

Г. М. Гарибян

Тормозное излучение и рождение пар в поле электрона (общий случай)

В работе рассматриваются три эффекта третьего порядка: радиационное столкновение электрона с позитроном, электрона с электроном и рождение пар γ -квантом в поле электрона.

1. Изучаемые нами системы состоят из электронов (положительных и отрицательных энергий) и поля излучения. Как известно, выражения для полных матричных элементов переходов рассматриваемых процессов могут быть получены как методом Фейнмана-Дайсона, так и с помощью цепочек переходов.

Кулоновская энергия взаимодействия двух электронов, когда один электрон переходит из состояния m в m' , а другой — из n в n' , и при этом изменение величины импульса у обоих электронов равно p и противоположно по направлению, равно¹:

$$V_{n,n'}^{m,m'} = \frac{4\pi e^2}{Vp^2} (a_n^* a_n) (a_m^* a_m) (u_n^* u_n) (u_m^* u_m) e^{i(E_m + E_n - E_{m'} - E_{n'})t} \quad (1)$$

где a_n^* и a_n — операторы уничтожения и рождения электронов, u_n — дираковские амплитуды волновых функций электронов, E_n — соответствующие энергии, V — нормировочный объем.

Энергия взаимодействия электрона с полем излучения, при переходе электрона из состояния m в состояние n с испусканием или поглощением кванта $\vec{k}$ поляризации r , будет равна:

$$H_{mn}^{(r)} = - \frac{e}{V^{1/2}} \int \frac{2\pi}{k} (a_m^* a_n) (u_m^* \alpha_r u_n) \left(a_k^{(r)} e^{i(E_m - E_n - k)t} + a_k^{(r)} e^{i(E_m - E_n + k)t} \right) \quad (2)$$

где α_r — проекция дираковской матрицы $\vec{\alpha}$ на направление поляризации кванта $\vec{k}$, $a_k^{(r)*}$ и $a_k^{(r)}$ — операторы уничтожения и рождения фотонов импульса $\vec{k}$ и поляризации r .

¹ Мы пользуемся системой единиц, где $\hbar = c = m_e = 1$. Импульсы будем измерять в энергетических единицах.

Вероятность перехода системы в единицу времени из состояния i в состояние f , как известно, равна:

$$w = 2\pi |H_{if}|^2 \rho, \quad (3)$$

где ρ — плотность числа энергетических уровней конечной системы на единичный энергетический интервал, H_{if} — полный матричный элемент перехода.

Для получения поперечника процесса надо разделить w на плотность потока взаимодействующих частиц.

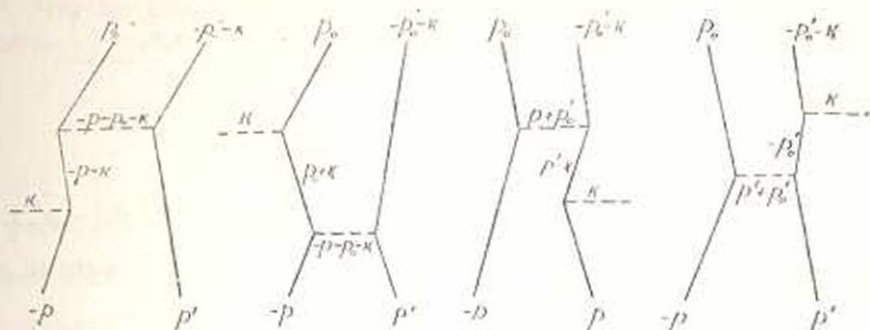
Рассмотрение задачи будем проводить в приближении плоских волн (борновское приближение). При кулоновском взаимодействии частиц это означает, что скорости их до и после столкновения должны удовлетворять неравенству $v \gg \frac{1}{137}$.

2. Выражение для полного матричного элемента перехода, как отмечалось выше, можно получить двумя способами. При расчете с цепочками переходов каждый из трех рассматриваемых эффектов будет иметь 32 цепочки, из них 16 прямых и 16 обменных (отметим, что в случае радиационного столкновения электрона с позитроном обмен будет идти через посредство электронов отрицательных энергий). Из 16-ти прямых цепочек 12 цепочек состоят только из поперечных переходов, т. е. дают запаздывающее взаимодействие, а 4 цепочки имеют по кулоновскому члену. Цепочки с запаздыванием можно разбить на группы по 3 цепочки в каждой, характеризуемые одинаковыми значениями импульсов электронов в промежуточных состояниях, которые, объединяясь по тому же признаку с кулоновскими цепочками, дают, после суммирования по поляризациям обменного кванта и промежуточным состояниям, 4 относительно компактных выражения для прямого взаимодействия и 4 — для обменного.

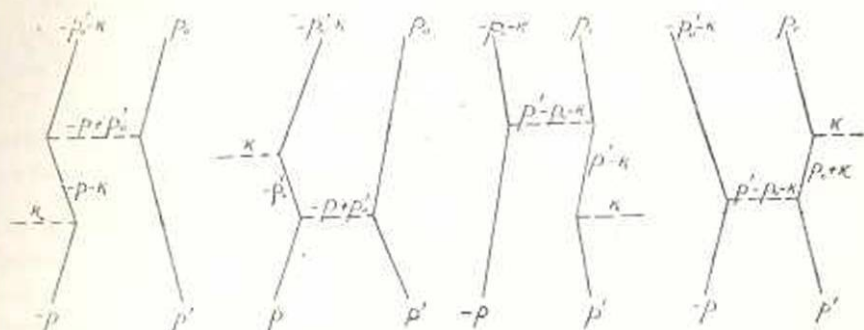
При получении выражения для полного матричного элемента перехода методом Феймана-Дайсона для каждого из эффектов необходимо построить 8 диаграмм (4 прямых и 4 обменных). Так, например, при описании процесса радиационного столкновения электрона с электроном, когда два начальных электрона с импульсами $\vec{p}$ и $-\vec{p}$ переходят в электроны с импульсами $-\vec{p}'_0 - \vec{k}$ и $\vec{p}'_0$, испустив квант $\vec{k}$, будем иметь диаграммы указанные на фиг. 1 и 2.

Восемь выражений, соответствующих диаграммам Феймана, совпадают с восемью выражениями, полученными с помощью цепочек переходов указанным выше способом, для всех 3 эффектов.

После этих замечаний напишем выражение для полученного таким образом полного матричного элемента перехода радиационного столкновения электрона $(-\vec{p}, E)$ с позитроном $(\vec{p}, E')$, в результате которого образуется электрон $(\vec{p}'_0, E_0)$ и позитрон $(-\vec{p}'_0 - \vec{k}, E'_{ок})$ и испускается квант $\vec{k}$:



Фиг. 1. Диаграммы прямых процессов.



Фиг. 2. Диаграммы обменных процессов.

$$H = a \sum_{i=1}^8 I_i, \quad (4)$$

$$a = \frac{1}{1-k} \left(\frac{\pi \alpha}{V} \right)^2, \quad (5)$$

$$I_1 = u^*(-\vec{p}, E) u^*(\vec{p}_0 + \vec{k}, -E'_{\text{ок}}) \frac{z_{1f} K_1^{(1)}(\vec{z}_1 \vec{z}_2 - 1)}{-a_1 g_1} \cdot u(\vec{p}_0, E_0) u(-\vec{p}', E'), \quad (6)$$

причем индекс 1 у дираковских матриц указывает, что они связывают дираковские амплитуды состояний электронов $(-\vec{p}, E)$ и $(\vec{p}_0, E_0)$, а индекс 2 — $(\vec{p}_0' + \vec{k}, -E'_{\text{ок}})$ и $(-\vec{p}', -E')$. Что же касается I_2 , I_3 и I_4 , то они будут иметь только другие ядра, которые соответственно равны

$$\frac{(\vec{z}_1 \vec{z}_2 - 1) K_1^{(1)} z_{1f}}{a_2 g_1}, \quad \frac{z_{1f} K_2^{(2)} (\vec{z}_1 \vec{z}_2 - 1)}{-a_2 g_2}, \quad \frac{(\vec{z}_1 \vec{z}_2 - 1) K_2^{(1)} z_{2f}}{a_4 g_2}. \quad (7)$$

В случае обменных членов будем иметь:

$$I_0 = u^* \left(-\vec{p}, E \right) u^* \left(\vec{p}'_0 + \vec{k}, -E'_{ок} \right) \frac{\alpha_{1r} K_1^{(1)} (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 1)}{a_1 g_1} \cdot \\ \cdot u \left(-\vec{p}', -E' \right) u \left(\vec{p}_0, E_0 \right), \quad (8)$$

причем индекс 1 теперь уже связывает состояния $(-\vec{p}, E)$ и $(-\vec{p}', E')$, а 2 — $(\vec{p}'_0 + \vec{k}, -E'_{ок})$ и $(\vec{p}_0, E_0)$. I_0, I_2, I_3 имеют своими ядрами следующие выражения:

$$\frac{(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 1) K_1^{(1)} \alpha_{1r}}{-a_1 g_1}, \quad \frac{\alpha_{2r} K_2^{(2)} (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 1)}{a_2 g_2}, \quad \frac{(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 1) K_3^{(3)} \alpha_{2r}}{-a_3 g_3}. \quad (9)$$

При этом нами были введены обозначения:

$$K_1^{(1)} = E - \kappa + H_1 \left(-\vec{p} - \vec{k} \right), \\ K_1^{(2)} = E_0 + \kappa + H_1 \left(\vec{p}_0 + \vec{k} \right), \\ K_1^{(3)} = -E'_{ок} - \kappa + H_1 \left(\vec{p}'_0 \right), \\ K_1^{(4)} = -E' + \kappa + H_1 \left(-\vec{p}' + \vec{k} \right), \\ \left(\text{здесь } H_1 \left(\vec{p} \right) = \vec{\alpha}_1 \vec{p} + \beta_1 \text{ и } j = 1, 2 \right) \quad (10)$$

$$a_1 = E \kappa + \vec{p} \vec{k}, \\ a_2 = E_0 \kappa - \vec{p}_0 \vec{k}, \\ a_3 = -E'_{ок} \kappa - \left(\vec{p}'_0 + \vec{k} \right) \vec{k}, \\ a_4 = -E' \kappa + \vec{p}' \vec{k}, \\ g_1 = \left(E'_{ок} - E' \right)^2 - \left| \vec{p}' + \vec{p}'_0 + \vec{k} \right|^2, \\ g_2 = \left(E - E_0 \right)^2 - \left| \vec{p} + \vec{p}_0 \right|^2, \\ g_3 = \left(E'_{ок} + E_0 \right)^2 - \left| \vec{p}_0 - \vec{p}'_0 - \vec{k} \right|^2, \\ g_4 = \left(E' + E \right)^2 - \left| \vec{p}' - \vec{p} \right|^2. \quad (11)$$

Матричный элемент перехода радиационного столкновения электрона с электроном, описанного диаграммами Фейнмана, получится из (4) при замене

$$\vec{p}'_0 + \vec{k}, -E'_{ок} \rightarrow \vec{p}', \quad E' \\ -\vec{p}', \quad -E' \rightarrow -\vec{p}'_0 - \vec{k}, E'_{ок}. \quad (13)$$

Что же касается рождения пар γ -квантом в поле электрона, то замена

$$\begin{aligned} \vec{p}'_0 + \vec{k}, -E'_{ок} &\rightarrow \vec{p}', & E' \\ -\vec{p}', &-E' \rightarrow -\vec{p}'_0 - \vec{k}, -E'_{ок} \end{aligned} \quad (14)$$

в формулах (4) даст полный матричный элемент процесса, когда квант импульса $\vec{k}$, столкнувшись с электроном $(\vec{p}_0, E_0)$, образует пару: электрон $(\vec{p}', E')$ и позитрон $(\vec{p}'_0 + \vec{k}, E'_{ок})$, а первоначальный электрон переходит в состояние $(-\vec{p}, E)$.

Наша дальнейшая задача будет заключаться в вычислении $\frac{1}{4} \sum_{x,y} SS_0 S' S'_0 |H|^2$, т. е. в суммировании по поляризациям тормозного кванта $\vec{k}$ и усреднении по начальным и суммировании по конечным спинам электронов в случае радиационных столкновений, или же в усреднении по поляризациям кванта $\vec{k}$ и по спинам электрона в начальном состоянии и в суммировании по спинам электронов и позитрона в конечных состояниях в случае рождения пар. Расчеты можно упростить произведя в I_1 некоторые преобразования. Именно, удобно пронести матрицы α_j через $K_j^{(i)}$, учитывая происходящие при этом изменения, что поведет к уменьшению числа членов в $K_j^{(i)}$, а затем раскрыть в I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5, I_6, I_7, I_8 их ядра и произвести приведение подобных членов.

При вычислении следов матриц мы пользовались заранее вычисленными таблицами значений следов следующих образований из матриц, которые являются постоянными элементами всех расчетов:

$$\begin{aligned} \alpha_i \dots (E \pm H(\vec{p})) \alpha_k \dots (E' \pm H(\vec{p}')), \\ \alpha_i \dots (E \mp H(\vec{p})) \alpha_k \dots (E' \pm H(\vec{p}')), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\alpha_i \dots$ и $\alpha_k \dots$ представляют собой всевозможные комбинации из дираковских матриц $\vec{\alpha}$ и β .

В конечном итоге для радиационного столкновения электрона с позитроном для $\frac{1}{4} \sum_{x,y} SS_0 S' S'_0 |H|^2$ было получено следующее выражение:

$$\frac{1}{4} \sum_{x,y} SS_0 S' S'_0 |H|^2 = \frac{a^2}{EE_0 E' E'_{ок}} \left\{ J_{пр} + J_{об} + J_{инт} \right\}, \quad (16)$$

где члены в фигурных скобках появляются за счет прямого взаимодействия, обменного и их интерференции. Если ввести обозначения

$$b_1 = -E_0 E' + \vec{p}_0 \vec{p}',$$

$$b_2 = -E E'_{ox} + \vec{p} (\vec{p}'_0 + \vec{k}), \quad (17)$$

$$b_3 = -E_0 E'_{ox} - \vec{p}_0 (\vec{p}'_0 + \vec{k}),$$

$$b_4 = -E E' - \vec{p} \vec{p}'$$

$$A_x = \frac{p_x}{g_1 a_1} + \frac{p_{ox}}{g_1 a_2} - \frac{p'_{ox}}{g_2 a_3} - \frac{p'_x}{g_2 a_4},$$

$$B_x = \frac{p_x}{g_2 a_1} - \frac{p'_x}{g_2 a_4} - \frac{p'_{ox}}{g_1 a_3} + \frac{p_{ox}}{g_1 a_2}, \quad (18)$$

то для J_{np} будем иметь следующее выражение:

$$J_{np} = 2 \left[\left(\frac{1}{g_1 a_1} - \frac{1}{g_2 a_3} \right)^2 a_1 a_3 b_1 + \left(\frac{1}{g_1 a_2} - \frac{1}{g_2 a_4} \right)^2 a_2 a_4 b_2 + \left(\frac{1}{g_1 a_1} - \frac{1}{g_2 a_4} \right)^2 a_1 a_4 b_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{g_1 a_2} - \frac{1}{g_2 a_3} \right)^2 a_2 a_3 b_4 \right] + (a_1 a_2 - a_3 a_4) \left[\frac{1}{g_1^2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right)^2 - \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right)^2 \right] - \\ - (a_1 a_2 + a_3 a_4) \left(\frac{1}{g_1 a_1} + \frac{1}{g_1 a_2} - \frac{1}{g_2 a_3} - \frac{1}{g_2 a_4} \right)^2 + \sum_{x,y} A_x^2 (2b_1 b_2 + 2b_3 b_4 + g_1 + g_2) - \\ - 2 \sum_{x,y} A_x \left[b_3 (a_1 p'_x - a_4 p_x) \left(-\frac{1}{g_1 a_1} + \frac{1}{g_2 a_4} \right) + b_2 (a_1 p_{ox} + a_3 p_x) \left(\frac{1}{g_1 a_1} - \frac{1}{g_2 a_3} \right) + \right. \\ \left. + b_2 (a_2 p'_x + a_4 p_{ox}) \left(-\frac{1}{g_1 a_2} + \frac{1}{g_2 a_4} \right) + b_4 (a_2 p'_{ox} - a_3 p_{ox}) \left(\frac{1}{g_1 a_2} - \frac{1}{g_2 a_3} \right) + \right. \\ \left. + (a_1 p_{ox} + a_2 p_x) \left(\frac{1}{g_1 a_2} - \frac{1}{g_2 a_1} \right) + (a_3 p'_x + a_4 p'_{ox}) \left(\frac{1}{g_2 a_3} - \frac{1}{g_2 a_4} \right) \right]. \quad (19)$$

J_{00} получится из J_{np} , очевидно, заменой друг друга $\vec{p}_0$, E_0 и $-\vec{p}'$, $-E'$. Наконец, J_{int} будет равно:

$$J_{int} = 4b_1 \left(\frac{a_3}{g_1 g_3 a_1} + \frac{a_1}{g_2 g_3 a_3} - \frac{1}{g_2 g_4} - \frac{1}{g_2 g_3} \right) + 4b_2 \left(\frac{a_4}{g_1 g_4 a_2} + \right. \\ \left. + \frac{a_2}{g_2 g_3 a_4} - \frac{1}{g_1 g_2} - \frac{1}{g_2 g_4} \right) + 2 \left[\frac{1}{g_1 g_3} \left(\frac{a_1^2}{a_2 a_1} + \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2} - \frac{a_2 a_3}{a_1 a_4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{g_1 g_4} \left(\frac{a_2^2}{a_1 a_3} + \frac{a_4}{a_2} - \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2} - \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} \right) + \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{a_1^2}{a_1 a_3} + \frac{a_2}{a_4} - \frac{a_1 a_2}{a_2 a_1} - \frac{a_2 a_3}{a_1 a_4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{g_2 g_4} \left(\frac{a_3^2}{a_2 a_4} + \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_1 a_2}{a_3 a_4} - \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} \right) \right] + \sum_{x,y} A_x B_x (4b_1 b_2 + \\ + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 - 2b_1 - 2b_2 - 4) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{x,y} A_x \left[b_1(a_1 p_{ox} + a_2 p_x) \left(-\frac{1}{g_3 a_1} + \frac{1}{g_4 a_3} \right) + b_2(a_2 p_x + a_1 p_{ox}) \right. \\
& \left. \left(-\frac{1}{g_3 a_4} + \frac{1}{g_4 a_2} \right) \right] + 2 \sum_{x,y} B_x \left[b_1(a_1 p_{ox} + a_2 p_x) \left(-\frac{1}{g_1 a_1} + \frac{1}{g_2 a_3} \right) + \right. \\
& + b_2(a_2 p_x + a_1 p_{ox}) \left(-\frac{1}{g_3 a_4} + \frac{1}{g_4 a_2} \right) \left. \right] + \sum_{x,y} A_x \left(\frac{1}{g_3 a_1} - \frac{1}{g_4 a_3} + \right. \\
& + \frac{1}{g_4 a_2} - \frac{1}{g_3 a_4} \left. \right) (a_1 p_x + a_2 p_{ox} - a_3 p_{ox} - a_4 p_x) + \sum_{x,y} B_x \left(\frac{1}{g_1 a_1} - \right. \\
& - \frac{1}{g_2 a_3} + \frac{1}{g_3 a_2} - \frac{1}{g_4 a_4} \left. \right) (a_1 p_{ox} + a_2 p_x - a_3 p_x - a_4 p_{ox}) + \sum_{x,y} A_x \left(\frac{1}{g_3 a_1} + \right. \\
& + \frac{1}{g_4 a_2} - \frac{1}{g_3 a_2} - \frac{1}{g_4 a_4} \left. \right) \left[(p_x + p_x) (a_2 + a_3) + (p_{ox} + p_{ox}) (a_1 + a_4) \right] \\
& + \sum_{x,y} B_x \left(\frac{1}{g_1 a_1} + \frac{1}{g_2 a_2} - \frac{1}{g_3 a_3} - \frac{1}{g_4 a_4} \right) \left[(p_x - p_{ox}) (a_3 + a_4) + \right. \\
& \left. + (p_{ox} - p_x) (a_1 + a_2) \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого из рассматриваемых эффектов будем иметь выражение для поперечника в следующем виде:

$$d\Phi = 2\pi \frac{V}{v + v'} \cdot \frac{1}{4} \sum_{x,y} S S_0 S' S'_0 |H|^2 \rho, \quad (21)$$

где v и v' — скорости сталкивающихся частиц (электронов, позитронов или квантов). Для двух других процессов $\frac{1}{4} \sum S S_0 S' S'_0 |H|^2$ получается из (16) посредством (13) и (14).

Для ρ , в случае радиационного столкновения электрона с позитроном, имеем выражение:

$$\rho = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \cdot \frac{\kappa^2 p_0^2 d\Omega_x d\Omega_y}{\frac{\partial}{\partial p_0} \left[\frac{p_0}{E_0} + \frac{|\vec{p}'_0 + \vec{\kappa}|^2}{2E_{0x}} \right]} \quad (22)$$

В случае радиационного столкновения электрона с электроном

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \cdot \frac{\kappa^2 p_0^2 d\Omega_x d\Omega_y}{\frac{\partial}{\partial p_0} \left[\frac{p_0}{E_0} + \frac{|\vec{p}'_0 + \vec{\kappa}|^2}{2E_{0x}} \right]} \quad (23)$$

Наконец, в случае рождения пар

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \cdot \frac{\rho' \left[\rho' + k \right] \frac{d\Omega' d\Omega''}{\partial \rho^2}}{\left[\rho' + k \right] + \frac{\partial \left[\rho' + k \right]}{2E}} \quad (24)$$

Коэффициенты $1/2$ в двух последних случаях появляются из-за наличия в конечном состоянии системы двух одинаковых частиц (двух электронов). Для получения значений поперечников в см^2 (21) надо умножить на $\left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2$. Отметим еще, что поперечники получены в произвольной системе координат.

Для проверки полученных формул масса позитрона в случае радиационного столкновения электрона с позитроном была устремлена к бесконечности. Для этого мы воспользовались несколько более длинным выражением, чем (19) (не приводимым здесь), где было проведено различие между массой электрона и массой позитрона, и в результате получили хорошо известную формулу Бете-Гайтлера для тормозного излучения электрона в поле неподвижного ядра с $Z=1$.

Вычисление значений поперечников в общем случае весьма трудно из-за чрезвычайной громоздкости полученных формул. Однако полученные результаты позволяют произвести исследование граничных случаев малых и больших энергий. Рассмотрение их будет проведено отдельно.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 8 IV 1952

Գ. Մ. Ղաթիբջան

ԱՐԳԵԼԱԿՄԱՆ ՀԱՌԱԳԱՅՈՒՄ ԵՎ ԶՈՒՅԳԻ ԾՆՈՒՆԴԸ ԷԼԵԿՏՐՈՆԻ ԴԱՇՏՈՒՄ (ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԵՊԲ)

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ դիտվում են երրորդ կարգի երեք էֆեկտներ՝ էլեկտրոնի սողիացիոն բախումը սողիարոնի հետ, էլեկտրոնի բախումը էլեկտրոնի հետ և էլեկտրոնի դաշտում զույգի ծնունդը չ-կվանտով:

Պրոցեսների համաժամգրեքի արտահայտությունները ստացված են ինչպես փոխանցման օգտկներին, նույնպես և Ֆեյնման-Դայսոնի մեթոդով: Ընդամենը փոխարկման հաշվառումով գոյություն ունի 32 օգտի, կամ Ֆեյնմանի 8 դիագրամ:

Ընդհանուր ֆորմուլայի ստացման համար էլեկտրոնի՝ սողիարոնի հետ ունեցած սողիացիոն բախման համաժամգրեքի արտահայտության մեջ

պողիտրոնի մասնան ձգակցվել է անվերջության և ստացված արտառայ-
տությունը համընկել է Բեռն-Հայտլերի ֆորմուլայի հետ:

Նկատի ունենալով ստացված արտառայությունների չափազանց բարդ
տեսքը, նրանց մանրամասն հետազոտությունը ընդհանուր դեպքի համար
անհնարին եղավ: Մեծ և փոքր էներգիաների համար եզրային դեպքերի
հետազոտությունը կկատարվի առանձին: