

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. К. Капанян

О кручении некоторых полых призматических стержней

Как известно, компоненты касательного напряжения по осям координат в сечении стержня, скручиваемого парами, приложенными по концам, будут [1]:

$$X_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1)$$

$$Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — функция напряжений, определяемая из уравнения

$$\nabla^2 \Phi = -2G\tau. \quad (3)$$

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, функция  $\Phi$  на внешнем и внутреннем контурах должна принимать постоянные значения.

Общее решение уравнения (3) в функции комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$  выражается в виде:

$$\Phi = -\frac{G\tau}{2} z \bar{z} + \varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \quad (4)$$

где  $\varphi_1(z)$  и  $\bar{\varphi}_1(\bar{z})$  — сопряженные аналитические функции  $z$  и  $\bar{z}$ .

Пользуясь теоремой о циркуляции касательного напряжения, доказываем, что для двусвязной области функция  $\varphi_1(z)$  однозначна.

Задача о кручении призматического полого стержня постоянного поперечного сечения может быть решена, если известна функция, отображающая двусвязную область данного сечения на кольцо.

В некоторых случаях эту отображающую функцию можно определить следующим приближенным способом.

Пусть  $z = \omega(\zeta)$  конформно отображает некоторую односвязную область плоскости  $z$  на внутреннюю или внешнюю область единичного круга в плоскости  $\zeta$ . Начиная с некоторых  $|\zeta| = \rho$  окружностей в плоскости  $\zeta$  будут соответствовать замкнутые кривые в области  $z$ , весьма близкие к окружностям. Таким образом,  $z = \omega(\zeta)$  можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую

на кольцо двусвязную область, ограниченную по одному контуру произвольной кривой, а по другому — окружностью.

Введя в (4)  $z = \omega(\zeta)$  [2], получим:

$$\Phi = -\frac{G\tau}{2} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}). \quad (5)$$

Функция  $\varphi(\zeta)$  голоморфна в области кольца и разлагается в ряд Лорана:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}. \quad (6)$$

Для определения  $\varphi(\zeta)$  пользуемся условиями на контуре, приняв на внешнем контуре

$$\Phi = 0, \quad (7)$$

а на внутреннем контуре

$$\Phi = A. \quad (8)$$

Рассмотрим кручение стержня, сечение которого ограничено извне произвольной кривой, а изнутри — окружностью.

Если функция  $z = \omega(\zeta)$  конформно отображает внутренность некоторой односвязной области плоскости  $z$  на единичный круг плоскости  $\zeta$ , то она представляется степенным рядом:

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \zeta^k, \quad (9)$$

где  $C_k$  — постоянные коэффициенты (комплексные или вещественные).

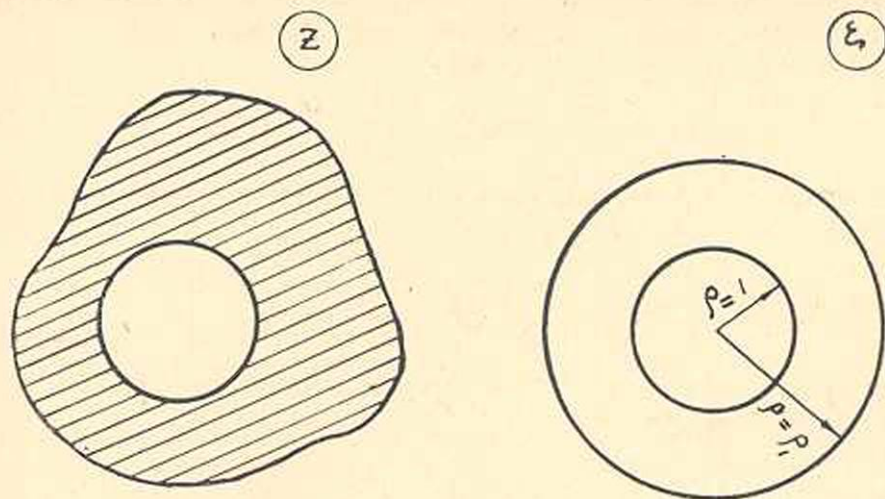
Точкам единичного круга  $\zeta = t_0 = e^{i\theta}$  соответствуют точки, лежащие на внешнем контуре области плоскости  $z$ . Возьмем внутри круга окружность  $\zeta = t_1 = \rho_1 e^{i\theta}$  с таким радиусом  $\rho_1$ , чтобы соответствующая ей замкнутая кривая на плоскости  $z$  была достаточно близка к окружности, и примем эту кривую за внутренний контур сечения (фиг. 1).

Подставив (9) и (6) при  $\zeta = t_0$  и  $\zeta = t_1$  в (7) и (8), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-ki\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k e^{-ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k e^{ki\theta} = \\ = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{ki\theta} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k e^{-ki\theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho_1^k e^{ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \rho_1^{-k} e^{-ki\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \rho_1^k e^{-ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \rho_1^{-k} e^{ki\theta} = \\ = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho_1^k e^{ki\theta} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k \rho_1^k e^{-ki\theta} \right) + A. \end{aligned} \quad (11)$$





Фиг. 1.

Выполнив умножение рядов и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{ki\theta}$  в обеих частях равенств (10) и (11), получим систему уравнений:

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \right),$$

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \rho_1^{2m} \right) + A,$$

$$a_k + \bar{b}_k = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m \right),$$

$$b_k + \bar{a}_k = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m \right),$$

$$a_k \rho_1^k + \bar{b}_k \rho_1^{-k} = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m \rho_1^{2m+k} \right),$$

$$b_k \rho_1^{-k} + \bar{a}_k \rho_1^k = \frac{G\tau}{2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m \rho_1^{2m+k} \right).$$

Решая эту систему, получим:

$$A = \frac{G\tau}{2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \rho_1^{2m} \right], \quad (12)$$

$$a_k = \frac{G\tau}{2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m [\rho_1^{2m+k} - \rho_1^{-k}]}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, \quad (13)$$

$$b_k = \frac{G\tau}{2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m [\rho_1^{2m+k} - \rho_1^k]}{\rho_1^{-k} - \rho_1^k}. \quad (14)$$

Таким образом, функции  $\varphi(\zeta) = \varphi_1(z)$ , а значит и  $\Phi$ , полностью определены, следовательно, при известных коэффициентах  $C_k$ , задача решена.

Этим же способом решается задача о кручении стержня с поперечным сечением, ограниченным извне окружностью, а изнутри — произвольной кривой, при этом для отображения пользуемся функцией  $z = \omega(\zeta)$ , конформно отображающей внешность некоторой односвязной области на внешность единичного круга.

В том случае, когда внешний контур сечения — правильный многоугольник, функция  $\omega(\zeta)$  определяется из формулы Кристофеля Шварца:

$$\omega(\zeta) = K \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(1 - \zeta^n)^{2/n}}, \quad (15)$$

где  $n$  — число сторон многоугольника,

$K$  — постоянный параметр.

Раскладывая в (15) подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, получим:

$$\omega(\zeta) = K \left[ \zeta + \frac{2}{n(n+1)} \zeta^{n+1} + \frac{2(n+2)}{n^2(2n+1)2!} \zeta^{2n+1} + \dots \right]. \quad (16)$$

Если в (16) удержать лишь конечное число членов, то получим полином, приближенно отображающий область, ограниченную извне правильным многоугольником, а изнутри — окружностью, на кольцо, у которого внешний радиус  $\rho = 1$ , а внутренний —  $\rho = \rho_1$ ,

$$\omega(\zeta) = K \sum_{k=0}^{\lambda} C_{nk+1} \zeta^{nk+1}, \quad (17)$$

где  $\lambda$  — число членов полинома,

$C_{nk+1}$  — вещественные коэффициенты.

Решение числовых примеров для квадратного и шестиугольного сечений показало, что при числе членов полинома (17)  $\lambda = 7$ , внешний контур сечения практически близок к прямолинейному многоугольнику,



а внутренний — при  $|\zeta| = \rho_1 \leq \frac{1}{2}$  является замкнутой кривой, у которой разность между наибольшим и наименьшим расстоянием от центра составляет менее 2%.

Имея в виду (17), выражения (12), (13) и (14) можно представить так:

$$A = \frac{G\tau K^2}{2} \left[ \sum_{m=0}^{\lambda} C_{mn+1}^2 - \sum_{m=0}^{\lambda} C_{mn+1}^2 \rho_1^{2(mn+1)} \right], \quad (18)$$

$$a_{nk} = \frac{G\tau K^2}{2} \frac{\sum_{m=0}^{\lambda} C_{n(m+k)+1} C_{mn+1} [\rho_1^{n(2m+k)+2} - \rho_1^{-nk}]}{\rho_1^{nk} - \rho_1^{-nk}}, \quad (19)$$

$$b_{nk} = \frac{G\tau K^2}{2} \frac{\sum_{m=0}^{\lambda} C_{n(m+k)+1} C_{mn+1} [\rho_1^{n(2m+k)+2} - \rho_1^{nk}]}{\rho_1^{-nk} - \rho_1^{nk}}. \quad (20)$$

*Пример 1.* Сечение ограничено извне квадратом, а изнутри — окружностью (фиг. 2).

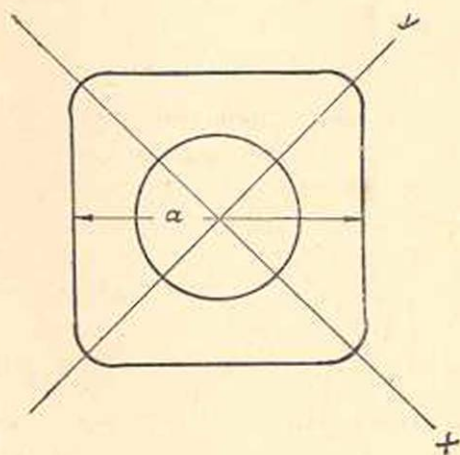
Возьмем функцию  $\omega(\zeta)$  в виде суммы семи членов ряда (16); при  $p=4$  имеем:

$$z = \omega(\zeta) = K [\zeta + 0,1\zeta^5 + 0,041667\zeta^9 + 0,024038\zeta^{13} + 0,016084\zeta^{17} + 0,011719\zeta^{21} + 0,004331\zeta^{25}]. \quad (21)$$

Коэффициент при седьмом члене полинома (21) взят менее соответствующего коэффициента ряда (16) и вычислен так, чтобы устранить кривизну в точке  $\left(r = \frac{a}{2}, \varphi = 45^\circ\right)$  внеш-

него контура, где касательное напряжение принимает максимальное значение, а наличие кривизны искажает величину этого напряжения.

Параметр  $K$  определяется из условия, что точке  $\left(r = \frac{a}{2}, \varphi = 45^\circ\right)$  на плоскости  $z$  соответствует точка  $(\rho=1, \theta=45^\circ)$  на плоскости  $\zeta$ .



Фиг. 2.

$$\kappa = 0,539768 \text{ а.} \quad (22)$$

Определив коэффициенты  $a_{jk}$  и  $b_{jk}$  функции  $\varphi(\zeta)$  по формулам (19) и (20), вычисляем напряжения в точках внешнего и внутреннего контуров из выражения

$$T_n - iT_s = 2i e^{i\alpha} \left[ -\frac{G\tau}{2} \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{\varphi_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right], \quad (23)$$

где  $T_n$  и  $T_s$  — проекции касательного напряжения на направления внешней нормали и касательной к контуру в рассматриваемой точке,  $\alpha$  — угол, образованный положительным направлением нормали в данной точке контура с осью  $ox$ .

Значения напряжений в долях от  $G\tau a$  приведены в таблице 1.

Таблица 1

| $\theta$ | $\rho$ | $T_s$    | $T_n$ |
|----------|--------|----------|-------|
| 0        | 1      | 0,315199 | 0     |
| 45°      | 1      | 0,685530 | 0     |
| 0        | 1/2    | 0,219952 | 0     |
| 45°      | 1/2    | 0,317697 | 0     |

Для двусвязного контура крутящий момент вычисляется по формуле:

$$M_{кр} = -2A_0 F_0 + 2AF + 2 \iint \Phi dF, \quad (24)$$

где  $A_0$  и  $A$  — значения функции напряжений  $\Phi$  на внешнем и внутреннем контурах сечения (в нашей задаче принято  $A_0 = 0$ ),  $F_0$  и  $F$  — площади, ограниченные внешним и внутренним контурами.

Двойной интеграл последнего слагаемого распространен на площадь сечения за вычетом внутренней полости.

В рассматриваемом полом сечении получим:

$$M_{кр} = 0,13260 \text{ Гта}^4.$$

Для сравнения приведем величину крутящего момента для стержня квадратного сплошного поперечного сечения по точному решению

$$M_{кр} = 0,1406 \text{ Гта}^4.$$

**Пример 2.** Сечение ограничено извне окружностью, а изнутри — квадратом (фиг. 3).

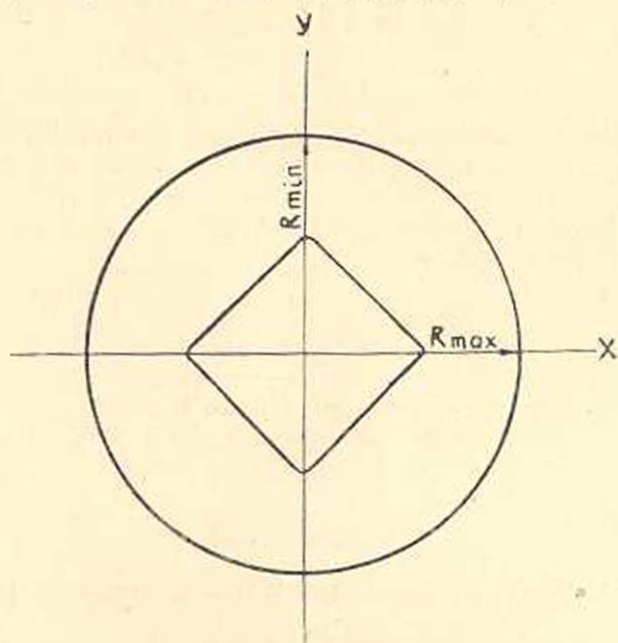
Функцией, отображающей внешность правильного многоугольника на внешность единичного круга, будет:

$$\omega(\zeta) = K \left[ \zeta + \frac{2}{n(n-1)} \zeta^{1-n} + \frac{n-2}{n^2(2n-1)} \zeta^{1-2n} + \dots \right]. \quad (25)$$



Взяв полином из четырех первых членов ряда (25), при  $n=4$ , получим функцию, достаточно точно отображающую область, ограниченную изнутри квадратом, а извне — окружностью, на кольцо, у которого внутренний радиус  $\rho=1$ , а внешний  $\rho=\rho_1=2$ .

$$z = \omega(\zeta) = K [\zeta + 0,166667 \zeta^{-3} + 0,017857 \zeta^{-7} + 0,005681 \zeta^{-11}]. \quad (26)$$



Фиг. 3.

Точкам  $(\rho=2, \theta=0)$  и  $(\rho=2, \theta=45^\circ)$  на плоскости  $\zeta$  соответствуют точки  $(r=R_{\max}, \varphi=0)$  и  $(r=R_{\min}, \varphi=45^\circ)$  на плоскости  $z$ , где  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$  — максимальное и минимальное расстояния точек внешнего контура сечения от центра, которые отличаются между собой менее чем на  $2\%$ .

Параметр  $K$  из (26) выразим через  $R_{cp} = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}$ ,

$$\text{тогда } K = 0,499960 R_{cp}.$$

Коэффициенты функции  $\varphi(\zeta)$  определяются тем же способом, как в предыдущем случае.

Напряжения (в долях от  $G\tau R_{cp}$ ), вычисленные по формуле (23), приведены в таблице 2.

Крутящий момент вычисляем по формуле (24) и выражаем в зависимости от среднего радиуса окружности внешнего контура

$$M_{кр} = 1,460354 G\tau R_{cp}^4.$$

Для цилиндрического сплошного стержня круглого поперечного сечения величина крутящего момента

$$M_{кр} = 1,5708 G\tau R^4.$$

Таблица 2

| $\theta$ | $\rho$ | $T_*$    | $T_n$ |
|----------|--------|----------|-------|
| 0        | 1      | 2,006073 | 0     |
| 45°      | 1      | 0,220578 | 0     |
| 0        | 1/2    | 0,988767 | 0     |
| 45°      | 1/2    | 1,009405 | 0     |

Ослабление от квадратного отверстия в круглом сечении составляет 7%.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступило 10 III 1952

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., 1947.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М.—Л., 1935.

### Է. Ե. Նապահյան

## ՄԻ ՔԱՆԻ ՍՆԱՄԵՋ ՊՐԻՉՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մնամեջ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը հնարավոր է լուծել, եթե հայտնի է այդ ձողի հատվածքը ներկայացնող երկկապ տիրույթը օղակի վրա կոնֆորմ ձևով արտապատկերող ֆունկցիան:

Հոդվածում բերված է երկկապ տիրույթները օղակի վրա կոնֆորմ ձևով արտապատկերելու մոտավոր եղանակը, երբ հայտնի է միակապ տիրույթը շրջանի վրա արտապատկերելու ֆունկցիան: Այդ եղանակը օգտագործված է սնամեջ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման համար, երբ ձողի հատվածքի արտաքին եզրագիծը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ ներքինը՝ սահմանափակ շառավիղով շրջանագիծ, և ընդհակառակը:

Լուծված օրինակներում տրվում են լարումները և կոշտությունները որոշելու համար հաշվարկային բանաձևեր երկու մասնավոր դեպքում՝ ա) երբ ձողի հատվածքի արտաքին եզրագիծը քառակուսի է, իսկ ներքինը՝ շրջանագիծ, և բ) երբ հատվածքի արտաքին եզրագիծը շրջանագիծ է, իսկ ներքինը՝ քառակուսի: