

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Х. Манукян

Кручение неоднородного стержня, поперечное сечение которого представляет круговой кольцевой сектор

В статье приводится приближенное решение задачи о кручении призматического стержня с поперечным сечением кругового кольцевого сектора, усиленного по кривым поверхностям тонким слоем высокомодульного материала постоянной толщины.

1. Дифференциальное уравнение и контурное условие задачи

Если положение какой-либо точки внутри или на контуре кольцевого сектора определить полярными координатами ρ и φ , тогда определение функции напряжения $U(\rho, \varphi)$ при кручении для рассматриваемой задачи сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2, \quad (1)$$

при граничном условии

$$\begin{cases} G_0 U(\rho, \varphi) = C & \text{— на участках контура без усиления,} \\ G_0 U(\rho, \varphi) + G_1 \delta_1 \frac{\partial U}{\partial n} = C & \text{— на участках контура с усиливающим слоем,} \end{cases} \quad (2)$$

где G_0 и G_1 ($G_0 < G_1$) — модули сдвигов соответственно ядра и усиливающих слоев, δ_1 — толщины последних, $\frac{\partial U}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к контуру сечения, C — постоянная, определяемая интегрированием (2) по всему контуру поперечного сечения скручиваемого стержня при условии $\int U ds = 0$.

Обозначим модули сдвигов ядра (основного) стержня, внутреннего усиливающего слоя и внешнего усиливающего слоя соответственно через G_0 , G_1 и G_2 .

Размеры радиусов кольцевого сектора и толщины усиливающих слоев указаны на фиг. 1.

При наших обозначениях контурное условие (2) для рассматриваемой задачи сводится к следующим соотношениям:

$$G_0 U(\rho, 0) = C \quad a \leq \rho \leq b, \quad (3)$$

Для определения постоянных A_k и B_k имеем:

$$G_0 \Psi_k(a) - G_1 \delta_1 \Psi_k'(a) = \frac{2C}{k\pi} [1 - (-1)^k], \quad (11)$$

$$G_0 \Psi_k(b) + G_2 \delta_2 \Psi_k'(b) = \frac{2C}{k\pi} [1 - (-1)^k],$$

которые суть условия (5) и (6) в преобразованном виде.

Пользуясь (10) и системой (11), для постоянных A_k и B_k найдем следующие значения:

$$A_k = \frac{2[1 - (-1)^k] a^2 a}{k\pi b^{a_k+1} (4a^2 - k^2\pi^2)} \times \\ \times \frac{\left[(a - 2\lambda_1)(b - a_k \lambda_2) - (b + 2\lambda_2)(a + \lambda_1 a_k) \left(\frac{a}{b} \right)^{-a_k-2} \right]}{\left[a_k \left(\frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_2}{b} \right) \operatorname{ch} q a_k + \left(1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{ab} a_k^2 \right) \operatorname{sh} q a_k \right]}, \quad (12)$$

$$B_k = \frac{-2[1 - (-1)^k] a^2 a}{k\pi b^{-a_k+1} (4a^2 - k^2\pi^2)} \times \\ \times \frac{\left[(a - 2\lambda_1)(b + a_k \lambda_2) - (b + 2\lambda_2)(a - \lambda_1 a_k) \left(\frac{a}{b} \right)^{a_k-2} \right]}{\left[a \left(\frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_2}{b} \right) \operatorname{ch} q a_k + \left(1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{ab} a_k^2 \right) \operatorname{sh} q a_k \right]}, \quad (13)$$

где $\lambda_1 = \frac{G_1 \delta_1}{G_0}$, $\lambda_2 = \frac{G_2 \delta_2}{G_0}$ и $q = \ln \frac{a}{b}$,

Из (7), (10), (12) и (13) для функции напряжения $U(\rho, \varphi)$ получаем выражение:

$$U(\rho, \varphi) = \frac{C}{G_0} + \frac{\rho^2}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] + \\ + \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k} (\omega_{a_k} \rho^{2k} + \omega_{-a_k} \rho^{-2k}) \sin \alpha_k \varphi, \quad (14)$$

где через ω_{a_k} обозначено выражение

$$\frac{4a^2 a}{\pi b^{a_k+1} (4a^2 - k^2\pi^2)} \left[a_k \left(\frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_2}{b} \right) \operatorname{ch} q a_k + \left(1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{ab} a_k^2 \right) \operatorname{sh} q a_k \right], \quad (15)$$

$$C = \frac{(\lg \alpha - \alpha)(G_1 a^2 + G_2 b^2)}{\alpha(a+b) + 2(b-a)} + \frac{2 \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k} \left[G_1 (\omega_{\alpha k} a^{\alpha k} - \omega_{-\alpha k} a^{-\alpha k}) + G_2 (\omega_{\alpha k} b^{\alpha k} - \omega_{-\alpha k} b^{-\alpha k}) \right]}{\alpha(a+b) + 2(b-a)}. \quad (16)$$

При получении (14) в преобразованиях использованы суммы [3]:

$$\sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1,3,\dots} \frac{k \sin kx}{k^2 - a^2} = \frac{\pi \cos a \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{4 \cos \frac{a\pi}{2}} \quad 0 < x < \pi.$$

3. Определение жесткости при кручении

Жесткость профиля при кручении определяется по формуле:

$$D = 2 G_0 \int \int_{(F)} U(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi - 2CF, \quad (17)$$

где F — площадь поперечного сечения скручиваемого стержня.

Подставляя значение $U(\rho, \varphi)$ из (14) и произведя интегрирование, получим:

$$D = G_0 K(\alpha, a, b, \lambda_1, \lambda_2), \quad (18)$$

где

$$K(\alpha, a, b, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{(b^4 - a^4)(\lg \alpha - \alpha)}{4} + \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k^2} \left(\frac{b^{\alpha k + 1} - a^{\alpha k + 1}}{\alpha k + 1} \omega_{\alpha k} - \frac{b^{-\alpha k + 1} - a^{-\alpha k + 1}}{\alpha k - 1} \omega_{-\alpha k} \right). \quad (19)$$

4. Определение напряжений τ_φ и τ_z

Для определения напряжений τ_φ и τ_z имеем следующие соотношения:

$$\tau_\varphi = G_i \Phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \tau_z = -G_i \Phi \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (20)$$

где Φ — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставляя значения $U(\rho, \varphi)$ из (14), получим:

$$\tau_\varphi = G_i \frac{\Phi}{\rho} \left[\frac{\rho^2 \sin(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} + \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1,3,\dots} (\omega_{\alpha k} \rho^{\alpha k} + \omega_{-\alpha k} \rho^{-\alpha k}) \cos \alpha_k \varphi \right], \quad (21)$$

$$\tau_z = -G_i \Phi \left\{ \rho \left[\frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] + \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1,3,\dots} (\omega_{\alpha k} \rho^{\alpha k - 1} - \omega_{-\alpha k} \rho^{-\alpha k - 1}) \sin \alpha_k \varphi \right\}. \quad (22)$$

Простым мажорированием легко убедиться, что все ряды, входящие в основные соотношения, обладают хорошей сходимостью и в вычислениях суммы рядов могут быть заменены через суммы первых 3—4 членов.

Некоторые значения коэффициента $K(\alpha, a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ при $G_1 = G_2$, $G_1/G_0 = 10$, $\delta_1 = \delta_2$, $\alpha = 2\pi$ (круглый вал с радиальной трещиной) приведены ниже в таблицах 1 и 2, причем толщина усиливающего слоя δ введена с помощью процентного отношения площади поперечного сечения усиливающего слоя ко всей площади поперечного сечения стержня, что в таблицах обозначено через F_δ/F .

Таблица 1

$a/b = 0,2$			
F_δ/F	1%	3%	5%
λ	0,04	0,12	0,2
K	0,823	1,147	1,385

Таблица 2

$a/b = 0,5$			
F_δ/F	1%	3%	5%
λ	0,025	0,075	0,2
K	0,340	0,428	0,637

Для соответственного однородного стержня $K = 0,57$ [2].

Полученные основные соотношения (14), (16), (19), (21) и (22) могут быть использованы для решения задач о кручении стержня с сечением кругового кольцевого сектора и в случаях когда:

- а) стержень покрыт усиливающим слоем только по внешней кривой поверхности ($\delta_1 = 0$),
- б) стержень покрыт усиливающим слоем только по внутренней кривой поверхности ($\delta_2 = 0$),
- в) стержень покрыт по кривым поверхностям усиливающим слоем одинаковой толщины и из одного материала ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$),
- г) стержень однородный ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

Для этого достаточно в указанных соотношениях коэффициенты ω_{α_k} соответственно заменить выражениями:

для случая а)

$$\frac{4\alpha^2 a^2 \left[(b - \alpha_k \lambda) - (b + 2\lambda) \left(\frac{a}{b} \right)^{-\alpha_k - 2} \right]}{\pi b^{\alpha_k + 1} (4\alpha^2 - \kappa^2 \pi^2) \left(\operatorname{sh} q \alpha_k + \frac{\lambda}{b} \alpha_k \operatorname{ch} q \alpha_k \right)},$$

для случая б)

$$\frac{4\alpha^2 a \left[(a - 2\lambda) - (a + \lambda \alpha_k) \left(\frac{a}{b} \right)^{-\alpha_k - 2} \right]}{\pi b^{\alpha_k} (4\alpha^2 - \kappa^2 \pi^2) \left(\operatorname{sh} q \alpha_k + \frac{\lambda}{a} \alpha_k \operatorname{ch} q \alpha_k \right)},$$

для случая в)

$$\frac{4z^2 a \left[(a-2\lambda)(b-z_k \lambda) - (b+2\lambda)(a+\lambda z_k) \left(\frac{a}{b} \right)^{-z_k-2} \right]}{\pi b^{a_k+1} (4z^2 - k^2 \pi^2) \left[\left(1 + \frac{\lambda z_k^2}{ab} \right) \operatorname{sh} q z_k + \lambda z_k \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} q z_k \right]},$$

для случая г)

$$\frac{4z^2 a^2 \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{-z_k-2} \right]}{\pi b^{a_k} (4z^2 - k^2 \pi^2) \operatorname{sh} q z_k}.$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 19 VII 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л. 1948.
2. Динник А. Н. Кручение—теория и приложения, ОНТИ, НКТП СССР, 1938.
3. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Госиздат тех. теорет. лит., М.—Л., 1948.

Ա. Խ. Մանուկյան

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԶՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ, ՈՐԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔԸ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՍԵԿՏՈՐ Է

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում արված է շրջանային օղակի սեկտորի լայնական հատվածք ունեցող ձողի որոշման խնդրի մոտավոր լուծումը, երբ ձողի կողմնային կոր մակերևույթները պատված են սահքի բարձր մոդուլ ունեցող նյութի բարակ շերտով:

Խնդրի լուծման համար ստացված խառն եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ հավասարումը ինտեգրված է, օգտագործելով Գ. Ա. Գրինբերգի կողմից առաջադրված փոփոխականների անջատման եղանակը: Դիտված են նաև խնդրի մասնավոր դեպքերի լուծումները: Տրված են հաշվարկային քանակներ որոշման կոշտությունը և լարումները որոշելու համար: