместе с $1 - \sigma_{k1}$, причем так, чтобы отношения $\frac{\omega'_{k1}}{1 - \sigma_{k1}}$ оставались ограниченными. С этой целью, выделив из свободных членов второй системы слагаемые

$$-\frac{2(-1)^k \beta_k}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \operatorname{ch} \beta_k d \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) dt + \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \int_0^d T(t) \operatorname{ch} \beta_k t dt \right\}, \quad (1.21)$$

имеющие переменный знак, введем новые неизвестные m'_k и n'_k , определенные зависимостями

$$m_k = m'_k \quad n_k = n'_k + \\ + 2(-1)^{k+1} \beta_k \left\{ e^{-\beta_k (b-d)} \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) dt + e^{-\beta_k d} \int_0^d T(t) \operatorname{ch} \beta_k t dt \right\}. \quad (1.22)$$

Подставляя значения m_k и n_k из (1.22) в (1.18), получим следующую совокупность систем линейных уравнений:

$$m'_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{cth} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ \frac{2\lambda_2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m'_p}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} + \frac{2\lambda_1}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n'_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1 d \zeta_k}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} + \frac{\lambda_2 d \eta_k}{\operatorname{sh} \alpha_k d} - \right. \\ \left. - \frac{4\lambda_1}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[e^{-\beta_p (b-d)} \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_p (b-t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\beta_p d} \int_0^d T(t) \operatorname{ch} \beta_p t dt \right] \right\}, \quad (1.23)$$

$$n'_k = \frac{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d \operatorname{sh} \beta_k (b-d)}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \frac{2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m'_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \frac{2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n'_p}{\beta_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{b-d}{\operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \left[\gamma_k - \frac{1}{\beta_k} \int_d^b \tau_k(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) dt \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{b-d}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k d} \int_0^d \tau_k(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt + \\
& + 2(-1)^k e^{-\beta_k b} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \beta_k d} \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) \, dt - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \int_0^d T(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt \right] - \\
& - \frac{4}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p}{\beta_p^2 + \beta_k^2} \left[e^{-\beta_p (b-d)} \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_p (b-t) \, dt + \right. \\
& \quad \left. + e^{-\beta_p d} \int_0^b T(t) \operatorname{ch} \beta_p t \, dt \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Последние слагаемые обеих систем представляют знакопеременные ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся в силу сделанных в начале параграфа предположений относительно функции $T(x)$.

Как нетрудно видеть из (1.23), свободные члены обеих систем совокупности стремятся к нулю так же, как $\frac{1}{k}$, откуда следует, что совокупность бесконечных систем линейных уравнений (1.23) имеет ограниченное решение.

Вместе с тем полученные выражения свободных членов имеют довольно сложный вид, ибо входящие в них ряды весьма трудно суммируемы. Структура свободных членов совокупности может быть значительно упрощена, если, кроме предполагавшейся ранее ограниченности вариации функции $T(x)$ в промежутке $(0, b)$, потребовать, чтобы $T(x)$ была непрерывна и имела почти всюду в $(0, b)$ производную с ограниченной вариацией.

В этом случае, интегрируя выражение (1.21) по частям, будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \frac{2(-1)^{k+1} \beta_k}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \operatorname{ch} \beta_k d \int_d^b T(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) \, dt + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \int_0^d T(t) \operatorname{ch} \beta_k t \, dt \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ T(d) \operatorname{ch} \beta_k b - T(b) \operatorname{ch} \beta_k d \int_d^b T'(t) \operatorname{ch} \beta_k (b-t) dt - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \int_0^d T(t) \operatorname{sh} \beta_k t dt \right\}. \quad (1.24)$$

Выделим главную часть выражения (1.24) и обозначим:

$$m_k = m_k^*, \quad (1.25)$$

$$n_k = n_k^* + 2(-1)^{k+1} T(d).$$

Тогда совокупность (1.18) преобразуется в следующую

$$m_k^* = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{cth} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ \frac{2\lambda_2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} + \frac{2\lambda_1}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1 d \tau_k}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} - \frac{\lambda_2 d \eta_k}{\operatorname{sh} \alpha_k d} - \frac{4\lambda_1 T(d)}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \right\}, \\ n_k^* = \frac{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d) \operatorname{ch} \beta_k d}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left\{ \frac{2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \frac{2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{\beta_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{b-d}{\operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \left[\gamma_k - \frac{1}{\beta_k} \int_d^b \tau_k(t) \operatorname{sh} \beta_k (b-t) dt \right] - \right. \\ \left. - \frac{b-d}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d} \int_0^d \tau_k(t) \operatorname{ch} \beta_k t dt - \frac{4T(d)}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(-1)^k}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (b-d)} \left[T(b) - \int_0^b T'(t) \operatorname{ch} \beta_k (b-t) dt \right] + \right. \\ \left. - \frac{2(-1)^k}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d} \int_0^d T'(t) \operatorname{sh} \beta_k t dt \right\}.$$

Ряды, входящие в выражения свободных членов, легко суммируются, и совокупность систем (1.26) окончательно примет вид:

$$m_k^* = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{cth} \alpha_k (b-d) + \lambda_2 \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ \frac{2\lambda_2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} + \frac{2\lambda_1}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_1 d \zeta_n}{\operatorname{sh} \alpha_n (b-d)} - \frac{\lambda_2 d \eta_n}{\operatorname{sh} \alpha_n d} - \frac{2\lambda_1 T(d)}{\alpha_n^2 (b-d)} \left[1 - \frac{\alpha_n (b-d)}{\operatorname{sh} \alpha_n (b-d)} \right] \Bigg|, \\
n_n^* &= \frac{\beta_n \operatorname{sh} \beta_n (b-d) \operatorname{sh} \beta_n d}{\operatorname{ch} \beta_n b} \left\{ \frac{2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{\alpha_p^2 + \beta_n^2} + \frac{2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{\beta_p^2 + \beta_n^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-d}{\operatorname{sh} \beta_n (b-d)} \left[\gamma_n - \frac{1}{\beta_n} \int_0^b \tau_n(t) \operatorname{sh} \beta_n (b-t) dt \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{b-d}{\beta_n \operatorname{ch} \beta_n d} \int_0^d \tau_n(t) \operatorname{ch} \beta_n t dt - \frac{2T(d)}{\alpha_n^2 (b-d)} \left[1 - \frac{\alpha_n (b-d)}{\operatorname{sh} \alpha_n (b-d)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2(-1)^k}{\beta_n \operatorname{sh} \beta_n (b-d)} \left[T(b) - \int_0^b T'(t) \operatorname{ch} \beta_n (b-t) dt \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2(-1)^k}{\beta_n \operatorname{ch} \beta_n d} \int_0^d T'(t) \operatorname{sh} \beta_n t dt \right\}.
\end{aligned} \quad (1.27)$$

Свободные члены полученной системы удовлетворяют вышеперечисленным требованиям, откуда следует, что полученная система имеет ограниченное решение.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера установившееся распределение температуры в неоднородном теле, когда внешние грани его поддерживаются при постоянной температуре T , причем внутри второй среды происходит тепловыделение с постоянной интенсивностью Q_2 . Кроме того, примем, что коэффициент теплопроводности второй среды λ_2 в пять раз больше коэффициента теплопроводности первой среды λ_1 и $d = \frac{2}{3} b^*$.

В этом случае величины, входящие в предыдущие соотношения, будут:

$$Q_1(x, y) = 0, \quad Q_2(x, y) = Q_2, \quad T(x) = T(y) = T, \quad \lambda_2 = 5\lambda_1, \quad d = \frac{2}{3} b$$

* Заметим, что расчет распределения температуры в случае, когда грани поддерживаются при переменной температуре, или когда интенсивность тепловыделения изменяется в зависимости от координат, не представляет никакой принципиальной разницы.

и совокупность бесконечных систем (1.27) примет вид:

$$m_k^* = \frac{4(2k+1)}{\pi [\operatorname{cth} \alpha_k (b-d) + 5 \operatorname{th} \alpha_k d]} \left\{ 5 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{(2p+1)^2 + (2k+1)^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{(4p)^2 + (2k+1)^2} + \frac{2}{(2k+1)^2} \left[T + 5 \frac{Q_2 d^2}{\lambda_2 \pi (2k+1)} \right] \right\}, \quad (1.28)$$

$$n_k^* = \frac{2k \operatorname{sh} k\pi \operatorname{ch} 2k\pi}{\pi \operatorname{ch} 3k\pi} \left\{ 8 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p^*}{(2p+1)^2 + (4k)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^*}{p^2 + k^2} + \frac{T}{k^2} \right\}, \\ \left(\alpha_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{d} \right).$$

Обозначим:

$$m_k^* = \gamma m_k'' + 2T, \quad n_k^* = \gamma n_k'' + 2T, \quad \gamma = \frac{40 d^2 Q_2}{\pi^2 \lambda_2}. \quad (1.29)$$

Подставляя значения m_k^* и n_k^* из (1.29) в (1.28), приходим к следующей совокупности двух бесконечных систем:

$$m_k'' = \frac{1}{\operatorname{cth} \alpha_k (b-d) + 5 \operatorname{th} \alpha_k d} \left\{ \frac{2(2k+1)}{\pi} \left[10 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p''}{(2p+1)^2 + (2k+1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p''}{(4p)^2 + (2k+1)^2} \right] + \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}, \quad (1.30)$$

$$n_k'' = \frac{2k \operatorname{sh} k\pi \operatorname{ch} 2k\pi}{\pi \operatorname{ch} 3k\pi} \left\{ 8 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{m_p''}{(2p+1)^2 + (4k)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p''}{p^2 + k^2} \right\},$$

свободные члены которой убывают со скоростью $\frac{1}{k^2}$.

Выражения (1.29) для $f_k(x)$ и $g_k(x)$ примут вид:

$$f_k(x) = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \left\{ 2T + \gamma m_k'' \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \alpha_k^2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p''}{\beta_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \sin \beta_p (x-d) \right\}, \quad (1.31)$$

$$g_k(x) = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \left\{ 2T + \frac{\gamma}{5(2k+1)^2} + \gamma m_k'' \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k d} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \alpha_k^2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p''}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2)} \cos \alpha_p x \right\},$$

откуда для $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ получим:

$$V_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left\{ 2T + \gamma m_k'' \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \alpha_k^2}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p''}{\beta_p (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \sin \beta_p (x-d) \right\} \cos \alpha_k y, \quad (1.32)$$

$$U_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left\{ 2T + \frac{\gamma}{5(2k+1)^2} + \gamma m_k'' \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k d} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \alpha_k^2}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p''}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \alpha_k^2)} \cos \alpha_p x \right\} \cos \alpha_k y.$$

Для усиления сходимости рядов в правых частях выражений (1.32) выделим предельные значения m_k'' и n_k'' . При этом, как легко видеть из (1.28), $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k'' = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k''$.

Суммируя получающиеся ряды, а также меняя порядок суммирования в двойных рядах, окончательно получим следующие формулы для $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$:

$$V_1(x, y) = T + \gamma \left\{ m \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{d} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (m_k'' - m) \frac{(-1)^k}{2k+1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} \cos \alpha_k y + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (n_k'' - m) \frac{\operatorname{ch} \beta_k y}{k \operatorname{ch} \beta_k d} \sin \beta_k (x-d) \right\}, \quad (1.33)$$

$$U_2(x, y) = T + \gamma \left\{ \frac{m}{2} + \left(1 - \frac{y^2}{d^2} \right) \frac{\pi^2}{80} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (m_k'' - m) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{(2k+1) \operatorname{ch} \alpha_k d} \cos \alpha_k x + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[m_k'' - m - \frac{1}{5(2k+1)} \right] \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{(2k+1) \operatorname{ch} \alpha_k d} \cos \alpha_k y \right\}.$$

Здесь $m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k'' = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k''$. (1.34)

Аналогично, для $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) = & 2T \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} + \frac{\gamma}{b-d} \left\{ n_k^- \frac{\operatorname{sh} \beta_k(b-x)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k d} + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta_k}{b-d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^-}{\beta_p(\beta_p^2 + \beta_k^2)} \sin \beta_p(x-d) \right\}, \\ \psi_k(x) = & 2T \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} + \frac{\gamma}{b-d} \left\{ n_k^- \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k d} + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta_k}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p^-}{\alpha_p(\alpha_p^2 + \beta_k^2)} \cos \alpha_p x \right\},\end{aligned}\quad (1.35)$$

откуда для $V_2(x, y)$ получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}V_2(x, y) = & T + \gamma \left\{ 2m \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{d} \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{y}{d} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (n_k^- - m_k^-) \frac{\operatorname{sh} \beta_k(b-x) \sin \beta_k(y-d) + \operatorname{sh} \beta_k(b-y) \sin \beta_k(x-d)}{k \operatorname{sh} k\pi} \right\}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Заметим, что пользуясь вторым из соотношений (1.35), для $V_1(x, y) = V_2(y, x)$ получим точно такое же выражение, какое было получено выше.

Перейдем теперь к оценке m_k^- и n_k^- . Пользуясь теоремами о регулярных системах и применяя с двух сторон лимитанты, получим:

$\bar{m}_0^- = 0,628$	$\bar{m}_0^- = 0,573$	$\bar{n}_1^- = 0,420$	$\bar{n}_1^- = 0,352$
$\bar{m}_1^- = 0,527$	$\bar{m}_1^- = 0,448$	$\bar{n}_2^- = 0,461$	$\bar{n}_2^- = 0,364$
$\bar{m}_2^- = 0,516$	$\bar{m}_2^- = 0,425$	$\bar{n}_3^- = 0,474$	$\bar{n}_3^- = 0,367$
$\bar{m}_3^- = 0,511$	$\bar{m}_3^- = 0,412$	$\bar{n}_4^- = 0,481$	$\bar{n}_4^- = 0,366$
$\bar{m}_4^- = 0,509$	$\bar{m}_4^- = 0,404$	$\bar{n}_5^- = 0,484$	$\bar{n}_5^- = 0,365$
$\bar{m}_5^- = 0,508$	$\bar{m}_5^- = 0,398$	$\bar{n}_6^- = 0,488$	$\bar{n}_6^- = 0,364$
$\bar{m}_6^- = 0,507$	$\bar{m}_6^- = 0,394$	$\bar{n}_7^- = 0,488$	$\bar{n}_7^- = 0,363$
$\bar{m}_7^- = 0,507$	$\bar{m}_7^- = 0,390$	$\bar{n}_8^- = 0,506$	$\bar{n}_8^- = 0,357$
$\bar{m}_8^- = 0,507$	$\bar{m}_8^- = 0,388$	(k > 7)	
$\bar{m}_k^- = 0,506$	$\bar{m}_k^- = 0,357$		

(k > 8)

Здесь знаки $-$ и $\sim$ обозначают соответственно верхнюю и нижнюю грани $\bar{m}_k^*$ и $\bar{n}_k^*$. Подставляя значения $\bar{m}_k^*$, $\bar{n}_k^*$ и $\bar{m}_k^*$, $\bar{n}_k^*$ в (1.32) и (1.36), получим выражения функции распределения температуры $U(x, y)$ в теле с избытком и недостатком.

Прежде чем перейти к вычислению функции распределения температуры $U(x, y)$, представим последнюю в виде:

$$U(x, y) = T + \gamma u(x, y) = T + \frac{40 J^2 Q_2}{\pi^2 \lambda_2} u(x, y).$$

Значения $u(x, y)$ для некоторых точек приведены в таблице 1.

Таблица 1

$x \backslash y$	0	$\pm \frac{d}{2}$	$\pm \frac{3d}{4}$	$\pm d$	$\pm \frac{5d}{4}$	$\pm \frac{3d}{2}$
0	0,387 0,360	0,372 0,345	0,353 0,327	0,327 0,302	0,160 0,148	0
$\pm \frac{d}{2}$	0,372 0,345	0,357 0,343	0,337 0,308	0,310 0,283	0,152 0,137	0
$\pm \frac{3d}{4}$	0,353 0,327	0,337 0,308	0,316 0,258	0,287 0,253	0,136 0,120	0
$\pm d$	0,327 0,302	0,310 0,283	0,287 0,257	0,253 0,179	0,101 0,086	0
$\pm \frac{5d}{4}$	0,160 0,148	0,152 0,137	0,136 0,120	0,101 0,086	0,052 0,044	0
$\pm \frac{3d}{2}$	0	0	0	0	0	0

При этом в верхних строчках даны значения $u(x, y)$ с избытком, а в нижних — с недостатком.

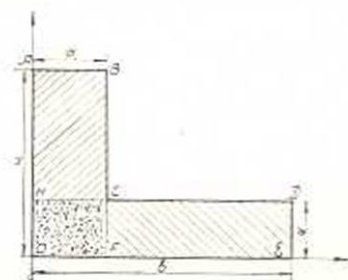
§ 2. Распространение тепла в неоднородном призматическом теле с поперечным сечением в виде прямого угла

Рассмотрим плоское распространение тепла в теле с поперечным сечением OABCDE (фиг. 3), состоящем из трех сред с различными коэффициентами теплопроводности, когда задано распределение температуры на сторонах угла.

Обозначим функцию распределения температуры в первой среде через $U_1(x, y)$, во второй — $U_2(x, y)$ и в третьей — $U_3(x, y)$.

Функции $U_i(x, y)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$



Фиг. 3.

соответствующим граничным условиям

$$U_1(x, d) = S(x), \quad U_1(x, 0) = S_0(x), \quad U_1(b, y) = S_1(y), \quad U_2(x, 0) = S_0(x), \quad (2.2)$$

$$U_2(0, y) = T_3(y), \quad U_3(0, y) = T_0(y), \quad U_3(d_1, y) = T(y), \quad U_3(x, b_1) = T_1(x)$$

и условиям на линиях контакта CF и HC

$$U_1(d_1, y) = U_2(d_1, y), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=d_1} \quad (2.3)$$

$$U_2(x, d) = U_3(x, d), \quad \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=d} = \lambda_3 \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=d}$$

Здесь $S_0(x)$, $S(x)$, $S_1(y)$, также $T_0(y)$, $T(y)$ и $T_1(x)$ — заданные функции распределения температуры соответственно вдоль OE, CD, ED, OA, CB и AB рассматриваемого угла (относительно этих функций предполагаем лишь, что они имеют ограниченную вариацию), λ_i — коэффициент теплопроводности i -ой среды ($i = 1, 2, 3$).

Представим функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в виде рядов

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \quad U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d} dy, \quad g_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d} dy.$$

Дифференциальные уравнения для $f_k(x)$ и $g_k(x)$ соответственно будут:

$$\begin{aligned} f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 f_k(x) &= \frac{2k\pi}{d^2} \left[(-1)^k S(x) - S_0(x) \right], \\ g_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 g_k(x) &= \frac{2k\pi}{d^2} \left[(-1)^k U_3(x, d) - S_0(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.2) и (2.3) получим граничные условия для $f_k(x)$ и $g_k(x)$:

$$f_k(b) = s_{k1}, \quad f_k(d_1) = g_k(d_1), \quad \lambda_1 f_k'(d_1) = \lambda_2 g_k'(d_1), \quad g_k(0) = t_{k0}. \quad (2.6)$$

Здесь

$$s_{k1} = \frac{2}{d} \int_0^d S_1(y) \sin \frac{k\pi y}{d} dy, \quad t_{k0} = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(y) \sin \frac{k\pi y}{d} dy.$$

Представим функцию $U_3(x, y)$ в виде ряда

$$U_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \varphi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U_3(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx. \quad (2.7)$$

Подставляя значение $U_3(x, y)$ из (2.7) в уравнение (2.5) и решая последнее, а также используя условия (2.6), будем иметь:

$$f_k(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} [B_k \operatorname{sh} \alpha_k (b-x) + r_k \operatorname{sh} \alpha_k x] + \\ + \frac{2}{d} \int_{d_1}^x [(-1)^k S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (x-t) dt, \\ g_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left[B_k \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d_1)}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} + r_k \right] + \rho_k \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (d_1-x)}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} - \\ - \frac{2}{d} \int_x^{d_1} S_0(t) \operatorname{sh} \alpha_k (t-x) dt - (-1)^k \frac{2\gamma^2 k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi_p(d)}{p^2 + (\gamma k)^2} \sin \alpha_p x. \quad (2.8)$$

Здесь обозначено

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{d}, \quad \gamma = \frac{d_1}{d}, \quad r_k = s_{k1} - \frac{2}{d} \int_{d_1}^b [(-1)^k S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (b-t) dt, \\ \rho_k = t_{k0} + \frac{2}{d} \int_0^{d_1} S_0(t) \operatorname{sh} \alpha_k t dt. \quad (2.9)$$

Неизвестные постоянные B_k , входящие в выражения (2.8), определяются из системы уравнений

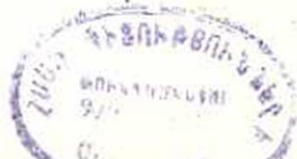
$$B_k = \frac{1}{\lambda_1 \operatorname{ch} \alpha_k (b-d_1) + \lambda_2 \operatorname{cth} \alpha_k d_1 \operatorname{sh} \alpha_k (b-d_1)} \left\{ \lambda_2 \operatorname{sh} \alpha_k b \times \right. \\ \times \left[(-1)^k \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \psi_p(d_1)}{p^2 + (\gamma k)^2} + \frac{\rho_k}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} \right] + r_k (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{ch} \alpha_k d_1 \left. \right\}. \quad (2.10)$$

Прежде чем найти граничные условия для $\varphi_k(y)$, представим $U_2(x, y)$ в виде ряда

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \psi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} U_2(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx. \quad (2.11)$$

Аналогично предыдущему, дифференциальные уравнения и граничные условия для $\varphi_k(y)$ и $\psi_k(y)$ соответственно будут:

$$\varphi_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 \varphi_k(y) = \frac{2k\pi}{d_1^2} [(-1)^k T(y) - T_0(y)],$$



$$\phi_k(y) - \left(\frac{\kappa\pi}{d_1}\right)^2 \phi_k(y) = \frac{2\kappa\pi}{d_1^2} \left[(-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} i_p(d_1) \sin \frac{p\pi y}{d} - T_0(y) \right], \quad (2.12)$$

$$\varphi_k(b_1) = t_{k1}, \quad \varphi(d) = \phi_k(d), \quad \lambda_2 \varphi_k(d) = \lambda_1 \phi_k(d), \quad \phi_k(0) = s_{k0}. \quad (2.13)$$

Здесь

$$t_{k1} = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} T_1(x) \sin \frac{\kappa\pi x}{d_1} dx, \quad s_{k0} = \frac{2}{d_1} \int_0^d S_0(t) \sin \frac{\kappa\pi x}{d_1} dx. \quad (2.14)$$

Решая (2.12) и удовлетворяя условиям (2.13), получим:

$$\begin{aligned} \Psi_k(y) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k b_1} [F_k \operatorname{sh} \beta_k (b_1 - y) + q_k \operatorname{sh} \beta_k y] + \\ &+ \frac{2}{d_1} \int_d^y [(-1)^k T(t) - T_0(t)] \operatorname{sh} \beta_k (y - t) dt, \\ \phi_k(y) &= \frac{\operatorname{sh} \beta_k y}{\operatorname{sh} \beta_k b_1} \left[F_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k (b_1 - d)}{\operatorname{sh} \beta_k d} + q_k \right] + \tau_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k (d - y)}{\operatorname{sh} \beta_k d} - \\ &- \frac{2}{d_1} \int_y^d T_0(t) \operatorname{sh} \beta_k (t - y) dt + (-1)^{k+1} \frac{2\delta^2 \kappa}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i_p(d_1)}{p^2 + (\delta\kappa)^2} \sin \beta_p y. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При этом постоянные F_k определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{\lambda_2 \operatorname{sh} \beta_k (b_1 - d) + \lambda_1 \operatorname{ch} \beta_k (b_1 - d)} \left\{ \lambda_2 \operatorname{sh} \beta_k b_1 \times \right. \\ &\times \left[(-1)^k \frac{2\delta}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p i_p(d)}{p^2 + (\delta\kappa)^2} + \frac{q_k}{\operatorname{sh} \beta_k d} \right] + (\lambda_2 - \lambda_1) q_k \operatorname{ch} \beta_k d \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\kappa\pi}{d_1}, \quad \delta = \frac{1}{\gamma} = \frac{d}{d_1}, \quad \tau_k = s_{k0} + \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} T_0(t) \operatorname{sh} \beta_k t dt, \\ q_k(t) &= t_{k1} + \frac{2}{d_1} \int_0^b [(-1)^k T(t) - T_0(t)] \operatorname{sh} \beta_k (b_1 - t) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Преобразуем соотношения (2.10) и (2.17), введя новые неизвестные m_k и n_k

$$B_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k (b - d_1)} \left[\frac{(-1)^k}{\kappa} m_k \operatorname{sh} \alpha_k b - n_k \operatorname{sh} \alpha_k d_1 \right],$$

$$F_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k (b_1 - d)} \left[\frac{(-1)^k}{K} n_k \operatorname{sh} \beta_k b_1 - q_k \operatorname{sh} \beta_k d \right]. \quad (2.18)$$

Подставив значения B_k и F_k из (2.18) в (2.10) и (2.16), для определения m_k и n_k приходим к следующей совокупности двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$m_k = \frac{\lambda_2 K}{\lambda_1 \operatorname{cth} \alpha_k (b - d_1) + \lambda_2 \operatorname{cth} \alpha_k d_1} \left\{ \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{p^2 + (\gamma K)^2} + \frac{(-1)^k \rho_k}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} + \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{\lambda_1 \tau_k}{\lambda_2 \operatorname{sh} \alpha_k (b - d_1)} \right\}, \quad (2.19)$$

$$n_k = \frac{\lambda_2 K}{\lambda_3 \operatorname{cth} \beta_k (b_1 - d) + \lambda_2 \operatorname{cth} \beta_k d} \left\{ \frac{2\delta}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{p^2 + (\delta K)^2} + \frac{(-1)^k \tau_k}{\operatorname{sh} \beta_k d} + \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{\lambda_3 q}{\lambda_2 \operatorname{sh} \beta_k (b_1 - d)} \right\}.$$

При этом выражения для $f_k(x)$ и $g_k(x)$ окончательно примут вид:

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b - x)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b - d_1)} \left\{ \frac{(-1)^k}{K} m_k - \right. \\ \left. - \frac{2}{d} \int_{d_1}^x [(-1)^k S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (t - d_1) dt \right\} + \\ + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (x - d_1)}{\operatorname{sh} \alpha_k (b - d_1)} \left\{ s_{k0} - \frac{2}{d} \int_x^b [(-1)^k S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (b - t) dt \right\}, \quad (2.20)$$

$$g_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} \left\{ \frac{(-1)^k}{K} m_k + \frac{2}{d} \int_x^{d_1} S_0(t) \operatorname{sh} \alpha_k (d_1 - t) dt \right\} + \\ + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (d_1 - x)}{\operatorname{sh} \alpha_k d_1} \left\{ t_{k0} + \frac{2}{d} \int_0^x S_0(t) \operatorname{sh} \alpha_k t dt \right\} + \\ + (-1)^{k+1} \frac{2\gamma^2 K}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p n_p}{p[p^2 + (\gamma K)^2]} \sin \alpha_p x.$$

Аналогично, для $\varphi_k(y)$ и $\psi_k(y)$ получим:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = & \frac{\operatorname{sh} \beta_k(b_1 - y)}{\operatorname{sh} \beta_k(b_1 - d)} \left\{ (-1)^k \frac{\pi_k}{K} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{d_1} \int_d^{b_1} [(-1)^k T(t) - T_0(t)] \operatorname{sh} \beta_k(t - t) dt \right\} + \\ & + \frac{\operatorname{sh} \beta_k(y - d)}{\operatorname{sh} \beta_k(b_1 - d)} \left\{ t_{k1} - \frac{2}{d_1} \int_y^{b_1} [(-1)^k T(t) - T_0(t)] \operatorname{sh} \beta_k(b_1 - t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(y) = & \frac{\operatorname{sh} \beta_k y}{\operatorname{sh} \beta_k d} \left\{ (-1)^k \frac{\pi_k}{K} + \right. \\ & + \frac{2}{d} \int_y^d T_0(t) \operatorname{sh} \beta_k(d - t) dt \left. \right\} + \frac{\operatorname{sh} \beta_k(d - y)}{\operatorname{sh} \beta_k d} \left\{ s_{k0} + \right. \\ & + \frac{2}{d} \int_0^y T_0(t) \operatorname{sh} \beta_k t dt \left. \right\} + (-1)^{k+1} \frac{2\delta^2 K}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p}{p[p^2 + (\delta K)^2]} \sin \beta_p y. \end{aligned}$$

Исследуем теперь совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.19). Как легко видеть, суммы модулей коэффициентов первой и второй систем соответственно будут:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \operatorname{cth} \alpha_k(b - d_1) + \lambda_2 \operatorname{cth} \alpha_k d_1} \left(\operatorname{cth} \alpha_k d_1 - \frac{1}{\alpha_k d_1} \right) & < \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 \operatorname{cth} \beta_k(b_1 - d) + \lambda_2 \operatorname{cth} \beta_k d} \left(\operatorname{cth} \beta_k d - \frac{1}{\beta_k d} \right) & < \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом, при ограниченных значениях отношений $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ совокупность систем (2.19) вполне регулярна.

С другой стороны, из условия ограниченности вариации заданных на границе функций нетрудно видеть, что свободные члены совокупности систем (2.19) ограничены. Из теории регулярных систем [6] следует, что совокупность (2.19) имеет ограниченное решение.

Задаваясь значениями граничных функций и коэффициентов теплопроводности, на основании теорем о вполне регулярных системах, оценим сверху и снизу значения m_k и π_k , посредством которых из формул (2.20) и (2.21) определяются $f_k(x)$, $g_k(x)$, $\varphi_k(y)$ и $\psi_k(y)$.

Пример. Рассмотрим в качестве примера задачу о плоском распределении температуры в однородном призматическом теле с углообразным поперечным сечением, когда длина стенок бесконечно велика ($b=b_1=\infty$), толщина их $d=d_1$, причем температура наружных поверхностей поддерживается при 1000°C , а внутренних — 0°C (для этого случая распределение температуры в ряде точек было вычислено А. П. Ваничевым [7] посредством метода сеток).

Величины, входящие в выражения (2.19), (2.20) и (2.21), будут:

$$S_0(x) = T_0(y) = 1000^\circ, \quad S(x) = T(y) = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \alpha_k = \beta_k = \frac{k\pi}{d},$$

$$s_{k0} = t_{k0} = 2000 \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}, \quad \rho_k = 2000 \frac{\operatorname{ch} k\pi - (-1)^k}{k\pi}, \quad (2.23)$$

$$\frac{r_k}{\operatorname{sh} \alpha_k (b-d)} = \frac{q_k}{\operatorname{sh} \beta_k (b-d)} = \frac{2000}{k\pi}.$$

При этом совокупность (2.19) примет вид:

$$m_k = \frac{k}{1 + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{p^2 + k^2} + \frac{2000}{k\pi} \left[(-1)^k (1 + \operatorname{cth} k\pi) - \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Введем новые неизвестные m_k^* , связанные с m_k зависимостью

$$m_k = \frac{1000}{\pi} \left[-m_k^* + 2(-1)^k \right]. \quad (2.25)$$

Подставляя значения m_k из (2.25) в (2.24) и перенося k -ый член ряда в левую часть уравнения, приходим к следующей бесконечной системе линейных уравнений:

$$m_k^* = \frac{2k}{(1 + \operatorname{cth} k\pi) k\pi - 1} \left\{ k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p^*}{p^2 + k^2} + \frac{1}{k} \right\} \quad (2.26)$$

со стремящимися к нулю свободными членами. Штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $p = k$ опускается. Как нетрудно видеть из (2.26), $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k^* = 0$.

Выражения (2.20) для коэффициентов $f_k(x)$ и $g_k(x)$ после некоторых преобразований примут вид:

$$f_k(x) = \frac{1000}{k\pi} \left[2 + (-1)^{k+1} e^{-k\pi \left(\frac{x}{d} - 1 \right)} m_k^* \right], \quad (2.27)$$

$$g_k(x) = \frac{1000}{\kappa\pi} \left\{ 2 \left[1 + (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{x}{d} \right) \right] + (-1)^{k+1} m_k^* \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{sh} \kappa\pi} + \right. \\ \left. + \frac{2\kappa^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p^*}{p(p^2 + \kappa^2)} \sin \alpha_p x \right\} \quad \left(\alpha_k = \frac{\kappa\pi}{d} \right).$$

Такой же вид будут иметь $\varphi_k(y)$ и $\psi_k(y)$. Найдем выражения для $U_1(x, y)$.

Подставив значение $f_k(x)$ в первое из разложений (2.4), будем иметь:

$$U_1(x, y) = \frac{1000}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \left\{ (-1)^{k+1} m_k^* e^{-\kappa\pi \left(\frac{x}{d} - 1 \right)} + 2 \right\} \sin \frac{\kappa\pi y}{d}$$

Суммируя вторые слагаемые в фигурных скобках, обуславливающие слабую сходимость, получим:

$$U_1(x, y) = 1000 \left\{ 1 - \frac{y}{d} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\kappa} m_k^* e^{-\kappa\pi \left(\frac{x}{d} - 1 \right)} \sin \frac{\kappa\pi y}{d} \right\}. \quad (2.28)$$

Далее, подставляя значение $g_k(x)$ из (2.27) во второе из уравнений (2.4), будем иметь:

$$U_2(x, y) = \\ = \frac{1000}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \left\{ 2 \left[1 + (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{x}{d} \right) \right] + (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{sh} \kappa\pi} m_k^* + \right. \\ \left. + (-1)^{k+1} \frac{2\kappa^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p^*}{p(p^2 + \kappa^2)} \sin \frac{p\pi x}{d} \right\} \sin \frac{\kappa\pi x}{d}.$$

Суммируя первое слагаемое ряда и меняя порядок суммирования в двойном ряду, после некоторых преобразований окончательно получим:

$$U_2(x, y) = 1000 \left\{ 1 - \frac{xy}{d^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} m_k^* \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x \sin \alpha_k y + \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \alpha_k x}{\kappa \operatorname{sh} \kappa\pi} \right\}. \quad (2.29)$$

Заметим, что $U_2(x, y) = U_1(y, x)$.

Оценим сверху и снизу значения m_k^* . Согласно теоремам о регулярных системах [6], из (2.26) получим:

$$\bar{m}_1^* = 0,421, \quad \bar{m}_2^* = 0,268, \quad \bar{m}_3^* = 0,210, \quad \bar{m}_4^* = 0,178, \quad \bar{m}_5^* = 0,157, \\ \bar{m}_6^* = 0,143, \quad \bar{m}_k^* = 0,133 \quad (k > 6)$$

$$\bar{m}_1^* = 0,409, \quad \bar{m}_2^* = 0,249, \quad \bar{m}_3^* = 0,185, \quad \bar{m}_4^* = 0,145, \quad \bar{m}_5^* = 0,123,$$

$$\bar{m}_6^* = 0,106, \quad \bar{m}_k^* = \frac{k}{\pi} \sum_{p=1}^6 \frac{\bar{m}_p^*}{p^2 + k^2} + \frac{1}{k} \quad (k > 6)$$

Подставляя в (2.28) и (2.29) вместо m_k^* значения $\bar{m}_k^*$ и $\bar{m}_k^*$, получим верхнюю и нижнюю грани функции $U(x, y)$.

Ниже, в таблице 2, приведены значения $U(x, y)$ для некоторых точек. При этом в верхних строчках даются значения $U(x, y)$ с избытком, в средних — с недостатком, в нижних же строчках для сравнения даются значения $U_B(x, y)$, полученные А. П. Ваничевым [7].

Таблица 2

y	x U(x,y)	0	$\frac{d}{2}$	d	2d	3d
$\frac{d}{4}$	$\bar{U}(x,y)$	1000	902,3	814	754,0	750,2
	$\tilde{U}(x,y)$	1000	901,5	813	753,9	750,2
	$U_B(x,y)$	1000	899	809	754	751
$\frac{d}{2}$	$\bar{U}(x,y)$	1000	803,0	619	505,8	500,3
	$\tilde{U}(x,y)$	1000	801,4	614	505,6	500,2
	$U_B(x,y)$	1000	797	603	507	502
$\frac{3d}{4}$	$\bar{U}(x,y)$	1000	704,5	391	254,2	250,2
	$\tilde{U}(x,y)$	1000	702,3	381	254,1	250,2
	$U_B(x,y)$	1000	694	356	255	251

Заметим, что в случае, если внешние грани тела поддерживаются при температуре T_0 , а внутренние — при T , то выражения (2.28) и (2.29) нужно умножить на $\frac{T_0 - T}{1000}$ и прибавить T .

Сектор математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 18 X 1962

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.
2. Минасян Р. С. Об одной задаче теплопроводности. ДАН Армянской ССР, т. XII, № 3, 1950.

3. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, № 1, 1950.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
5. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат, 1950.
6. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
7. Ванниев А. П. Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах. Труды НИИ-1, № 25, 1947.

Ռ. Ս. Մինասյան

ԱՆՀԱՄԱՍԵՆ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՄԱՐՄԻՆԵՐՈՒՄ ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է երկու տարրեր նյութերից կազմված փառակուսան լայնական հասվածքով պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ բաշխման խնդիրը, երբ տրված է ջերմության բաշխումը կողերի վրա՝ ջերմարտադրության առկայության դեպքում: Լուծված է նաև երեք տարրեր նյութերից կազմված՝ անկյունաձև լայնական հասվածք ունեցող մարմնում ջերմության տարածման խնդիրը:

Ցույց է տրված ստացված դժային հավասարումների անվերջ սխառեմների սեղուկարությունը: Լուծված է երկու օրինակ և ստացված արդյունքները համեմատված են Ա. Պ. Վանիևի (7) տվյալների հետ: